# Mathrace Sada 1

**odevzdávejte do 17.00**

1. Vyřešte rovnici $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + ... = 1$ pro $|x| < 1$. Zadejte součet všech řešení zaokrouhlený na pět desetinných míst.

   **Řešení 1** $0,38197$

2. Jaký je obsah pravidelného 2013-úhelníka s *obvodem* 2013? Zaokrouhlete na celá čísla.

   **Řešení 2** 322461

3. Polynom $P(x)$ je čtvrtého stupně a splňuje $P(1) = 2P(2) = 3P(3) = 4P(4) = 5P(5) = 2013$. Určete $P(6)$.

   **Řešení 3** 671

4. Konalo se matematické soustředění. Nebylo tam více než 500 účastníku. Všichni měli rádi matematiku, ale někteří měli ještě rádi fyziku nebo informatiku. Počet všech účastníku byl rovný faktoriálu z počtu lidí, kteří měli rádi všechno. Počet účastníků, kteří měli rádi fyziku, šel vyjádřit jako druhá mocnina přirozeného čísla. Počet účastníků mající rádi informatiku šel vyjádřit jako přirozená mocnina dvou. Počet lidí, kteří měli rádi pouze matematiku bylo 9. Do výsledku zadejte součin počtu lidí, kteří měli rádi fyziku, ale už ne informatiku, a počtu lidí, kteří měli rádi informatiku, ale už ne fyziku.

   **Řešení 4** *1045*

5. Do tabulky $2013 \times 2013$ jsou po řádcích napsána čísla 1, 2, ..., $2013^2$. Určete počet dvojic sousedních čtverečků takových, že čísla v nich napsaná jsou soudělná.

   **Řešení 5** *1635756*

6. Tři nové operace $\diamond$, $\bullet$ a $\odot$ si zavedeme tímto způsobem: $\diamond(a, b) = 0,5(cos(a + b))^2$, $a \bullet b = a(sin(\frac{a}{b} + 1))^2$, $a \odot b = 2a + b$ Vyřešte rovnici:

   $$\left(x^2 \left(\diamond \left(\frac{x}{\pi}, 1\right)\right)\right) \odot (x(x \bullet \pi)) = 4$$

   Pokud má rovnice více řešení, zapište pouze to nejmenší.

   **Řešení 6** *-2*

7. Přirozená čísla $a, b$ splňují $a^6 - b^6 = 3367$. Určete $ab$.

   **Řešení 7** *12*

8. Určete počet přirozených čísel nepřevyšujících milion, která mají právě 25 dělitelů.

   **Řešení 8** 7

9. Na tabuli je napsáno číslo 123456789. V jednom kroku můžeme smazat libovolnou číslici a nahradit ji číslicí o jedna menší (číslici 1 na první pozici nelze smazat). V kolika nejméně krocích můžeme získat číslo dělitelné číslem 101?

   **Řešení 9** 9

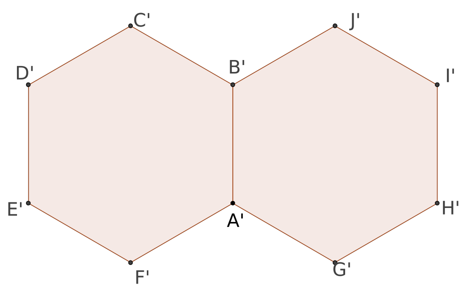
10. Hraje se poker ($4 \times 13$ karet): Kolika způsoby lze hráči rozdat pět karet, aby neměl v ruce více než tři karty jedné barvy?

**Řešení 10** *Počet všech možností, jak rozdat 5 karet z pokerového balíčku je* $\binom{52}{5}$. *Počet způsobů, jak vybrat 5 karet téže barvy je* $4 \cdot \binom{13}{5}$ *Počet těch rozdání, kdy vybereme právě čtyři karty je* $39 \cdot 4 \cdot \binom{13}{4}$. *(Čtyřmi způsoby vyberu barvu, která bude zastoupena čtyřikrát, pak vyberu 4 karty z 13 této barvy. Zbylou kartu mohu vybrat 39-ti způsoby.) Počet způsobů, jak vybrat od každé barvy nejvýše tři karty tedy je:*

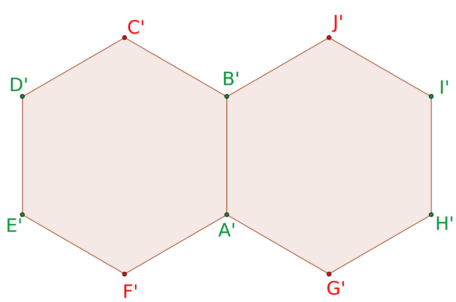
$$\binom{52}{5} - 4 \cdot \binom{13}{5} - 39 \cdot 4 \cdot \binom{13}{4} = 2482272.$$

11. Veselé náměstí má tvar dvou šestiúhelníků o straně 120, které jsou na sebe nalepeny jednou svou stranou. V každém z deseti vrcholů nekonvexního náměstí bydlí jeden člověk. Matulín chce postupně navštívit všech 9 svých sousedů, každého právě jednou, a vrátit se zpět domů. Přitom mezi dvěma vrcholy tohoto desetiúhelníka smí jít pouze přímo po úsečce. Navíc se smí pohybovat pouze uvnitř desetiúhelníku, nesmí tedy na cestě k některému ze sousedů projít bezprostředně kolem dveří nějakého dalšího souseda. Určete, jakou vzdálenost Matulín ujde, pokud chce ujít co nejdelší trasu. Výsledek zaokrouhlete na jednotky.

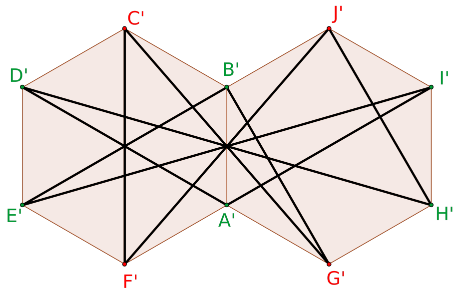
**Řešení 11** *Uvažme všechny možné spojnice dvojice vrcholů náměstí. Zřejmě jsou nejdelší spojnice* $IE$ *a* $HD$. *Protože Matulín nesmí na své přímé cestě k jednomu sousedovi jít kolem dveří jiného souseda, jsou spojnice délky* $|IF|$ *zakázány.*




*Není těžké si uvědomit, že druhá nejvyšší délka přípustné spojnice je* $|GC| = |JF|$ *a třetí nejvyšší přípustná délka je délka* $|AD|$, *tedy průměr šestiúhelníka. Na své cestě Matulín vždy projde deseti spojnicemi. Ukažme nyní, že použitím pouze spojnic typů nejdelší* ($|HD|$), *druhé* ($|GC|$) *a průměru* ($|AD|$) *nikdy nepřejdeme náměstí. Obarvěme si body tak, že* $C, F, G, J$ *budou červeně, ostatní zeleně:*




*Všechny tři nejdelší typy spojnic přitom zachovávají barvu. Pokud chce Matulín navštívit všechny body a vrátit se domů, bude muset alespoň dvakrát na své cestě změnit barvu. Přitom čtvrtá nejkratší spojnice, totiž typ* $|AC|$ *už barvu mění. Pokud se nám podaří použít obě nejdelší spojnice, obě druhé nejdelší, dvě spojnice typu* $|AC|$ *a čtyři průměry, tak jsme hotovi a jistě už procházka nejde prodloužit:*




*Tedy nejdelší možná délka Matulínovy trajektorie je*

$$2 \cdot |EI| + 2 \cdot |FJ| + 2 \cdot |BG| + 4 \cdot |CF|.$$

*Velikost průměru $CF$ je zřejmě $|CF| = 240$. Velikost úhlu $ABG$ je $\frac{\pi}{6}$. Tedy $\frac{|BG|}{2} = 120 \cdot \cos\frac{\pi}{6}$. Dostáváme*

$$|BG| = 240\frac{\sqrt{3}}{2} = 120\sqrt{3}.$$

*Dále z Pythagorovy věty v trojúhelníku $FJC$ dostáváme*

$$|FJ| = \sqrt{240^2 + (120\sqrt{3})^2} = 120\sqrt{7}.$$

*Nakonec z Pythagorovy věty v $EHI$ plyne:*

$$|EI| = \sqrt{120^2 + (240\sqrt{3})^2} = 120\sqrt{13}.$$

*Tedy délka Matulínovy trajektorie je:*

$$120(2 \cdot \sqrt{13} + 2 \cdot \sqrt{7} + 2 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot 2) \doteq 2876.$$

12. Máme hodiny bez vteřinové ručičky, přičemž nejsme schopni rozeznat minutovou ručičku od hodinové. Kolikrát za půl dne (od 0:00 do 11:59) nastane okamžik, kdy jedním pohledem (nebudeme studovat, jak se hýbou) nebudeme schopni určit, kolik je hodin? (Pro ilustraci: 11:29 ≅ 5:57 apod.)

**Řešení 12** *Nejprve si uvědomme, že poloha hodinové ručičky jednoznačně přiřazuje polohu ručičky minutové. To, zda jsou naše zvláštní hodiny nečitelné poznáme tak, že dávají smysl obě interpretace, tj. že když stávající minutovku $d_1$ překryjeme hodinovkou $k_2$, bude se nová minutovka $d_2$, jejíž poloha je generována polohou této nové hodinovky $k_2$, překrývat s původní hodinovkou $k_1$ příslušnou původní minutovce $d_1$.*

*Uvažme dvoje hodiny s hodinovou a minutovou ručičkou. Jedny jdou standardně, druhé jsou dvanáctkrát rychleji a jejich malá ručička ukazuje stále stejným směrem, jako velká ručička druhých hodin. Označme $k_1, d_1, k_2, d_2$ pořadě krátkou ručičku standardních hodin, krátkou ručičku zrychlených hodin, dlouhou ručičku standardních hodin a dlouhou ručičku zrychlených hodin. Platí, že $d_1$ se neustále překrývá s $k_2$.*

*Pokud se v nějakém čase nepřekrývají $k_1$ a $d_2$, znamená to (viz. první odstavec), že interpretace času by byla jednoznačná i v případě, že bychom neviděli délku jednotlivých ručiček. Nato, abychom nepoznali, kolik je hodin tedy nutně potřebujeme, aby se $k_1$ a $d_2$ překryly (což nastane od 0.00 do 11.59 $p$-krát). Ovšem to ale nestačí: Pokud se zároveň překryjí ručičky $k_1, d_2$ i s ručičkou $d_1 (= k_2)$, bude interpretace zřejmě jednoznačná, neboť se jedná o stav, kdy na našich prvních (standardních, normálně běžících) hodinách ukazují obě ručičky $k_1$ a $d_1$ stejným směrem. To v daném časovém intervalu nastane zřejmě 11-krát.*

*Je tedy celkem $p - 11$ stavů, kdy se překryje $k_1$ s $d_2$, ale $d_1 = k_2$ ukazují jiným směrem. V každém takovém stavu je interpretace času nejednoznačná, neboť můžeme zaměňovat $d_1$ za $k_2$ a $k_1$ za $d_2$ a oba, s ohledem na odečtení 11 různé, časy budou dávat smysl.*

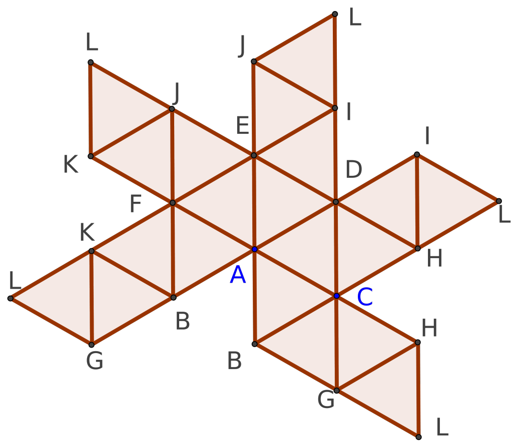
*Vzhledem k dokázání oboustranné inkluze existuje mezi počtem protnutí $k_1$ s $d_2$, kdy $k_2 = d_1$ ukazuje jinam a počtem všech stavů, kdy jsou možné obě interpretace času bijekce (skoro identita). Tudíž to, že nebudeme schopni poznat přesný čas z našich hodin se stejnými ručičkami nastane celkem $p - 11$ krát.*

*Nyní určeme $p$ : Kolikrát se v našem půldni protne ručička $d_2$, která běhá $12^2 = 144$-krát rychleji než ručička $k_1$ s ručičkou $k_1$? Rozmyslete si prosím sami, že je to $144 - 1$ krát.*

*Celkem se tedy jedná o $144 - 1 - 11 = 132$ stavů.*

13. Vakoši obývají planetu tvaru pravidelného dvacetistěnu o straně 1400. Chtěli by spojit severní a jižní pól co nejkratší cestou, ale neumí dělat tunely. Jaká je délka nejkratší možné cesty po povrchu planety? Výsledek zaokrouhlete na jednotky.

**Řešení 13** *Rozložením pláště dvacetistěnu do roviny dostaneme:*




*Přičemž délka nejkratší spojnice po povrchu z vrcholu $A$ do protilehlého vrcholu $L$ je rovna délce úsečky $AL$ v tomto rozvinutém plášti. Stačí tedy určit její délku, což plyne ihned např. z Pythagorovy věty v trojúhelníku $AL_0L$, kde $L_0$ je pata kolmice z bodu $L$ na přímku $AH$ :*

$|AL| = 1400 \cdot \sqrt{(\frac{5}{2})^2 + \cos^2 \frac{\pi}{6}} = 1400 \cdot \sqrt{7} \doteq 3704.$

14. Pětice řešitelů Adam, Bořivoj, Cyril, Dan a Evžen si rozděluje úlohy očíslované od jedné do pěti. Každý dostane jednu z nich, ale Adam nechce první ani třetí úlohu, Bořivoj nechce druhou ani čtvrtou úlohu, Cyril nechce třetí ani pátou úlohu, Dan si netroufá na první a čtvrtou úlohu a Evžen si nevěří ani se druhou, ani s pátou úlohou. Kolika způsoby si mohou úlohy rozdělit, aby byli všichni šťastní?

**Řešení 14** *13*

15. Které číslo od 1 do 2013 včetně má nejvíce dělitelů?

**Řešení 15** *1680*

**Mathrace Sada 2**

**odevzdávejte do 18.00**

16. Projděte následující pyramidu od horního patra (ve kterém je pouze číslo 1) postupně až úplně dolů, a to tak, aby součet čísel, na která vkročíte, byl co největší. Zároveň z jednoho čísla můžete postoupit pouze na jedno ze dvou čísel těsně pod ním. Tzn. v patře 2 3 můžete z čísla 2 pokračovat pouze na číslo 5 nebo 6, ale ne 9, stejně tak z čísla 3 pouze na čísla 6 nebo 9, ale ne 5. Jako výsledek zadejte výsledný součet.

1
2 3
5 6 9
3 5 9 8
1 4 5 6 3
2 3 6 8 7 0
3 9 8 7 5 3 6
2 5 6 9 2 7 4 3
6 4 5 2 3 6 5 1 2
3 4 5 5 8 8 7 3 2 1
4 8 6 2 3 6 5 4 5 8 7
1 7 6 6 9 8 7 2 0 1 4 3
6 8 5 9 7 2 3 5 4 3 6 4 7
2 6 5 4 9 8 7 0 1 2 3 5 4 3
2 5 4 7 8 9 6 3 2 1 4 5 3 5 4
5 6 4 7 8 9 6 5 4 1 2 3 5 7 9 8
3 2 5 6 8 7 4 2 3 0 1 5 2 3 5 4 6
2 5 4 7 8 9 6 2 7 5 6 5 3 2 1 4 7 3
2 1 3 6 5 6 8 7 9 3 1 4 4 2 3 4 5 8 7
2 3 5 4 7 8 9 6 5 4 1 2 3 4 5 6 7 8 2 3

**Řešení 16** *142*

17. Určete součet $(i, 2013)$ pro všechna $1 \leq i \leq 2013$ soudělná s 2013, kde $(a, b)$ značí největšího společného dělitele čísel $a, b$.

**Řešení 17** 11505

18. Vyřešte algebrogram $MATHRACE = BRKOS \cdot 2013$, přičemž písmena reprezentují cifry. každé písmeno reprezentuje jinou cifru, s výjimkou A, R, C a O, které zastupují tu stejnou cifru. Jako odpověď zadejte číslo $MATHRACE$.

**Řešení 18** *20750004*

19. Kolik je řešení magického šestiúhelníku (pravidelného), s ne nutně různými čísly od 1 do 13 ve vrcholech, středech stran a v těžišti, pokud platí, že součet čísel na spojnici dvou sousedních nebo protilehlých vrcholů je konstantní.

**Řešení 19** *2197*

20. Kolik je pěticiferných čísel dělitelných 11 složených z právě tří různých cifer?

**Řešení 20** *1461*

21. Posloupnost $a_n$ je pro přirozená n definována takto: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_k = a_{k-3} \cdot a_{k-2} \cdot a_{k-1} \pmod 7$ pro $k \geq 4$. Určete $a_{216!+4}$.

**Řešení 21** 6

22. Najděte $t \in \mathbb{R}$, pro které má rovnice $||x+t|-2|-3 = t$ právě tři řešení.

**Řešení 22** *-1*

23. Přirozené číslo $n$ je trojciferné a součet jeho cifer je 11. Zapíšeme-li číslice tohoto čísla v obráceném pořadí, tak dostaneme číslo, které je o 297 menší než číslo $n$. Pokud dělíme se zbytkem prostřední číslici čísla $n$ součtem jeho krajních číslic, dostaneme podíl 1 a zbytek taktéž 1. Zadejte číslo $n$.

**Řešení 23** 461

24. V místnosti je devět kusů smetí rozmístěných do mřížky $3 \times 3$. Roomba vysává smetí počínaje kterýmkoliv políčkem mřížky s následujícím omezením: Kdykoliv přejede přes smetí, vysaje ho. Smí se pohybovat v mřížce pouze vodorovně či svisle. Roomba nesmí žádné políčko navštívit dvakrát. Kolika způsoby může Roomba smetí vysát?

**Řešení 24** 40

25. Na zahrádce je vysázeno hlávkové zelí a to tak, že v každém bodě o celočíselných souřadnicích je jedna hlávka. Matěj některé hlávky oplotil a to tak, že celkem použil šest sloupků, které umístil místo některých šesti hlávek zelí. Vytvořil tak šestiúhelník s vrcholy v bodech o celočíselných souřadnicích, který obepínal dohromady osm hlávek zelí. Plot neprochází přes zelí. Jaký je obsah oploceného území, jestliže vzdálenost mezi dvěma sousedními hlávkami zelí je 1?

**Řešení 25** *10*

26. Určete absolutní hodnotu jmenovatele čísla $f_{2013}(2013)$ upraveného v základním tvaru, pokud platí $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$ pro $n \geq 1$ a $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$.

**Řešení 26** 2012

27. Na kolik nul končí počet nerostoucích posloupností délky 13 tvořených prvky z množiny $\{1, 2, \ldots, 2013\}$?

**Řešení 27** *2*

28. Určite zbytek po dělení polynomu $f(x^6)$ polynomem $f(x)$, pokud $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Zadejte součin všech nenulových koeficientů.

**Řešení 28** 6

29. Najděte funkci $f(x)$ definovanou na $\mathbb{R}$ splňující $(1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4$. Zadejte její funkční hodnotu v bodě 2013.

**Řešení 29** $-4052168$

30. Alfons si napsal zlomky ve tvaru $\frac{1}{4k+1}$ pro přirozené $k < 1000$. Kolik takových zlomků má ukončený desetinný rozvoj?

**Řešení 30** 5

31. Doplňte do křížovky čísla 1 – 9, tak aby platilo:

    Ve směru →
    A-Fibonacciho číslo
    C-Čtvrtá mocnina přirozeného čísla
    E-Číslo dělitelné číslem 11
    G-$1001001_2$ v 10 soustavě pozpátku
    I-Číslo s klesajícími velikostmi číslic (o jedna od začátku)
    K-Číslo dělitelné číslem 8
    N-Prvočíslo
    O-Číslo jehož cifry jsou různá prvočísla

    Ve směru ↓
    A-Největší trojciferný součet prvních po sobě jdoucích prvočísel
    B-Prvočíslo, jehož pořadí je součin jeho cifer
    D-Číslo s roustoucí velikostí číslic (o jedna od začátku)
    F-Číslo dělitelné číslem 9
    H-Číslo s průměrem cifer 7
    I-Prvočíslo s ciferným součtem 19
    J-8. prvočíslo
    L-Číslo dělitelné 5
    M-Fibonacciho číslo

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | | B | C | D |
| E | | | F | |
| G | H | I | | |
| J | K | | L | M |
| N | | O | | |

Jako řešení zadejte čísla na hlavní diagonále postupně z levého horního do pravého dolního rohu.

**Řešení 31** *94563*

32. 85-násobek součtu tří po sobě jdoucích přirozených čísel se rovná jejich součinu. Zadejte nejmenší číslo z nejmenší trojice čísel, která to splňuje.

**Řešení 32** *15*

33. Určete součin všech přirozených čísel $n$ takových, že existuje přirozené číslo $k$ tak, že $k$ pravidelných $n$-úhelníků lze naskládat do roviny kolem společného vrcholu, aniž by se $n$-úhelníky překrývaly či mezi nimi byly mezery.

**Řešení 33** 72

34. Ctibor dostal horečku. Aby se z ní vyléčil, vzal si tři přirozená čísla $a, b, c$, která měla součet $a+b+c = 38$ a spočítal $\frac{\sqrt[3]{a+b^2}}{c}$, což bylo také přirozené číslo. Zadejte součet součinů všech trojic, které to splňují.

**Řešení 34** *1014*

35. Máme tři poctivé kostky (čtyř-, šesti- a osmistěnnou) očíslované 1 až $n$, ze kterých se stejnou pravděpodobností vybereme jednu, s níž hodíme. Jaká je pravděpodobnost, že jsme házeli čtyřstěnnou, jestliže nám padla trojka? Výsledek zaokrouhlete na pět desetinných míst.

**Řešení 35** $\frac{6}{13} \doteq 0,46154$

36. Matěj s Liběnkou hrají tic-tac-toe (piškvorky $3 \times 3$). Kolik existuje různých rozmístění pěti křížků a čtyř koleček tak, aby nikdo z nich nevyhrál (neměl tři v řadě)? (Počítáme všechny rozmístění, bez ohledu na jejich symetrii.)

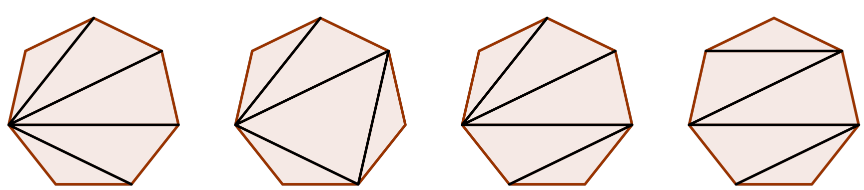
**Řešení 36** *16*

37. Určete, kolik existuje aritmetických posloupností délky $d$, kde $1 \leq d \leq 100$, jejichž prvky jsou čísla z množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$. (Aritmetická posloupnost je taková, ve které je rozdíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů konstantní.)

**Řešení 37** *52642*

38. Kolika způsoby lze v pravidelném sedmiúhelníku zvolit několik neprotínajících se úhlopříček tak, aby dělily tento sedmiúhelník spolu s jeho stranami na pět trojúhelníků? Dvě rozdělení považujeme za stejné, pokud se na sebe dají přenést rotací nebo i osovou symetrií.

**Řešení 38** *Systematicky vypíšeme všechny možné kombinace a vyřadíme ty, které jsou stejné. Dojdeme k těmto čtyřem:*



39. Kouma si myslí číslo. Když ho vynásobí dvěma a odečte jedna, a celou tuto proceduru zopakuje ještě 2013-krát, obdrží číslo $2^{2016} + 1$. Jaké číslo si Kouma myslí?

**Řešení 39** 5

40. Kouma si napsal na papír posloupnost dvaceti po sobě jdoucích přirozených čísel. Ňouma si z ní vybere nějaké číslo a oznámí Vám součet ostatních 19 čísel, který je 2013. Určete, které číslo si Ňouma vybral.

**Řešení 40** *97*

41. Kolikrát během dne je na digitálních hodinách podíl hodin a minut celé číslo? Číslo $0a$ přitom ztotožňujeme s číslem $a$.

**Řešení 41** *135*

42. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu jednou čtyřstěnnou, šestistěnnou a osmistěnnou kostkou padne součet 9? Výsledek zaokrouhlete na 5 desetinných míst.

**Řešení 42** $\frac{21}{192} \doteq 0,10938$

43. Určete nejmenší přirozené číslo n větší než jedna, pro které je výraz $\lceil(\sum_{k=2}^{n} k \cdot \log_{2^k}(\frac{k}{k-1}))\rceil$ dělitelný 10.

**Řešení 43** 513

44. Určete zbytek po dělení čísla $1^{2013} + 2^{2013} + \cdots + 2013^{2013}$ číslem 31.

**Řešení 44** *1*

45. Jste na potápějící se loďce a máte kýbl. Do loďky již natekl kýbl vody. Voda vtéká do loďky rychlostí půl kýblu za sekundu. V 1. sekundě vylijete kýbl vody, před vylitím dalšího kýble vody musíte si odpočinout tolik sekund, kolik jste již vylili kýblů. Za kolik sekund se loď potopí, jestli se do ní vejde 67 kýblů vody? V případě nepotopení loďky zadejte 0.

**Řešení 45** *170*