Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.00

Poznámka ke všem úlohám: pokud vyjde celé číslo, zadejte jej. Pokud vyjde číslo s konečným desetinným rozvojem, za

1. Máme posloupnost 1,2,3,2,1,2,3,2,1,2,3,... Kolik po sobě jdoucích členů má součet 2011?

   Řešení 1 *Posloupnost rozdělíme do čtveřic 1,2,3,2, z nichž má každá součet 8. Takových čtveřic musíme mít* $\left\lfloor \frac{2011}{8} \right\rfloor = 251$*, ty mají součet 2008, do 2011 zbývají 3, což je součet dvou dalších členů. Celkem musíme sečíst* $4 \cdot 251 + 2 = 1006$ *členů.*

2. Najděte největší přirozené číslo n takové, že $\frac{n-2011}{n+2012}$ je druhou mocninou racionálního čísla.

   Řešení 2 *Aby bylo* $X = \frac{n-2011}{n+2012}$ *druhou mocninou čísla racionálního, musí být* $(n+2012)^2 X$ *druhou mocninou přirozeného čísla* k*, máme tak*

$$
\begin{aligned}
(n-2011)(n+2012) &= k^2 \\
4n^2 + 4n - 4 \cdot 2011 \cdot 2012 &= 4k^2 \\
(2n+1)^2 - 4k^2 &= 4 \cdot 2011 \cdot 2012 + 1 \\
(2n+1-2k) \cdot (2n+1+2k) &= 16184529
\end{aligned}
$$

   Pro maximalizaci n *volíme* $2n+1-2k = 1$, $2n+1+2k = 16184529$ *a dostáváme* $n = 4046132$*. Pro úplnost, vyhovujícími hodnotami n jsou také 2011, 3352, 5732, 9163, 16711, 27192, 49972, 149863, 449572 a 1348711.*

3. Najděte všechna prvočísla taková, že $69 * p^4 - 41114$ je prvočíslo. Není-li žádné takové, zadejte nulu, je-li jediné, zadejte jeho hodnotu, je-li jich více, zadejte jejich součin.

   Řešení 3 *Vyhoví pouze 5 (pak* $69 * p^4 - 41114 = 2011$*), jinak je výsledek dělitelný pěti.*

4. Doplňte chybějící číslice, jako odpověď zadejte součet činitelů (prvního a druhého řádku).

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & * & 1 & * \\
\times & & & 3 & * & 2 \\
\hline
 & & & * & 3 & * \\
 & 3 & * & 2 & * & \\
* & 2 & * & 5 & & \\
\hline
1 & * & 8 & * & 3 & *
\end{array}
$$

   Řešení 4 *415+382=797*

5. Máme tři nádoby o objemech 2, 7 a 9l. Na začátku je největší plná. Do nejmenší nádoby z ní chceme přelít přesně litr vody. Nemáme ale k dispozici žádné měřidlo, vodu můžeme pouze přelévat mezi nádobami, navíc nesmíme vodu vylévat jinam než do nádob ani přilévat odjinud. Na kolik nejméně přelití je možné dostat litr vody do nejmenší nádoby?

   Řešení 5 *Výchozí stav je (0—0—9), kde čísla v závorce značí litry vody v jednotlivých nádobách. Přelitím z 3 do 2 máme (0—7—2), přelitím z 2 do 1 (2—5—2), přelitím z 1 do 3 pak (0—5—4), přelitím z 2 do 1 (2—3—4), přelitím z 1 do 3 (0—3—6), přelitím z 2 do 1 (2—1—6), přelitím z 3 do 1 (0—1—8), konečně přelitím z 2 do 1 máme (1—0—8). Je tedy potřeba 8 přelití.*

6. Dvě lodě plují po přímé trajektorii stálou rychlostí. V 9h je jejich vzájemná vzdálenost 20km, v 9.35 je vzdálenost 15 km, v 9.55 je vzdálenost 13 km. Najděte časový okamžik, kdy vzájemná vzdálenost obou lodí je minimální. Odpověď zadejte jako počet minut od deváté hodiny.

Řešení 6 *Čas 9h označíme za čas 0. V čase t je první loď na souřadnicích $(x_1 + v_{x1}t, y_1 + v_{y1}t)$, druhá loď na souřadnicích $(x_2 + v_{x2}t, y_1 + v_{y2}t)$, kde pro $i \in \{1, 2\}$ jsou x_i, y_i souřadnice lodí v čase 0, v_{xi}, v_{yi} jejich rychlosti ve směru osy x a y. Minimalizovat jejich vzdálenost znamená minimalizovat druhou mocninu jejich vzdálenosti, která je v čase t dle Pythagorovy věty rovna $D(t) = (x_1+v_{x1}t-x_2-v_{x2}t)^2+(y_1+v_{y1}t-y_2-v_{y2}t)^2$. Nás ale nezajímá přesný vzorec pro D, důležité je, že jde o kvadratickou funkci t a lze psát $D(t) = at^2 + bt + c$. Pokud za jednotku času zvolíme 5 minut a za jednotku délky kilometr, máme $400 = D(0) = c$, $225 = D(7) = 49a+7b+c$, $169 = D(11) = 121a+11b+c$, řešením soustavy máme $b = -32$, $a = 1$, $c = 400$, tedy $D(t) = t^2-32+400 = (t-16)^2+144$. Tento výraz je minimální pro $t = 16$, odpověď je proto 80.*

7. Do vrcholů pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ jsme umístili celkem 15 mincí tak, že ve vrcholu A je jedna, v B dvě, v C tři, v D čtyři a v E pět. Postupně přidáváme mince tak, že si vybereme trojici sousedních vrcholů a do každého přidáme jednu minci. Kolik nejméně mincí musíme přiložit, aby bylo v každém vrcholu stejně mincí?

Řešení 7 *Pokud přidáme a-krát k trojici EAB, b-krát k ABC, c-krát k BCD, d-krát k CDE a e-krát k DEA, máme soustavu rovností $e+a+b+1 = a+b+c+2 = b+c+d+3 = c+d+e+4 = d+e+a+5$, odtud $a = d + 1$, $c = a + 1 = d + 2$, $e = c + 1 = d + 3$, $b = e + 1 = d + 4$. Při volbě nejmenšího možného d (tj. $d = 0$) je třeba přidat $a + b + c + d + e = 1 + 4 + 2 + 0 + 3 = 10$ trojic, neboli 30 mincí.*

8. Banka nabízí dva produkty – jeden s úrokem 10% ročně a bez poplatků, druhý s úrokem 21% ročně a s poplatkem 8400Kč ročně (na konci roku se jednorázově přičte úrok 21% a následně se odečte zmíněný poplatek). Henry si na každý účet uloží 50 000 korun. Za kolik let bude mít na druhém účtu více než na prvním (zajímají nás celé roky)? Od úroků není potřeba odečítat daň.

Řešení 8 *Na prvním účtu je po k letech $1,1^k \cdot 50000$, na druhém $1,21^k \cdot 50000-(8400+1,21\cdot 8400+1,21^2 \cdot 8400 + 1,21^{k-1}8400) = 1,21^k \cdot 50000 - 8400 \cdot \frac{1,21^k-1}{0,21}$. Po substituci $1,1^k = t$ tak hledáme nejmenší reálné $t > 1$ splňující $50000t < t^2 \cdot 50000 - 8400 \cdot \frac{t^2-1}{0,21}$. V nerovnosti nastává rovnost pro $t = 1$ a $t = 4$. Nejmenším vyhovujícím t je tak 4 a nejmenším vyhovujícím k je 15. Kdo dal přednost ťukání do kalkulačky, byl pravděpodobně rychlejší.*

9. Doplňte čísla do křížovky tak, aby platilo:

   Vodorovně

   A Číslo s klesající velikostí číslic (o jedničku).

   D Mocnina čísla.

   E Druhá mocnina čísla.

   F Číslo s rostoucí velikostí číslic (o jedničku).

   H Číslo s klesající velikostí číslic (o jedničku).

   Svisle

   B Číslo dělitelné 11.

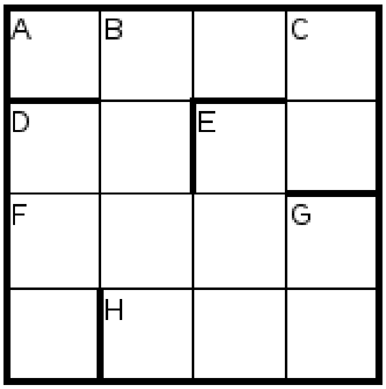
   C Prvočíslo.

   D Třetí mocnina čísla.

   E Druhá mocnina prvočísla.

   G Součet pěti po sobě jdoucích celých čísel.

   Jako odpověď zadejte čísla na hlavní úhlopříčce (začíná na poli označeném písmenem A).



Řešení 9 *V křížovce vyjde po řádcích 6543, 1681,2345,5210; hledaná odpověď je 6640.*

10. Jana si koupila 98kg melounů, které jsou tvořeny z 99% vodou. Nechala je na slunci a za den jí seschly tak, že jsou z 98% tvořeny vodou. Kolik kg melounů Janě zbylo?

    Řešení 10 *Pevná hmota tvoří dvakrát menší část než předtím, proto 49.*

11. Ke třem stěnám krychle o hraně 2 přilepíme (celými stěnami) tři další stejně velké krychle. Jaký je nejmenší poloměr koule, kterou lze vzniklému tělesu opsat?

    Řešení 11 *Při slepení do T máme poloměr opsané koule* $\sqrt{1+1+9}$, *při prostorovém slepení* $\sqrt{4+4+4}$. *Výsledek je proto* $\sqrt{11}$.

12. Máme kružnici a v ní vepsaný rovnostranný trojúhelník. V trojúhelníku vepsanou kružnici a v této kružnici vepsaný čtverec. V tomto čtverci kružnice, atd... poslední vepsaný útvar je 2011- úhelník. Kolik je v celém obrázku průsečíků, pokud pro žádné n nemá n-úhelník společný bod s $(n+1)$-úhelníkem? (Průsečíkem rozumíme bod společný dvěma narýsovaným útvarům.)

    Řešení 12 *Počet průsečíků je* $3+3+4+4+\cdots+2010+2010+2011 = (2010+3)\cdot 2008+2011 = 4044115$

13. Průměr 2011 přirozených čísel, ne nutně různých, je 2011. Jaké je nejvyšší číslo, které se mezi nimi může nacházet?

    Řešení 13 *Pro jakékoliv číslo* m *z dané 2011-tice musí platit* $\frac{2010\cdot 1+1\cdot m}{2011} \leq 2011$, *proto* $m \leq 2011\cdot 2011-2010 = 4042111$

14. Posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ je tvořena nulami a jedničkami. Přitom platí, že $a_1 = 1$ a $a_1 - a_2 + a_3 - a4 + \ldots - a_{12}$ je číslo dělitelné 3. Kolik takových posloupností $a_1, \ldots, a_{12}$ existuje?

    Řešení 14 *Každá taková posloupnost je binárním zápisem čísla dělitelného 3 mezi* 2^{11} *a* $2^{12}-1$. *Takových čísel je* $(4095-2049)/3+1 = 683$.

15. Zbyněk a Mária hrají hru. Na šachovnici o 49×49 polích stojí figurka, se kterou střídavě hýbou. Táhnout mohou vždy o 3 pole doprava a o 4 dolů, nebo o 4 doprava a o 3 dolů. Kdo nemůže táhnout, prohrál. Začíná Mária na poli, které si zvolí v nejlevějším sloupci šachovnice. Kolik polí si může zvolit tak, aby vyhrála?

    Řešení 15 *V prvním sloupci jsou vždy 3 pole prohrávající a pak 4 vyhrávající, Mária má* $4\cdot 7 = 28$ *možností jak vyhrát.*

Mathrace Sada 2

odevzdávejte do 18.00

16. Najděte všechny dvojice nenulových cifer a, b takových, že $\overline{abb} = \overline{ba} \cdot b$. Jako odpověď zadejte součet všech možných čísel $\overline{ab}$. Označením $\overline{xyz}$ myslíme číslo, které je zapsáno ciframi x, y, z zleva doprava v tomto pořadí.

Řešení 16 *Po dělení 5 musí dávat čísla b a ab stejný zbytek. Proto buď je $b = 5$, nebo musí a dávat zbytek 1 po dělení 5. Rovnice $\overline{a55} = \overline{5a} \cdot 5$ nemá řešení, neboť součin na pravé straně je mezi 250 a 295, což dává pro a jedinou možnost 2, která nevyhoví. Další možností je $\overline{1bb} = \overline{b1} \cdot b$, po odečtení b a vydělení 10 $\overline{1b} = b \cdot b$. Snadno rozmyslíme, že taková cifra b neexistuje. Poslední možností je $\overline{6bb} = \overline{b6} \cdot b$. Pro $b < 8$ je pravá strana menší než 600, pro $b = 9$ je větší než 700. Zbývající možností je tak $a = 6$, $b = 8$, výsledek je 68.*

17. Číslo N má ciferný součet roven 100, zatímco číslo 44N má ciferný součet roven 800. Najděte ciferný součet čísla 3N.

Řešení 17 *Formulace úlohy napovídá, že pokud najdeme jedno číslo s takovou vlastností, máme vyhráno. To je snadné – uvážíme číslo tvaru 1010...101, které má 199 cifer, z toho 100 jedniček a 99 nul. Po vynásobení 44 dostaneme číslo z 200 čtyřek, takové N opravdu vyhoví. Pro korektnost je ještě třeba rozmyslet, že pokud čísla 40N a 4N mají ciferný součet nejvýše 400 a že jejich součet má ciferný součet nejvýše 800 a aby nastaly obě rovnosti, nesmí při násobení $4 \cdot N$ ani sčítání $40N + N$ nastat přesah přes desítku. Číslo 3N tak má ciferný součet 300.*

18. V trojúhelníku ABC označme R dotykový bod vepsané kružnice na straně a. Průsečík AR s těžnicí t_b označme X. Trojúhelník ABX má třikrát větší obsah než trojúhelník ACX. Délka strany a je 4, délka strany b je 5. Určete délku strany c.

Řešení 18 *Vzdálenosti BR, CR jsou po řadě rovny $(a + b - c)/2$, $(a + c - b)/2$; poměr obsahů jmenovaných trojúhelníků je roven poměru těchto vzdáleností. Pro délky stran proto platí $a + c - b : a + b - c = 1 : 3$, tedy $c - 1 : 9 - c = 3 : 1$, odtud $c = 7$.*

19. Čtyři hrací kostky mají každá na stěnách čísla 1 až 6 rozmístěná tak, že součet počtů ok na protějších stěnách je 7. Kostky slepíme do jednoho útvaru tak, aby se dotýkaly celými stěnami. Určete nejmenší a největší možný součet viditelných čísel a jako odpověď zadejte součin obou výsledků.

Řešení 19 *Největší součet dostaneme, když na dvou kostkách slepením zakryjeme jedničku a na zbylých dvou jedničku a dvojku, součet nezakrytých stěn je pak $4 \cdot 21 - 8 = 76$. Naopak nejmenší součet získáme, když kostky slepíme do čtverce tak, že šestky a pětky nejsou viditelné, na viditelných stěnách zbude $4 \cdot 21 - 4 \cdot 11 = 40$. Výsledek je proto* 3040.

20. Šestimístné číslo končí cifrou 6. Když ji přesuneme na začátek, získáme čtyřnásobek tohoto čísla. O jaké číslo šlo?

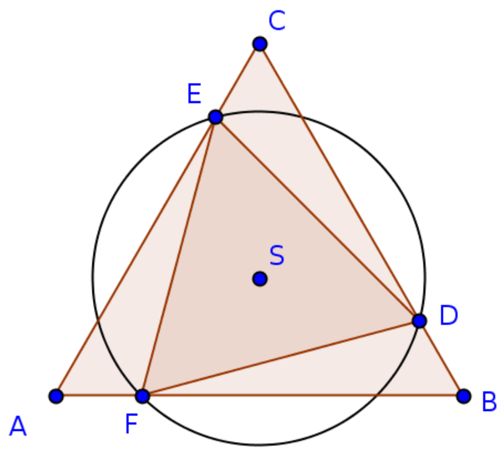
Řešení 20 *Číslo tvořené prvními pěti ciframi hledaného čísla označme k. Řešíme rovnici $10k + 6 = 600000 + k$, jejím řešením je 15384, hledaným číslem je pak 153846.*

21. Pro funkci $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ platí $f(x) + f(y) = f((x + y)/2) + f(3x) - 33x^2 - 2xy + 3y^2$ pro všechna x taková, že $(x + y)/2$ je celé. Určete $f(47) - f(42)$.

Řešení 21 *Prohozením x a y a odečtením od původní rovnice máme $f(3x) - f(3y) = 36x^2 - 36y^2$ (pro x, y stejné parity). Dále dosazením $x = y$ máme $f(x) = f(3x) - 32x^2$. Využitím těchto dvou vztahů máme $f(x) - f(y) = 4x^2 - 4y^2$ (pro x, y stejné parity, odkud odvodíme $f(x) = 4x^2 - l$ pro x liché a $f(x) = 4x^2 - s$ pro x sudé, kde s, l jsou nějaké konstanty. Dosazením $x = 2, y = 4$ dostáváme $s = l$, výsledek 1780.*

22. Do rovnostranného trojúhelníka ABC o straně 1 je vepsán rovnostranný trojúhelník tak, že oba mají stejné těžiště a vnitřní trojúhelník má poloviční obsah. V jaké vzdálenosti od vrcholu A se nachází nejbližší vrchol menšího trojúhelníka?

Řešení 22 *Oba trojúhelníky mají stejný střed opsané kružnice, vnitřní má $\sqrt{2}$-krát menší poloměr opsané kružnice (trojúhelníky jsou podobné a poměr obsahů je druhou mocninou koeficientu podobnosti). To nám umožňuje sestavit rovnici pro hledanou vzdálenost x: $(0,5-x)^2+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$, odtud* $x=0,2113$.



23. Arabský kupec odkázal svým synům $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{9}$ stáda. Celkem měl 17 velbloudů. Synové neuměli stádo rozdělit, tak si půjčili jednoho velblouda od souseda; z 18 velbloudů jeden dostal 9, druhý 6 a poslední 2. Zbylého velblouda vrátili sousedovi. Druhý kupec měl 4 syny a odkázal k-tému z nich $1/a_k$ stáda, kde a_k je celé číslo, přičemž $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. I tito synové si stádo beze zbytku rozdělili stejným způsobem (s využitím vypůjčeného velblouda a všichni velbloudi zůstali vcelku). Kolik nejméně mohl mít druhý kupec velbloudů?

Řešení 23 *Prohledáváním malých čísel s velkým počtem dělitelů zjistíme, že hledaným minimem je 16*

24. Vlado má stádo ovcí. Když jich vyžene na louku 100, mohou být na louce libovolně dlouho; 100 ovcí je navíc největší stádo s takovouto vlastností. Pokud jich vyžene 120, vydrží jim pastva na 100 dní. Na jak dlouho vydrží pastva 150 ovcím?

Řešení 24 *Množství trávy zkonzumované ovcí za den označme t. Na pastvině denně doroste $100t$, při vyhnání 120 ovcí se tak každý den spase o $20t$ více, než doroste. Před vyhnáním ovcí tedy bylo na pastvě $100 \cdot 20t = 2000t$ trávy. Při vyhnání 150 ovcí se denně spase o $50t$ více trávy, než doroste, pastva vydrží $\frac{2000t}{50t} = 40$ dní.*

25. Máme šachovnici 5×5, každé pole obsahuje číslo, a to buď 1 nebo -1. Můžeme v každém kroku vzít podčtverec o straně alespoň 2 a změnit znaménka všech čísel v tomto podčtverci. Chceme docílit toho, že na konci budou na celé šachovnici pouze jedničky. Na kterých polích může být na začátku -1? Výsledek zadejte jako součet součinů souřadnic; souřadnice jsou čísla od 1 do 5.

Řešení 25 *Použitím čtverců o straně 2 nebo 4 se zachová zbytek součtu všech čísel v tabulce po dělení 4, při použití čtverců o straně 3 nebo 5 se tento zbytek změní. My jej chceme změnit z výchozí hodnoty 3 na hodnotu 1, čtverců o liché straně musíme použít lichý počet. Použitím každého z nich se však změní i znaménko čísla v prostředním poli – jedinou možností tak je, že -1 byla na souřadnicích (3,3), výsledek je proto 9.*

26. Máme dvě kladná celá čísla. Uvážíme jejich součet, součin, podíl a rozdíl menšího a většího. Součet těchto čtyř výsledků je 243. Najděte všechna řešení; pro každé spočtěte součin čísel a jako odpověď zadejte součet těchto součinů.

Řešení 26 *Označme čísla a a b, $a > b$, víme, že $a = kb$ pro nějaké celé k. Máme pak* $243 = (kb+b)+(kb-b)+kb\cdot b+k = 2kb+kb^2+k = k(b+1)^2$. *Druhé mocniny dělící 243 jsou* 3^2 *a* 9^2, *jim odpovídají řešení* $b = 2$, $a = 54$ *a* $b = 8$, $a = 24$. *Odpověď je pak* $108 + 192 = 300$.

27. Řešte soustavu rovnic

$$\sin(x) + \sin(y) = \sin(x + y)$$
$$\cos(x) + \cos(y) = \cos(x + y)$$

pro $0 \le x, y < 360°$. Jako výsledek zadejte součin všech vyhovujících x ve stupních.

Řešení 27 *Položme* $a = \cos(x) + i\sin(x)$, $b = \cos(y) + i\sin(y)$. *Máme pak* $a + b = ab$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = 1$. *Čísla* $\frac{1}{b}$ *a* $\frac{1}{a}$ *jsou komplexní jednotky, mají stejnou absolutní hodnotu. Jejich součet je reálný, mají proto i stejnou absolutní hodnotu reálné části. Musí mít tedy i stejnou hodnotu reálné části – proto* $\cos(x) = \cos(y) = \frac{1}{2}$. *Vyhoví* $x = 60°$ *a* $x = 300°$ *(y se dopočte jako* $360° - x$*), hledaná odpověď je* 18000.

28. Na obvodu kruhu je 1001 talířků. Kolem kruhu chodí Petr a do prvního talířku dá bonbon, jeden talířek vynechá, do dalšího dá bonbon, dva talířky vynechá, do dalšího dá bonbon, tři talířky vynechá, a tak pokračuje do doby, než by měl vynechat 1000 talířků. V kolika talířcích nakonec budou bonbony?

Řešení 28 *Obsazené jsou ty talířky, jejichž pořadové číslo lze vyjádřit ve tvaru* $1+2+\cdot+t \mod 1001 = \frac{t(t+1)}{2} \mod 1001 = \frac{(4t+1)^2-1}{8} \mod 1001$ *Obsazených talířků bude tolik, kolik různých zbytků dávají druhé mocniny přirozených čísel po dělení 1001. Protože* $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, *stačí uvážit, kolik zbytků dávají druhé mocniny po dělení 7, 11 a 13. Snadno rozmyslíme, že tyto počty jsou po řadě 4, 6 a 7. Každý vyhovující zbytek po dělení sedmi lze nakombinovat s libovolnými zbytky po dělení 11 a 13, výsledkem je proto* $4 \cdot 6 \cdot 7 = 168$. *V okamžiku, kdy přijdete na vzorec* $\frac{t(t+1)}{2} \mod 1001$, *je možné úlohu snadno dořešit počítačem (např. programem Excel).*

29. Lenčin dědeček se narodil ve dvacátém století. Žádná z jeho dcer nemá dceru, ale každá má tolik synů, kolik má sester. Každý jeho syn má tolik dcer, kolik má sester, a tolik synů, kolik má sourozenců. Celkem má Lenčin dědeček tolik potomků (dětí a vnoučat), kolik mu je let. Za deset let bude jeho věk dělitelný třemi různými prvočísly. Kolik mu je let?

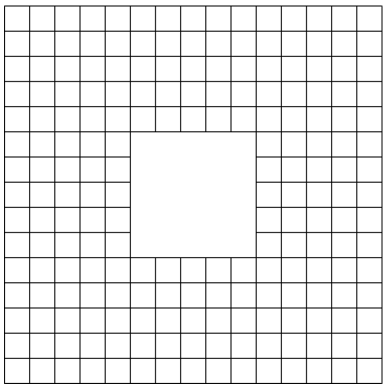
(Předpokládejte normální rodinné vztahy, zejména tedy žádná z jeho dcer nemá dítě s ním, ani s jeho syny.)

Řešení 29 *Pokud počet dcer označíme a a počet synů b, dostaneme počet potomků ve tvaru* $(a+b)^2$. *Vybíráme tak z druhých mocnin čísel menších než* $\sqrt{111}$, *informace o třech prvočíslech nám nechá jedinou možnost – Lenčinému dědečkovi je 100.*

30. Paty výšek v trojúhelníku ABC označíme D, E, F. Jaký obsah má trojúhelník ABC, (v cm^2) pokud má DEF délky stran 3, 4 a 5 cm?

Řešení 30 *Obvod trojúhelníka DEF je 12 cm, jeho obsah 6* cm^2, *poloměr kružnice jemu vepsané je proto* $\frac{2\cdot 6}{12} = 1$. *Pokud trojúhelník DEF umístíme do souřadné sítě tak, aby měl vrcholy v bodech (0,0), (3,0) a (0,4), bude jeho střed I vepsané kružnice v bodě (1,1). Víme, že střed vepsané kružnice trojúhelníka DEF je současně průsečíkem výšek trojúhelníka ABC. Body* A, B, C *tak sestrojíme jako průsečíky kolmic na* ID, IE, IF *procházejících postupně body* D, E, F. *Souřadnice bodů* A, B, C *jsou celočíselné, obsah trojúhelníka pak vyjde 30.*

31. Kolik čtverců je na následujícím obrázku?



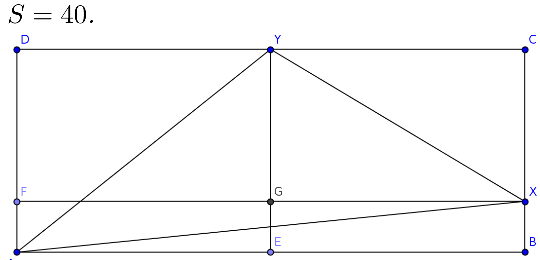
Řešení 31 *Ve vrchních pěti řadách je* $15 \cdot 5$ *čtverců o straně 1,* $14 \cdot 4$, *o straně 2, celkem tedy* $15\cdot5+14\cdot4+13\cdot3+12\cdot2+11\cdot1 = 205$. *Stejně tak je 205 čtverců v 5 levých řadách, 205 čtverců v 5 pravých řadách a 205 čtverců v 5 spodních řadách. Přitom* $5\cdot5+4\cdot4+3\cdot3+2\cdot2+1\cdot1 = 55$ *čtverců jsme počítali do současně do horních pěti řad i levých pěti sloupců. Čtverců, které neobsahují středový čtverec o straně 5 je tak* $4 \times 205 - 4 \times 55 = 600$. *Zbývá spočítat čtverce, které jej obsahují. Máme 1 takový čtverec o straně* 5, *čtyři takové čtverce o straně 6, . . . celkem tedy* $1+4+9+16+25+36 = 91$ *čtverců o straně nejvýše 10, a* $25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55$ *čtverců o straně 11 až 15. Výsledek příkladu je tak* 746.

32. Matěj a Zuzka nasbírali dohromady 72 hub. Dvě pětiny Matějových hub byly lišky, tři sedminy Zuzčina úlovku byly žampiony. Kolik hub nasbírala Zuzka, pokud jich měla více než Matěj?

Řešení 32 *Počet Zuzčiných hub je* $7t$, *kde* $t \leq 10$. *Na Matěje tak zbývá* $72 - 7t = 65 - 7(t - 1)$ *hub,* $t - 1$ *musí být dělitelné 5. Máme tak možnosti* $t = 1$ *a* $t = 6$ *(t=11), ty vedou na řešení (65,7), (30,42). Jen ve druhém má více Zuzka, proto 42.*

33. V obdélníku $ABCD$ je na straně BC dán bod X, na straně DC bod Y, obsah trojúhelníka ABX je 5, obsah AYD je 10 a obsah XCY je $7,5$. Určete obsah obdélníka $ABCD$.

Řešení 33 *Označíme-li obsah obdélníka* S, *poměr* $BX : BC = t$, $DY : DC = u$, *máme* $tS = 10$ *(z dvojího vyjádření obsahu obdélníka* $ABXF$*),* $uS = 20$ *(z dvojího vyjádření obsahu obdélníka* $AEYD$*),* $(1 - t)(1 - u)S = 15$ *(z dvojího vyjádření obsahu obdélníka* $GFCY$*). Z prvních dvou vztahů máme* $u = 2t$. *Máme pak* $(1 - 3t + 2t^2)S = 15$, *po dosazení za* $S = \frac{10}{t}$ *je* $(1 - 3t + 2t^2)10 = 15t$, *řešením kvadratické rovnice* $t = 1/4$ *nabo* $t = 2$. *Druhé řešení není možné (zřejmě musí být* $t < 1$*), proto* $S = 40$.



34. Zdeněk si vyrobil deset stejně velkých čtverců z drátu. Teď pokládá jeden přes druhý na stůl. Na kolik nejvýše oblastí se mu může podařit stůl rozdělit? Pokud by měl jediný čtverec, byla by odpověď na tuto otázku 2.

Řešení 34 *Vzhledem k Eulerově větě (průsečíky - úsečky + oblasti = 2) můžeme naše hledání zredukovat na snahu odhalit počet průsečíků jednotlivých čtverců. Když přes sebe položíme dva čtverce, zjistíme, že se protnou v nejvýše 8 bodech. Kdyby se každé dva čtverce protly právě v 8 bodech, měli bychom celkem* $\binom{10}{2} \cdot 8 = 360$ *průsečíků. Každý obvod čtverce je tím pádem rozdělený na* $8 \cdot 9$ *úseček, tedy celkový počet úseček pro všechny čtverce je* $8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$. *Podle Eulerovy věty potom platí, že počet oblastí je* $2 + 720 - 360 = 362$ *oblastí.*

Nyní je ještě třeba ukázat, že opravdu existuje nějaké takové rozmístění čtverců. Představme si, že všechny čtverce jsou vepsány jedné kružnici, jen jsou vůči sobě pootočené. Potom lze (např. matematickou indukcí) dokázat, že se opravdu každý čtverec protne s každým čtvercem v 8 bodech. Čili závěr je, že 10 čtvercových obručí může vytvořit maximálně 362 oblastí.

35. Hloupětínská slepičárna prodává vejce v balení po 6, 9 a 20. Kolik různých kladných počtů vajec menších než 1000 lze koupit?

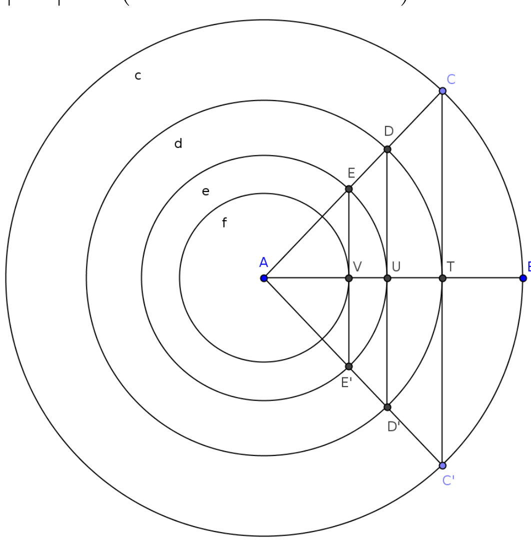
Řešení 35 *Jistě umíme koupit libovolný počet vajec dělitelný 6. Počty vajec, které jsou liché, a dělitelné třemi a větší než 3, lze koupit tak, že koupíme 9 vajec a zbytek doplníme baleními po šesti. Umíme tak koupit libovolný počet vajec dělitelný 3 větší než 3. Z počtů, které dávají zbytek 2 po dělení třemi jistě umíme koupit* $20 + 3k$, *kde* $k = 0$ *nebo* $k > 1$ *(bez dvacítkového balení se neobejdeme a jiný počet než 0 nebo* $3k$ *pro* $k > 1$ *dle výše uvedeného přidat nelze. Obdobně z počtů, které dávají zbytek 1 po dělení třemi umíme koupit 40 vajec, nebo* $40 + 3k$, *kde* $k > 1$.

Pokud má počet dávat zbytek 0 po dělení 3, musí být od 6 do 999, pokud zbytek 1, musí být buď 40 nebo od 46 do 997, pokud zbytek 2, musí být 20 nebo od 26 do 998. Celkem 332 + 319 +326 = 977.

36. Pro která n platí, že existuje prvočíslo složené z číslic 1 až n (každá je použita právě jednou)? Jako odpověď zadejte součet všech přípustných n.

Řešení 36 *Pro* $n \in 2, 3, 5, 6, 8$ *a 9 je výsledné číslo jistě dělitelné třemi; pro* $n = 4$ *vyhoví 1423, pro* $n = 7$ *vyhoví 1234657, výsledek je proto 11. Pokud se ptáte, jak hledat sedmimístná prvočísla s touto vlastností, pak asi nelze poradit nic lepšího než zkusmo. Počet čísel tvořených různými ciframi od 1 do 7 a končících na 1,3 nebo 7 je 2160, celkem 533 z nich jsou prvočísla, statisticky by tak měly stačit čtyři pokusy.*

37. Jsou dány soustředné kružnice c, d, e, f. Přímka vedená jejich středem A se s nimi protne po řadě v bodech C, D, E, F, druhá přímka vedená bodem A v bodech C', D', E', F'. Kružnice mají navíc tu vlastnost, že přímky CC', DD', EE' jsou po řadě tečnami k d, e, f, dotykové body těchto tečen označme T, U, V. Určete obsah mezikruží daného kružnicemi c, f, pokud víte, že $|CT| = 7$ a $|EV| = 3$ (obrázek není v měřítku).



Řešení 37 *Obsah mezikruží je*

$$S_\Delta = \pi(|AB|^2 - |AV|^2) = \pi[(|AB|^2 - |AT|^2) + (|AT|^2 - |AU|^2) + (|AU|^2 - |AV|^2)] =$$
$$= \pi[(|AC|^2 - |AT|^2) + (|AD|^2 - |AU|^2) + (|AE|^2 - |AV|^2)] =$$
$$= \pi(|CT|^2 + |DU|^2 + |EV|^2)$$

Snadno rozmyslíme, že $|CT|$, $|DU|$ *a* $|EV|$ *tvoří geometrickou posloupnost, neboli* $|DU|^2 = |CT| \cdot |EV|$. *(Případně tento vztah dokážeme pomocí rovnosti* $|DU| = |TE|$ *a podobnosti trojúhelníků* TEC *a* EVT*). Máme tak* $S_\Delta = \pi(|CT|^2 + |CT||EV| + |EV|^2) = 79\pi = 248.1858$.

38. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s poloměrem kružnice opsané $R = 9$, poloměrem vepsané $r = 4$ a obsahem $S = 90$. Dále jsou dány kružnice se středy v bodech A, B, C o poloměru 3. Na těchto kružnicích leží po řadě body D, E, F tak, že žádný z nich neleží ve vnitřní oblasti ABC a trojúhelník DEF je stejnolehlý s trojúhelníkem ABC. Určete obsah trojúhelníka DEF.

Řešení 38 *Pro střed stejnolehlosti* X *obou trojúhelníků musí platit* $|AX| : |BX| = (|AX| + 1) : (|BX| + 1)$*, odtud* $|AX| = |BX|$*, analogicky* $|AX| = |CX|$*, středem stejnolehlosti je proto střed kružnice trojúhelníku* ABC *opsané, poměr stejnolehlosti je* $(9 + 3) : 9$*, neboli* $4 : 3$*, poměr obsahů je* $16 : 9$*, obsah* DEF *je proto* 160.

39. Určete počet přirozených čísel, která mají ciferný součin 4 a ciferný součet 2011.

Řešení 39 *Buď obsahuje dvě dvojky a 2007 jedniček (*$\binom{2009}{2}$ *možností) nebo jedna čtyřka a 2007 jedniček (2008 možností). Celkem je takových čísel 2019044.*

40. Určete $\log(\sin x - \cos x)$, pokud víte, že $\log(\sin x + \cos x) = 3$, $\cos(2x) = -1/10$.

Řešení 40 *Máme* $-1 = \log(-\cos 2x) = \log(\sin^2(x) - \cos^2(x)) = \log(\sin x - \cos x) + \log(\sin x + \cos x) = \log(\sin x - \cos x) + 3$*, odtud* $\log(\sin x - \cos x) = -4$

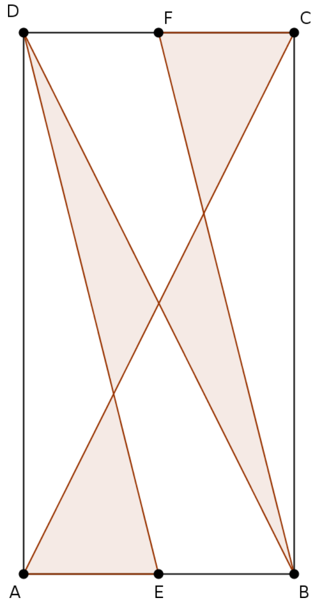
41. Určete, čemu se rovná $\sin 35° + \sin 40° + \sin 45° + \cdots + \sin 7170°$.

Řešení 41 *S využitím vztahu* $\sin x + \sin(x + 180°) = 0$ *se většina členů vzájemně odečte, zbude* $\sin 35° + \sin 40° + \sin 45° + \cdots + \sin 330°$*. Dále* $\sin(x) + \sin(360° - x) = 0$*, čímž se vyruší vše kromě* $\sin(330)° = -1/2$.

42. Čemu se rovná $\frac{b^2}{a^2-2ab+2b^2} + \frac{b^2}{a^2+2ab+2b^2}$, pokud jsou a, b nenulová čísla splňující $6a^4 - 6b^4 = 35a^2b^2$?

Řešení 42 *Výraz upravíme na* $\frac{2a^2b^2+4b^4}{a^4+4b^4} = \frac{2\frac{a^2}{b^2}-4}{\frac{a^4}{b^4}+4}$*. Pokud budeme znát číslo* $\frac{a^2}{b^2}$ *(označme ho* k*), máme vyhráno. Zadaná rovnost nám dává* $6k^2 - 6 = 35k$*, po vyřešení* $k = 6$ *(kořen* $k = -\frac{1}{6}$ *lze zavrhnout). Pak je daný výraz roven* $\frac{2\cdot6+4}{6^2+4} = 0,4$.

43. Určete obsah vybarveného útvaru, je-li obsah obdélníka $ABCD$ roven 720, AC a BD jsou jeho úhlopříčky a E, F jsou středy stran AB resp. CD.



Řešení 43 *Z vlastností těžnic trojúhelníků ABC a ACD plyne, že vybarvená oblast zabírá třetinu obdélníka, tedy plochu 240.*

44. Najděte všechna trojciferná čísla $\overline{abc}$, kde a, b, c jsou různé nenulové cifry, pro která platí $2(\overline{abc}) = \overline{bca} + \overline{cab}$. Označením $\overline{xyz}$ myslíme číslo, které je zapsáno ciframi x, y, z zleva doprava v tomto pořadí. Jako odpověď zadejte součin všech vyhovujících čísel.

Řešení 44 *Máme rovnici* $200a + 20b + 2c = 101b + 110c + 11a$, *po úpravě* $7a - 3b - 4c = 0$. *Po dělení 7 dává číslo* $3b - 3c = (3b + 4c) - 7c = 7a - 7c$ *zbytek 0, proto buď* $b = c$ *(zakázáno) nebo* (b, c) *tvoří jednu z dvojic (1,8) – pak* $a = 5$, *(2,9) – pak* $a = 6$, *(8,1) – pak* $a = 4$ *nebo* $(9, 2)$ *– pak* $a = 5$. *Součin všech možných čísel je* $518 \cdot 629 \cdot 481 \cdot 592 = 92778466144$.

45. Je dána soustava rovnic

$$
\begin{aligned}
1a + 2b + 3c + \cdots + 25y + 26z &= 27 \\
1^2a + 2^2b + 3^2c + \cdots + 25^2y + 26^2z &= 27^2 \\
&\vdots \\
1^{26}a + 2^{26}b + 3^{26}c + \cdots + 25^{26}y + 26^{26}z &= 27^{26}
\end{aligned}
$$

Najděte hodnotu y.

Řešení 45 *Řešením analogických soustav dojdeme k hypotéze, že* $a = \binom{27}{1}$, $b = -\binom{27}{2}$, …,$y = -\binom{27}{25}$, $z = \binom{27}{26}$. *Zbývá ověřit, že takové řešení vyhoví, neboli dokázat vztah* $\sum_{i=0}^{27} \binom{27}{i}(-1)^i i^t = 0$ *pro každé t od 0 do 27. Výsledek je pak* $-\binom{27}{25} = -351$.