Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.00

1. Je dána kvadratická funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Víte, že pro $x = 1$ nabývá extrému (minima nebo maxima), jeden její kořen je 5 a bod $[2, 42]$ leží na grafu funkce f. Zjistěte součin abc.

   Řešení 1 -658.56

2. Kouma hází třemi čtyřstěnnými kostkami. Z každého hodu si vybere dvě největší čísla a sečte je. Jaká je průměrná hodnota Koumova součtu?

   Řešení 2 5.9375

3. Ňouma našel číslo a takové, že $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3$. Kolik je $a^3 + \frac{1}{a^3}$?

   Řešení 3 0

4. Pro kolik trojic celých čísel a, b, c z intervalu $[-2014, 2014]$ platí $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{\frac{a}{b}}{c}$?

   Řešení 4 48674352

   Za podmínky $b \neq 0$ a $c \neq 0$ přepíšeme rovnost do tvaru $ac^2 = a$. Dále pokud $a = 0$, b i c mohou být libovolná nenulová čísla, tedy máme $(2 \cdot 2014)^2$ trojic. Pokud $a \neq 0$ musí být $c = \pm 1$, ale a i b mohou být libovolné nenulové. Získáme tedy dalších $2(2 \cdot 2014)^2$, dohromady $3(2 \cdot 2014)^2 = 48674352$.

5. Je dáno $x_1 = 2014$, $x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$ pro přirozená $n \geq 2$. Spočítejte součin $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{10}$.

   Řešení 5 3840

6. V prvním kroku rozdělíme vodorovnou úsečku délky 3^{14} v poměru 1 : 2. V každém dalším kroku rozdělíme všechny nově vzniklé úsečky v poměru 1 : 2. Jaká bude délka 2015. dílku zleva po 14 krocích? Dělením úsečky v poměru 1 : 2 rozumíme její rozdělení na dva kousky, z nichž ten pravý je dvakrát delší než ten levý.

   Řešení 6 512

   Pozorováním pro malé počty kroků si všimneme, že délky dílků vykazují určitou pravidelnost. Jde vlastně o binární strom, kde v levé větvi je vždy násobení 1/3 a v pravé větvi násobení 2/3. Pro určení délky 2015. dílku nám tedy stačí určit, jak vypadá číslo 2014 zapsané v binární soustavě pomocí 14 cifer. $(2014)_{10} = (00001111101111)_2$, to znamená, že výsledek je $3^{14} \cdot \frac{1}{3^5} \cdot \frac{2^9}{3^9} = 512$.

7. Určete součet všech různých hodnot, kterých může nabývat výraz $\sum_{i=1}^{2014} \sum_{j=1}^{2014} (-1)^{x_i + x_j}$, pokud $x_1, x_2 \dots, x_{2014}$ jsou přirozená čísla.

   Řešení 7 1363558560

   Vidíme, že záleží pouze na počtu lichých čísel mezi $x_1, \dots, x_{2014}$, seřadíme si je tedy tak, abychom měli nejprve všechny liché (řekněme k), poté všechny sudé. Uvážíme tabulku 2014×2014, kde v i-tém řádku, j-tém sloupci bude hodnota $(-1)^{x_i + x_j}$. Zřejmě půjde o tabulku typu

   $$\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}$$

   a součet je tedy $k^2 - 2k(2014 - k) + (2014 - k^2) = (2k - 2014)^2$, přičemž různých hodnot nabývá pro $0 \leq k \leq 1007$, celkem tedy jde o čtyřnásobek součtu všech druhých mocnin čísel 0 až 1007, což je 1363558560.

8. Každým mřížovým bodem roviny (tedy bodem, jehož obě souřadnice jsou celočíselné) kromě bodu $[0,0]$ veďme kolmici ke spojnici s bodem $[0,0]$. Kolmice rozdělí rovinu na oblasti ohraničené částmi těchto kolmic. Potom do každé oblasti vepíšeme jedno číslo následujícím způsobem. Napišme do oblasti obsahující bod $[0,0]$ číslo 1. Dále do každé oblasti sousedící stranou s oblastí s číslem 1 napíšeme číslo 2, do oblastí sousedících s číslem 2 napíšeme číslo 3 atd. Určete celkový obsah všech oblastí s číslem 6.

   Řešení 8 4

   Nakreslíme si situaci pro prvních několik oblastí kolem počátku (nejlépe na počítači nebo na čtverečkovaný papír. Všimneme si, že druhá oblast lze beze zbytku přeskládat do první a to stejné platí i pro třetí. Odhadneme tedy, že výsledek bude stejný i pro oblast s čísly 6. Oblast s číslem 1 má obsah 4. Tyto oblasti se nazývají Brillouinovy zóny a mají hluboké využití ve fyzice krystalových struktur.

9. Jaké je největší k takové, že 2014 lze zapsat jako součet k po sobě jdoucích přirozených čísel?

   Řešení 9 53

10. Pro která přirozená čísla n, $1 < n < 2014$ mají čísla $\frac{n}{n-1}$, $\frac{n}{n+1}$ ukončený desetinný rozvoj? Zadejte součin všech takových n.

    Řešení 10 27

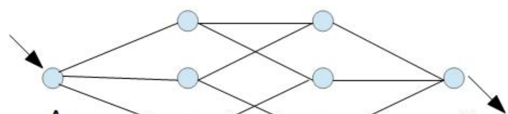
    Ukončený desetinný rozvoj mají právě ty zlomky v základním tvaru, jejichž jmenovatel je dělitel deseti. Oba zlomky v zadání jsou zřejmě v základním tvaru. Navíc zřejmě nikdy nemohou oba jejich jmenovatele být násobky pěti. Zřejmě nejspolehlivější cesta dále je přes vyšetření mocnin 2 menších než 2014 a zkoumáním, zda čísla o dva menší nebo o dva větší jsou součinem mocniny dvou a mocniny pěti. (krom případu (2,4) to znamená, že musí končit nulou). Najdeme jen dvě takové dvojice (2,4) a (8,10) odpovídající hodnotám $n = 3$ a $n = 9$. Výsledek je tedy 27.

11. Nechť M je přirozené číslo, které vznikne zapsáním přirozeného čísla m v desítkové soustavě dvakrát za sebe, $M = \overline{mm}$. Hodnota $k = \frac{M}{m^2}$ je přirozené číslo. Jaké nejmenší hodnoty může nabývat číslo k?

    Řešení 11 7

    Číslo M lze zapsat také jako $(10^n + 1)m$, kde n je počet cifer čísla m. Platí tedy $k = (10^n + 1)/m$ a tedy také $m = (10^n + 1)/k$. Pro $m = 1$ dostaneme $k = 11$, dál pro $m > 1$ je $k < 10$ neboť m je n-ciferné číslo. Snadno vyloučíme pro k hodnoty 1,2,3,5 a jejich násobky. Zbývá hodnota 7, kterou získáme například volbou $m = 143$.

12. Kolika způsoby se lze po čarách na obrázku dostat z bodu A do bodu B, jestliže každou čarou projdeme nejvýše jednou, ale každý vrchol můžeme navštívit vícekrát?



Řešení 12 48

13. Pro kolik permutací $(q_1, \ldots, q_{11})$ čísel $1, \ldots, 11$ nabývá součet

$$|q_1 - 1| + |q_2 - 2| + \cdots + |q_{11} - 11|$$

maximální hodnoty?

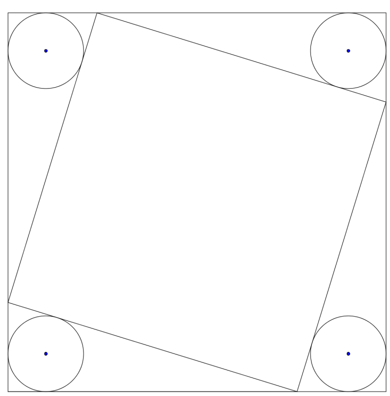
Řešení 13 158400

Prozkoumáme, co se stane se součtem $|k-i|+|l-(n+1-i)|$, jestliže prohodíme k a l. Posloupností jednoduchých úvah a rozborem možností zjistíme, že tento součet bude stejný, právě když k i l budou obě větší nebo obě menší než $\frac{n+1}{2}$. Můžeme tedy libovolně prohazovat čísla $1, \ldots, 6$ mezi sebou a podobně čísla $7, \ldots, 11$ nebo můžeme prohazovat čísla $1, \ldots, 5$ a čísla $6, \ldots, 11$. To nám dává $2 \cdot 5! \cdot 6!$ možností, ale započítali jsme dvakrát ty permutace, které nechávají číslo 6 na místě. Těch je $5! \cdot 5!$, takže celkem pouze $11 \cdot 5! \cdot 5! = 158400$.

14. Nechť $ABCD$ je čtverec o straně délky 1 a uvnitř něj je kružnice k o poloměru $\frac{1}{10}$ dotýkající se dvou jeho stran. Buď $KLMN$ čtverec s vrcholy na stranách čtverce $ABCD$, který se dotýká kružnice k právě v jednom bodě. Jaký je maximální obsah čtverce $KLMN$?

Řešení 14 0.64

Postup je zřejmý z obrázku. Pro poloměr kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku platí $r = \frac{a+b-c}{2}$, kde a, b jsou odvěsny a c přepona. Označíme-li jednu z odvěsen a, druhá bude $b = 1 - a$ a přepona $c = \sqrt{2a^2 - 2a + 1}$. Pak obsah vyjádříme jako $c^2 = (2r - a - b)^2 = (1/5 - a - 1 + a)^2 = 16/25 = 0.64$.



15. Určete počet všech deseticiferných přirozených čísel s ciferným součtem 9.

Řešení 15 24310

Číslo 9 rozdeľujeme do desiatich cifier, pričom prvá cifra musí byť nenulová. Toto môžeme jednoducho riešiť pomocou kombinácií s opakovaním. Výsledok je $\binom{9-1+10-1}{10-1} = 24310$.

16. Kolik z prvních 2000 přirozených čísel lze zapsat ve tvaru $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor$, kde $x \in \mathbb{R}$? ($\lfloor x \rfloor$ značí nejvyšší celé číslo, nepřesahující 4).

Řešení 16 1200

17. Cecílie má 2014 sourozenců a právě dostala dort, který lze neomezeně dělit. V rodině platí pravidlo, že kdykoli jeden ze sourozenců dostane něco k snědku, sní jednu 2015-tinu a zbytek rovným dílem rozdělí mezi ostatní sourozence. Ti si počínají stejně a pochoutka se dělí až do nekonečna. Jakou část dortu sní celkem Cecílie? Výsledek zadejte jako zlomek v základním tvaru (např. „3/11“, bez uvozovek)

Řešení 17 1/1008

Označme A podiel torty, ktorý dostane Cecília a B podiel, ktorý dostane ktorýkoľvek ďalší súrodenec (zrejme tieto budú rovnaké). Predpokladajme, že Cecília dá každému súrodencovi množstvo X torty a spočítajme hodnotu B.
Každý súrodenec si nechá $\frac{1}{2015}X$ a zvyšok rozdá.
Každý súrodenec teda dostane naspäť celkom $\frac{2013}{2015}X$.
Cecília dostane $\frac{2014}{2015}X$, toto rozdelí na 2015-tiny a podelí sa s ostanými.
Tým pádom každý Cecíliin súrodenec práve dostal $\frac{2013}{2015}X + \frac{2014}{2015^2}X$ a proces sa opakuje. Máme teda:

$$\begin{aligned} B &= X\frac{1}{2015} + \Big(\frac{2013}{2015} + \frac{2014}{2015^2}\Big)X\frac{1}{2015} + \Big(\frac{2013}{2015} + \frac{2014}{2015^2}\Big)^2 X\frac{1}{2015} + \cdots = \\ &= X\frac{1}{2015}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{2013}{2015} + \frac{2014}{2015^2}\Big)^k = X\frac{2015}{2016} \end{aligned}$$

Za X dosadíme $\frac{1}{2015}$ a dostávame $B = \frac{1}{2016}$. Z rovnice

$$A + 2014B = 1$$

dostávame $A = \frac{1}{1008}$.

18. Jsou dána přirozená čísla $a < b < c < d$ pro která platí, že a, b, c jsou po sobě jdoucí prvky aritmetické posloupnosti a čísla b, c, d jsou po sobě jdoucí prvky geometrické posloupnosti. Za předpokladu, že $d - a = 30$ určete součet $a + b + c + d$.

Řešení 18 129

Diferenci aritmetické posloupnosti označme Δ. Pak $b = a + \Delta$, $c = a + 2\Delta$ a $d = c \cdot (c/b) = \frac{(a+2\Delta)^2}{a+\Delta}$. Dále platí $a + 30 = d$, což po dosazení a vyjádření a dává $a = \frac{\Delta(30-4\Delta)}{3(\Delta-10)}$. Ihned vidíme, že aby a bylo kladné celé číslo, musí být Δ dělitelné třemi a navíc $7 < \Delta < 10$, což dává jedinou možnost $\Delta = 9$, která dává $a = 18, b = 27, c = 36, d = 48$ a tedy $a + b + c + d = 129$.

19. Funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se nazývá *prapodivně multiplikativní*, pokud platí $f(2a + b) = f(a) \cdot f(b)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$. Kolik existuje prapodivně multiplikativních funkcí takových, že $f(2014)$ je druhou mocninou přirozeného čísla? (Nula není přirozené číslo.)

Řešení 19 1

20. M je podmnožina množiny přirozených čísel taková, že pro všechna $a, b \in M$ platí $|a^2b - b^2a| < 2014$. Kolik nejvýše prvků může M mít?

Řešení 20 20

21. Kolika způsoby lze vydláždit obdélník 3×10 dominovými kostkami 1×2?

Řešení 21 571

22. Určete počet uspořádaných dvojic celých čísel (x, y), která splňují $\frac{xy}{x+y} = 2014^{2014}$.

Řešení 22 130804232777

Upravíme rovnici do tvaru $(2014^{2014} - x)(2014^{2014} - y) = 2^{4028} \cdot 19^{4028} \cdot 53^{4028}$. Každému děliteli (uvažujeme i záporné dělitele) čísla vpravo lze jednoznačně přiřadit dvojice celých čísel (x, y), která je řešením. Naopak každé řešení má zřejmě tuto vlastnost. Navíc musíme vyloučit dvojici $(0, 0)$, kvůli případnému dělení nulou. Řešení je tedy o jedna méně než dělitelů čísla v pravo, tedy $2 \cdot 4029^3 - 1 = 130804232777$.

23. Uvažujme množinu $A_{1429} = \{\frac{1}{n} | \ n = 1, \ldots, 1429\}$. Množinu A_k získame z množiny A_{k+1} tak, že její dva najmenší prvky a, b nahradíme prvkem $a + b + ab$. Určete prvek množiny A_1.

Řešení 23 1429

Všimnime si, že platí $a + b + ab = (a + 1)(b + 1) - 1$. Jednoduchou úvahou je možné nahliadnuť, že prvok množiny A_1 má teda tvar $\prod_{k=1}^{1429} \left(\frac{1}{k} + 1\right) - 1 = \prod_{k=1}^{1429} \left(\frac{k+1}{k}\right) - 1 = 1429$. Rozmyslite si aj súvislosť s úlohou 36.

24. Kolika způsoby lze zapsat 2014 jako součet pěti přirozených čísel (s ohledem na pořadí sčítanců)?

Řešení 24 682132336215

Použitím přihrádkového principu zjistíme, že možností je $\binom{2014-5+4}{4} = 682132336215$.

25. Kolik podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, 10\}$ neobsahuje dvě po sobě jdoucí čísla?

Řešení 25 144

Počet takových podmnožin množiny $\{1, \ldots, n\}$ označme jako a_n. Pak zřejmě $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (členy odpovídají podmnožinám neobsahujícím n a obsahujícím n), což je předpis pro Fibonnaciho posloupnost. Navíc $a_1 = 2$ a $a_2 = 3$ (nesmíme zapomenout na prázdnou množinu), tedy $a_10 = 144$.

26. Jaký je maximální obsah stínu, který může vrhat kvádr o rozměrech $44 \times 117 \times 240$ na vodorovnou podložku, jestliže je osvětlován sluncem kolmo k podložce? (Neceločíselné výsledky zaokrouhlete na celé číslo.)

Řešení 26 30438

Všimneme si, že obsah stínu je vždy dvojnásobek obsahu stínu trojúhelníku tvořeného stěnovými úhlopříčkami. Promítneme-li kolmo na něj, získáme, že maximální obsah stínu je dvojnásobek obsahu trojúhelníku o stranách 125, 244 a 267, tedy celkem asi 30438.

27. Dva kruhy jsou umístěny uvnitř čtverce o straně 1 tak, aby se nepřekrývaly (mohou se dotýkat). Jaký je maximální součet jejich poloměrů (zaokrouhlen na pět desetinných míst)?

Řešení 27 0.58579

Užitím Pythagorovy věty zjistíme, že součet je konstantní a roven $2 - \sqrt{2} \doteq 0.58579$.

28. Koumova kalkulačka má devítimístný displej a tlačítka uspořádaná do mřížky 789/456/123 (bohužel nemá tlačítko 0). Kouma vyrábí devíticiferná přirozená čísla tak, že každé dvě po sobě jdoucí cifry přísluší dvěma různým sousedním tlačítkům (přes hranu, nikoliv přes vrchol) na kalkulačce. Kolik různých čísel může Kouma vyrobit?

Řešení 28 34816

Nazvěme cifry 1,3,7,9 modré, cifry 2,4,6,8 zelené a cifru 5 hnědou. Dále nechť počet n-ciferných čísel vzniklých Koumovým mačkáním a končící modrou cifrou je m_n, zelenou cifrou z_n a hnědou cifrou h_n. Snadno odhalíme, že $m_n = 2z_{n-1}$, $z_n = 2m_{n-1} + h_{n-1}$ a $h_n = z_{n-1}$ s počátečními podmínkami $m_1 = 4$, $z_1 = 4$, $h_1 = 1$. Zadáme $m_9 + z_9 + h_9 = 34816$.

29. Kouma chce obarvit vrcholy svého dvacetistěnu třemi barvami. Obarvení jednoho vrcholu zlatou barvou vyjde na 3 koruny, modrou barvou to stojí 2 koruny a hnědou pouze 1 korunu. Kouma by rád za barvu utratil co možná nejméně, ale potřebuje, aby libovolná rovina procházející alespoň čtyřmi vrcholy dvacetistěnu obsahovala dva vrcholy lišící se svou barvou. Kolik ho to bude nejméně stát?

Řešení 29 17

30. Pilný řešitel BRKOSu získá za každou ze šesti sérii osm náhodných ale různých hracích karet Kabrňáků. Kolik karet bude pilnému řešiteli průměrně chybět na konci šesté série, jestliže existuje celkem 48 různých hracích karet? Výsledek zaokrouhlete na celá čísla.

Řešení 30 16

Nechť má řešitel m karet. BÚNO prvních m. Průměrných osm došlých karet je rovnoměrně rozděleno mezi 48 existujících. To znamená, že řešitel bude mít po příchodu osmi karet průměrně $m + 8 - 8m/48 = 5m/6+8$ karet. Po šesté sadě tedy $(5/6(5/6(5/6(5/6(5/6(5/6\cdot 0+8)+8)+8)+8)+8)+8 \doteq 32$ karet.

31. Na tabuli je napsáno trojciferné číslo. Postupně k němu zprava připisujeme další číslice. Když připíšeme první tak je součet cifer čísla na tabuli 17, když připíšeme další, tak je součin cifer na tabuli 1200. Když připíšeme třetí, tak je součet 24. Výsledné šesticiferné číslo je palindrom. O jaké šesticiferné číslo jde?

    Řešení 31 345543

32. ABC je trojúhelník o obsahu 21, T je jeho těžiště. Jsou definovány následující posloupnosti bodů: K_n je střed AM_{n-1}, L_n je střed BK_n, M_n je střed CL_n pro $n > 1$ a $M_0 = T$. K jaké hodnotě se blíží obsah trojúhelníku $K_nL_nM_n$ pro n rostoucí nade všechny meze?

    Řešení 32 3

    Všimneme si, že trojúhelník $K_nL_nM_n$ se velmi rychle přiblíží trojúhelníku, který vznikne, jestliže spojíme vrcholy A, B, C se třetinami protějších stran. Ten má obsah 7, jak lze snadno poznat například vyzkoušením pro trojúhelník o vrcholech $A = [0, 0], B = [14, 1], C = [0, 3]$, kde vyjde $K_\infty = [2, 1], L_\infty = [8, 1], M_\infty = [4, 2]$.

33. Mějme funkci $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Přitom máme značení

    $$f^n(x) = \underbrace{f(\ldots(f}_{n}(x)).$$

    Tedy např. $f^2(x) = f(f(x))$. Spočítejte, čemu se rovná

    $$c = f(35) \cdot f^2(35) \cdot f^3(35) \cdot \dots \cdot f^{10}(35)$$

    a výsledek zadejte jako zlomek v základním tvaru (např. „13/28“, bez uvozovek).

    Řešení 33 1/2014

34. Družice má tvar krychle o straně 300. V každém z osmi vrcholů družice bydlí jeden astronaut. Jeden z nich, Matulín, chce postupně navštívit všech 7 svých kolegů, každého právě jednou, přičemž s návratem domů nepočítá. Přitom mezi dvěma vrcholy smí jít pouze nejkratší cestou po povrchu (je-li těchto cest více, smí si svobodně vybrat). Svou trasu nechce nikdy protnout. (tj. žádným bodem neprojde více než jednou). Určete, jakou nejdelší vzdálenost může Matulín ujít. Výsledek zaokrouhlete na jednotky.

    Řešení 34 3956

35. Bubla má čtyřstěn o straně 1000. Opíše a mu kouli K a vepíše mu kouli k. Kouli K opíše krychli a této krychli opíše kouli L. Kouli k vepíše osmistěn a jemu vepíše kouli l. Určete součet poloměrů všech koulí l, k, K, L a zaokrouhlete jej na celé číslo.

    Řešení 35 1995

    Snadno odvodíme poměr velikostí poloměrů kružnice opsané a vepsané studovaným třem Platonským tělesům (například užitím Pythagorovy věty) a vyjde nám při značení ze zadání, že

    $$\frac{L}{K} = \sqrt{3}, \frac{K}{k} = 3, \frac{k}{l} = \sqrt{3}.$$

    Navíc $K = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot 1000$. Přímočarým výpočtem dojdeme k závěru: $a + b + c + d = 1000 \cdot \frac{2\sqrt{6}+5\sqrt{2}}{6} = 1995, 0\ldots$

36. Pro každou neprázdnou podmnožinu množiny $\{1, 2, \ldots, 2014\}$ uvažme součin převrácených hodnot jejich prvků a všech $2^{2014} - 1$ výsledků sečteme. Výsledek je?

Řešení 36 2014

Vyjádříme součet S_n pro množinu $\{1, \ldots, n\}$ pomocí S_{n-1} jako $S_n = S_{n-1} + S_{n-1}/n + 1/n$ a pak už snadno uvidíme, že $S_n = n$, tedy výsledek je 2014.

37. Uvažujme opět družici tvaru krychle. Dva astronauti se nachází v protilehlých vrcholech krychle a v každém kroku se přesunou po hraně na náhodný sousední vrchol, nesmí však oba projít v jednom kroku toutéž hranou. Jaká je pravděpodobnost, že po 4 krocích se oba vrátí tam, kde začali? (Odpověď zadejte s přesností na pět desetinných míst.)

Řešení 37 0.07708

Krychli označme standardně $ABCDEFGH$, přičemž astronauti začínají v bodech A a G. Dále obarvíme A, C, F, H černě, ostatní bíle a vidíme, že v každém kroku mají oba astronauti opačné barvy. Dvojice černý vrchol - bílý vrchol nám tedy jednoznačně identifikuje stav. Rozdělme si stavy do pěti množin $K = \{AG\}, L = \{AB, AD, AE\}, M = \{CB, CD, FB, FE, HE, HD\}, N = \{CG, FG, HG\}, O = \{CE, FD, HB\}$. Všechny stavy v každé z těchto množin jsou, co se pravděpodobností týče, ekvivalentní pro popis problému vůči stavu AG, stačí nám tedy najít pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými množinami (jednoduchým výčtem všech možností pro jeden stav z každé množiny). Dále si buď pravděpodobnosti zakreslíme do orientovaného grafu o pěti vrcholech a projdeme všechny možnosti, jak se po čtyřech krocích dostat ze stavu K opět do stavu K, nebo si napíšeme pravděpodobnosti do matice, kterou poté stačí umocnit na čtvrtou a z prvku na první pozici vidíme, že pravděpodobnost je asi 0.07708.

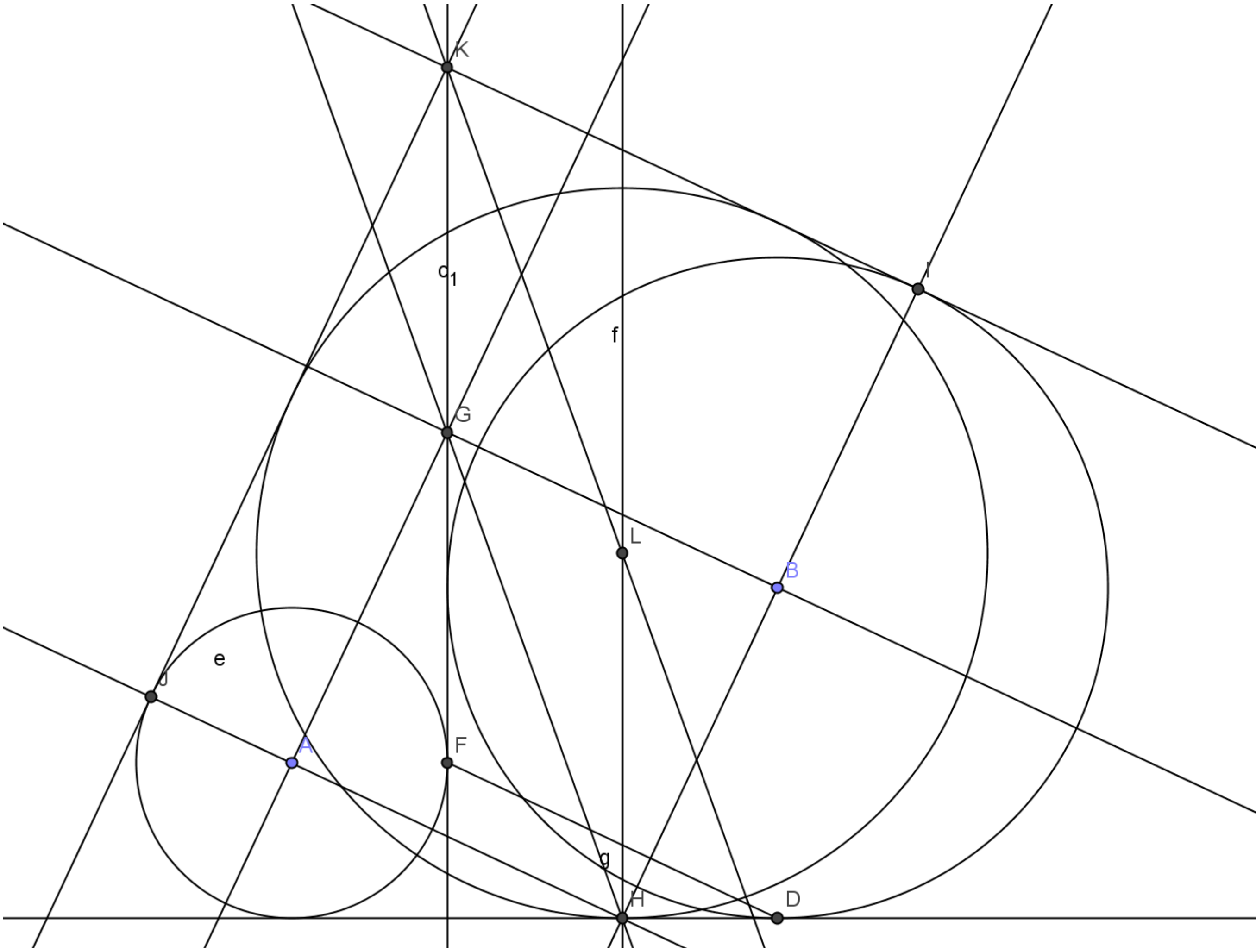
38. Přirozené číslo n nazveme *fakt nanicovaté*, jestliže existuje přirozené číslo m takové, že $m!$ končí právě n nulami. Kolik čísel menších než 2014 je fakt nanicovatých?

Řešení 38 1613

39. Ňouma našel trojúhelník ABC, $|AB| = 6$ s patou výšky proti vrcholu C označenou jako C_0. Označil si poloměr kružnice vepsané ABC jako r, poloměr kružnice vepsané AC_0C jako t a poloměr kružnice vepsané ABC_0 jako s. Zjistil, že $r = 1$ a $r + t + s = |CC_0|$. Jaká je velikost úhlu ACB? Výsledek zadejte ve stupních zaokrouhlen na celá čísla.

Řešení 39 90

V zadání je mnoho redundantních informací. Vyjdeme z toho, že $r + t + s = |CC_0|$. Následující obrázek dává představu o tom, jak by se dokázalo, že poté už musí být úhel ACB pravý.



40. Liběnka má cifry 1 až 9 (každou jednou) a vytvoří z nich dvě čísla a, b, $a < b$ s největším možným součinem. Pak je napíše za sebe a vznikne jí číslo $c = \overline{ab}$, které obsahuje každou nenulovou cifru právě jednou. Kolik je c?

Řešení 40 964287531

Kdykoliv máme dvě čísla a chceme nakonec některého připsat cifru, větší součin dostaneme, přípíšeme-li ji k menšímu z nich. Výsledek tedy sestrojíme posloupností ideálních kroků a získáme čísla 9642 a 87531.

41. Pro kolik přirozených čísel $n < 2014$ je $\lfloor \log_2(n) \rfloor$ liché přirozené číslo?

Řešení 41 682

42. Napište čemu se rovná $T_{(2,3,5,7)}(5^{2048} - 1)$, kde $T_{(a_1,\dots,a_n)}(x)$ je Tomův řetězec dělitelnosti pro $x, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. $T_{(a_1,\dots,a_n)}(x) = \overline{\underbrace{a_1 \dots a_1}_{k_1}\underbrace{a_2 \dots a_2}_{k_2} \dots \underbrace{a_n \dots a_n}_{k_n}}$, kde $k_i = \max\{k \in \mathbb{N};\, a_i^k \mid x\}$.

Pokud $\forall k_i = 0$, pak $T_{(a_1,\dots,a_n)}(x) = 0$. $\overline{\cdot}$ značí konkatenaci, neboli zřetězení; zřetězení 123 a 456 je 123456.

Řešení 42 22222222222223

43. Henry má rostoucí funkci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která splňuje $f(f(n)) = 3n$. Určete $f(2014)$.

Řešení 43 3855

Snadno nahlédneme, že $f(3^k) = 2 \cdot 3^k$ a $f(2 \cdot 3^k) = 3^{k+1}$. (Dokážeme např. matematickou indukcí.) Dále jelikož f má být rostoucí a mezi 3^k a $2 \cdot 3^k$ je $3^k - 1$ hodnot a mezi $f(3^k) = 2 \cdot 3^k$ a $f(2 \cdot 3^k) = 3^{k+1}$ je také $3^k - 1$ hodnot, musí v tomto rozmezí funkce růst pouze o jedničku. Tedy $f(3^k + i) = 2 \cdot 3^k + i$ pro $0 \leq i < 3^k$. Pak tedy $f(2014) = f(2 \cdot 3^6 + 556) = f(f(3^6 + 556)) = 3 \cdot (3^6 + 556) = 3855$.

44. Kolik existuje trojúhelníků s celočíselnými délkami stran, jejichž obsah je číselně roven jejich obvodu? (Trojúhelníky o stranách a, b, c a c, b, a považujeme za stejné.)

Řešení 44 5

Užitím Heronova vzorce získáme po úpravě $(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) = 16(a + b + c)$. Tři členy na levé straně dávají všechny stejný zbytek po dělení dvěma, jsou tedy všechny sudé. Je tedy korektní položit $-a+b+c = 2x, a-b+c = 2y, a+b-c = 2z$ a s využitím trojúhelníkové nerovnosti řešit $xyz = 4(x + y + z)$ pro kladná celá x, y, z (BÚNO $z \geq y \geq x$). Upravíme do tvaru $z = \frac{4(x+y)}{xy-4}$, a jelikož $4 < xy < 12$ zbývá vyšetřit několik málo případů, které nám dají celkem pět řešení.

45. Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že úsečky délky $1, 2, \ldots, n$ lze v tomto pořadí skládat za sebe do prostoru tak, aby vytvořily uzavřenou lomenou čáru takovou, že každá trojice sousedních úseček tvořící lomenou čáru, jsou po dvou navzájem kolmé úsečky.

Řešení 45 12

Úsečky $1, 4, 7, 10, \ldots$ budou ve směru x, $2, 5, 8, 11, \ldots$ ve směru y a $3, 6, 9, 10, \ldots$ ve směru z. Hledáme nejmenší n pro které k mezi čísla z první skupiny, druhé i třetí půjdou napsat plusy a minusy tak, aby v každé skupině vyšlo 0. Snadno nahlédneme, že nejnižší takové n je 12.