Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.40

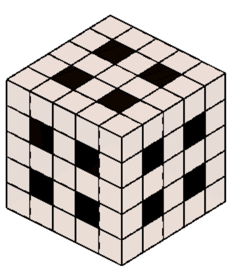
1. Vlado má dvoje digitální hodinky (oboje ukazují čas od 0 do 24h). Jedny se každou hodinu o tři minuty předbíhají, druhé se každou hodinu o dvě minuty zpožďují. Stejný čas ukazovaly dnes ve 12.00. Jaký čas na nich bude svítit, když budou příště ukazovat stejný čas? Čas zadejte jako posloupnost cifer, které budou na hodinkách, tedy např. 13 hodin, 7 minut a 9 sekund zapište jako 130709.

   Řešení Jedny hodinky urazí za hodinu 63 minut, druhé 58. Čas v hodinách, za který budou ukazovat opět stejně označíme x. Za tuto dobu se musí rychlejší oproti pomalejším předběhnout o $24 \cdot 60 = 1440$ minut, musí tedy platit $63x - 58x = 1440$, $x = 288$. Po 288 hodinách urazí druhé hodinky $58 \cdot 288 = 16704$ minut, což přesně odpovídá době 11 dní, 14 hodin a 24 minut. Tento čas bude vidět ve 2.24, odpověď je proto 022400.

2. Emu má ponožky sedmi barev, od každé dvacet párů. Pokud je po tmě loví ze zásuvky, kolik nejméně ponožek musí vytáhnout, aby měla od dvou různých barev po dvou párech?

   Řešení Nejhorší možná situace je ta, že před vytvořením druhého páru od druhé barvy má všech čtyřicet ponožek od jedné barvy a po třech ponožkách od všech ostatních, tedy celkem $40 + 3 \cdot 6 = 58$ ponožek. Vytažením 59. ponožky ale dvě dvojice párů vytvoří.

3. Mária slepila 125 kostiček do tvaru krychle, z níž následně odebrala čtyři řady kostek v každém směru (výsledný útvar je na obrázku a skládá se z 81 kostiček). Výsledný útvar ponoříme do barvy. Počet kostiček obarvených z jedné strany označíme a, počet kostiček obarvených ze dvou stran b, počet kostiček obarvených ze tří stran c a konečně počet kostiček obarvených ze čtyř stran d. Určete $a \cdot b \cdot c \cdot d$.

   Řešení Krychli rozdělíme na vrstvy. V horní vrstvě je jedna kostka obarvená z jedné strany, 4 kostky obarvené ze dvou stran, 4 ze tří a 12 ze čtyř stran. Ve druhé vrstvě je 9 kostek obarvených ze 4 stan. Ve třetí vrstvě čtyři kostky z jedné strany, 4 ze dvou a 12 ze čtyř. Čtvrtá a pátá vrstva jsou stejné jako druhá a první. Celkem tedy máme 6 kostek z jedné strany, 12 ze dvou stran, 8 ze tří stran a 54 ze čtyř stran. Výsledek je 31104.

4. Emu, Zbyněk a Mirek si zaparkovali koloběžky do stojanu. Víte, že

   - Zelená koloběžka je napravo od modré.
   - Mirkova koloběžka je hned vedle koloběžky s hliníkovými blatníky.
   - Mirkova koloběžka není uprostřed.
   - Emuina koloběžka je hned nalevo od modré.
   - Koloběžka s plastovými blatníky je nalevo od koloběžky s titanovými blatníky.
   - Oranžová koloběžka má větší kola než zelená.

Najděte rozmístění koloběžek. Odpověď zadejte jako posloupnost devíti písmen (bez čárek, tedy např. EMZMOZHPT), z nichž první tři zkracují jména majitelů (E,M,Z), další tři barvu koloběžky (M,O,Z), a poslední tři typ blatníků (H,P,T) ve směru zleva doprava.

Řešení Mirkova koloběžka není uprostřed, přitom je vedle koloběžky s hliníkovými blatníky – hliníkové blatníky jsou proto uprostřed. Z předposlední informace pak již plyne posloupnost blatníků: PHT. Jedna koloběžka je od modré nalevo, jiná napravo – modrá je proto uprostřed. Z první informace pak již máme posloupnost barev: OMZ. Posloupnost majitelů určíme snadno z informace o Emuiné koloběžce: EZM. Výsledek je tedy EZMOMZPHT.

5. Najděte čísla A, B, C, D taková, že součin jakýchkoli dvou z nich je dvojmístný, součin $A \cdot B$ má na místě desítek čtyřku, $C \cdot D$ pětku, $B \cdot D$ trojku, $A \cdot D$ šestku a součin $A \cdot C$ končí dvojkou. Jako odpověď zadejte $1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D$.

Řešení 9587

6. Michal si napsal čtyřciferné číslo, jehož všechny cifry jsou různé a větší než 3. Prozradil nám o něm, že

- S číslem 5847 má právě 3 stejné cifry, z toho právě dvě na stejných pozicích.
- S číslem 5648 má právě 3 stejné cifry, z toho právě dvě na stejných pozicích.
- S číslem 6479 má právě 2 stejné cifry, z toho žádnou na stejné pozici.
- S číslem 5647 má právě 3 stejné cifry, z toho všechny tři na stejných pozicích.

Najděte Michalovo číslo.

Řešení 5687

7. Máme trojciferné číslo. Když ho napíšeme obráceně, zvětší se o 396. Prostřední cifra tohoto čísla je ze všech jeho cifer největší a je rovna druhé mocnině jiné jeho cifry. Určete toto číslo.

Řešení Aby mohla být prostřední cifra druhou mocninou a současně největší, musí být rovna 4 nebo 9. Z první zadané věty ale plyne, že rozdíl mezi první a poslední cifrou je 4. Tedy poslední cifra je alespoň 5, prostřední proto musí být 9. Jedna ze zbylých cifer je pak 3, musí to být ta první (neboť poslední je o 4 větší než první). Poslední cifra je 7, hledané číslo je 397.

8. Vezmeme ciferný součet přirozeného čísla n, od něj odečteme ciferný součet přirozeného čísla $n + 2$ a z výsledku uděláme absolutní hodnotu. Kolik různých výsledků menších než 2012 můžeme získat?

Řešení Pokud n končí na cifry 0 až 7, liší se od něj $n+2$ pouze v poslední cifře, a to o 2. V takovém případě bude výsledek 2. Pokud n končí na 8 nebo 9, jimž předchází cifra $k < 9$, končí $n + 2$ na 0 nebo 1 předcházenou cifrou $k + 1$. V takovém případě bude výsledek 7. Konečně pokud n končí na 8 nebo 9, jimž předchází t devítek, bude výsledek $9t + 7$. V množině přirozených čísel menších než 2011 je jedna dvojka a 223 čísel tvaru $9t + 7$ (včetně sedmičky), výsledek je proto 224.

9. Mějme množinu přirozených čísel M takovou, že obsahuje číslo 2012. Průměr čísel v této množině je 2000, pokud z ní číslo 2012 odstraníme, sníží se průměr na 1999. Jaké největší číslo může množina obsahovat?

Poznámka: protože se jedná o množinu, jsou všechny její prvky různé.

Řešení Počet čísel v množině po odebrání čísla 2012 označíme n. Pro součet prvků původní množiny pak platí $(2012 + n \cdot 1999) = (n + 1) \cdot 2000$, tedy n je 12. Aby množina mohla obsahovat co největší číslo, musí být ostatní čísla co nejmenší. Největší číslo obsahuje množina

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 2012, 13 \cdot 2000 - 66 - 2012\}.$$

Hledaný výsledek je 23922.

10. Zbyňkovi je 24 let. Na absolventském večírku se Zbyněk zeptal svého profesora na věk. Dostalo se mu odpovědi: „Je mi třikrát více, než kolik bylo tobě, když jsem byl o čtyři roky mladší, než ty teď.“ Kolik let je profesorovi?

Řešení Věk profesora označíme x. V době, kdy byl profesor o čtyři roky mladší, než Zbyněk teď (tedy před $x - 20$ lety) bylo Zbyňkovi $24 - (x - 20) = 44 - x$. Profesorovi je tedy nyní $x = 3(44 - x)$, řešením rovnice $x = 33$.

11. Matěj vyrobil z plastelíny čtyři duté koule. Všechny mají tloušťku stěny 1 cm. Nejmenší z nich má vnější poloměr 8 cm, druhá nejmenší 10 cm. Objem plastelíny, který spotřeboval na největší a nejmenší kouli je roven objemu plastelíny potřebnému na sestrojení zbylých dvou. Navíc víte, že největší z nich má vnější poloměr o 1 cm větší, než druhá největší. Určete vnější poloměr největší koule.

Řešení Objem plastelíny potřebný k výrobě duté koule o vnějším poloměru r je roven $\frac{4}{3}\pi(3r^2 - 3r + 1)$. Pokud vnější poloměr největší koule označíme R, máme

$$\frac{4}{3}\pi(3R^2 - 3R + 1) + \frac{4}{3}\pi 169 = \frac{4}{3}\pi(3R^2 - 6R + 3 - 3R + 3 + 1) + \frac{4}{3}\pi 271,$$

Po zjednodušení $3R^2 - 3R + 1 + 169 = 3R^2 - 9R + 7 + 271$, odtud $R = 18$.

12. Víte, že

$$\left\lfloor r + \frac{19}{100} \right\rfloor + \left\lfloor r + \frac{20}{100} \right\rfloor + \left\lfloor r + \frac{21}{100} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor r + \frac{88}{100} \right\rfloor = 555.$$

Určete hodnotu $\lfloor 100r \rfloor$. Zde $\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo nepřesahující x.

Řešení Každý sčítanec je buď roven $\lfloor r \rfloor$ nebo $\lfloor r \rfloor + 1$, celkem je sčítanců 70. Pokud počet sčítanců rovných $\lfloor r \rfloor$ označíme a, máme $a\lfloor r \rfloor + (70 - a)(\lfloor r \rfloor + 1) = 555$, tedy $70\lfloor r \rfloor + 70 - a = 555$. Aby mohlo a být celé, musí být $a = 5$ a $\lfloor r \rfloor = 7$. Protože je právě prvních pět sčítanců rovno $\lfloor r \rfloor$, musí být desetinná část čísla r mezi $\frac{76}{100}$ a $\frac{77}{100}$, $\lfloor 100r \rfloor = 776$.

13. Pro kolik reálných čísel a má rovnice $x^2 + ax + 12a = 0$ pouze celočíselná řešení?

Řešení Víme, že $-a$ je rovno součtu kořenů, tedy musí být celé. Z rovnice vyjádříme $a = -\frac{x^2}{x+12} = -\frac{x^2-144+144}{x+12} = -(x - 12) - \frac{144}{x+12} = 24 - (x + 12) - \frac{144}{x+12}$. Aby toto bylo celé číslo, musí $x + 12$ dělit 144. V oboru celých čísel má $144 = 2^4 3^2$ celkem $(4 + 1) \cdot (2 + 1) = 15$ kladných a 15 záporných dělitelů. Dosazením těchto dělitelů dostaneme 16 různých hodnot a.

14. Petr si myslí číslo. Prozradil nám, že toto číslo je druhou mocninou celého čísla, je čtyřmístné, na třetím místě má nulu a jeho první cifra je rovna součtu zbylých cifer. Najděte Petrovo číslo. Pokud je řešení více, zadejte jejich součet.

Řešení Poslední dvojčíslí druhých mocnin, která začínají nulou, jsou pouze 00,01,04 a 09. Poslední vyloučíme kvůli podmínce, že první cifra je součtem zbylých (číslo 9009 není druhá mocnina). Uvažovat nemusíme ani dvojčíslí 00, pak by číslo muselo začínat dvěma stejnými ciframi, bylo by dělitelné 11 a ne 121. Číslem 1 mohou končit pouze druhé mocniny tvaru $(10a+1)^2 = 100a^2+20a+1$ a $(10a-1)^2 = 100a^2-20a+1$. Aby byla předposlední cifra 0, musí být $20a$ dělitelné 100, tedy a musí být dělitelné 5. Pro dvojčíslí 01 stačí uvážit čísla 49^2,51^2 a 99^2. Analogicky pro dvojčíslí 04 pouze čísla 48^2, 52^2 a 98^2. Z těchto možností vyhoví jen $99^2 = 9801$.

15. Máme dvě rovnoramenné váhy a N mincí, z nichž jedna je těžší než ostatní (všechny ostatní mají stejnou váhu). Nevíme přitom, o kolik je tato mince těžší. V každém vážení umístíme několik mincí na každou ze čtyř misek vah. Pro jaké největší N umíme nejtěžší minci najít na tři vážení?

Řešení Při každém vážení můžeme mít pět skupin mincí: čtyři na vahách a pátou mimo. Jedno vážení nám dá informaci o tom, ve které z těchto pěti skupin mince je. Druhé vážení nám umožní tuto skupinu opět rozdělit na pětiny. Poslední vážení také. Po něm musí v nejtěžší skupině zbývat jediná mince. Skupina pro třetí vážení proto mohla obsahovat jen 5 mincí, skupina pro druhé vážení $5 \cdot 5 = 25$, všech mincí mohlo být nejvýše 125. Největší možné N je proto 125.

16. Nekonečná posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ přirozených čísel splňuje $a_1+a_2 = 28$, $a_3+a_4 = -11$ a pro všechna přirozená čísla n platí $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$. Určete $a_{12} + a_{123} + a_{1234}$.

Řešení Sečtením $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ a $a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1}$ máme $a_{n+3} = -a_n$, analogicky $a_{n+6} = -a_{n+3} = a_n$. Čísla v posloupnosti se opakují s periodou 6. První dva členy posloupnosti označíme x, y. Prvních šest členů posloupnosti je pak $x, y, y-x, -x, -y, x-y$. Ze zadání $x+y = 28, y-2x = -11$, odtud $x = 13$, $y = 15$. Hledaná hodnota je rovna $(x-y)+(y-x)-x = -13$.

17. Jaké je největší přirozené n takové, že existuje právě jedno přirozené m splňující $\frac{10}{37} < \frac{n}{m} < \frac{3}{11}$?

Řešení Nerovnosti přepíšeme do tvaru $\frac{11}{3} < \frac{m}{n} < \frac{37}{10}$. Délka intervalu $I = (\frac{37}{10}, \frac{11}{3})$ je $\frac{1}{30}$. Kdyby bylo n větší než 60, vzdálenost mezi $\frac{m}{n}$ a vzdálenějším koncem intervalu I by byla jistě menší než $\frac{1}{n}$, to proto nemůže nastat. Protože hranice intervalu lze psát jako $\frac{220}{60}$ a $\frac{222}{60}$, pro $n = 60$ opravdu existuje jediný takový zlomek.

18. Na kolik nejvíce částí lze čtyřmi kružnicemi a dvěma přímkami rozdělit rovinu? (Oblast je část roviny ohraničená částmi přímek a kružnic, může být nekonečná.)

Řešení Dvě přímky dělí rovinu na 4 části. Přidáním jedné kružnice počet oblastí vzroste na 8. Druhá kružnice se s každou z přímek i s první kružnicí může protnout nejvýše ve dvou bodech, může tedy přidat 2+2+2=6 oblastí. Analogicky třetí kružnice může přidat 8 oblastí a čtvrtá 10. Celkem může být oblastí 8+6+8+10=32.

19. Jaké největší přirozené číslo nelze psát ve tvaru $42a+b$, kde a, b jsou přirozená a b je navíc složené? (Číslo nazýváme složeným, pokud jej lze psát jako součin dvou přirozených čísel větších než 1).

Řešení Hledané číslo označme n. Předpokládejme, že je větší než 210. Pak ho lze jistě psát jako $42+(n-42)$, $2\cdot42+(n-84)$, $3\cdot42+(n-126)$, $4\cdot42+(n-168)$, $5\cdot42+(n-210)$. Dle zadání nesmí být žádné z čísel $n-42$, $n-84$, $n-126$, $n-168$, $n-210$ složené, tedy všechna jsou prvočísla. Jedno z těchto pěti čísel je ale dělitelné pěti. Jediné prvočíslo dělitelné 5 je 5. Tomu odpovídá $n = 215$. Pro takové n jsou $n-42 = 173$, $n-84 = 131$, $n-126 = 89$, $n-168 = 47$, $n-210 = 5$ opravdu prvočísla, hledaným číslem je 215.

20. Zuzka si narýsovala trojúhelník ABC s vnitřními úhly při vrcholech A, B, C po řadě 50°, 60° a 70°. V něm si sestrojila střed I kružnice vepsané a spustila z něj kolmice na všechny strany trojúhelníka. Paty těchto kolmic označila A_1, B_1, C_1. Pak z I spustila kolmice na strany trojúhelníka $A_1B_1C_1$ a jejich paty vytvořily trojúhelník $A_2B_2C_2$. Takto postupovala stále dokola. Jaké jsou vnitřní úhly v trojúhelníku $A_{17}B_{17}C_{17}$? Jako výsledek zadejte jejich součin jejich velikostí ve stupních.

Řešení Čtyřúhelník IA_1CB_1 má dva protější úhly pravé, dle Thaletovy věty leží jeho vrcholy na kružnici. Úhly IA_1B_1 a A_1B_1I jsou proto rovny 35°. Analogicky úhly IB_1C_1 a B_1C_1I jsou 25° a úhly IC_1A_1 a A_1A_1I jsou 30°. Vnitřní úhly v trojúhelníku $A_1B_1C_1$ jsou proto 65°, 60° a 55°. Když celou operaci zopakujeme podruhé, dostaneme opět trojúhelník s vnitřními úhly 55°, 60° a 65°, napotřetí dostaneme trojúhelník podobný s ABC. Po počtech opakovaní operace nedělitelných třemi tedy máme trojúhelník podobný s $A_1B_1C_1$, po počtech dělitelných třemi trojúhelník podobný s ABC. Výsledek je proto $55 \cdot 60 \cdot 65 = 214500$.