Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.00

1. Zaměňte devět písmen devíti číslicemi $1, 2, \ldots, 9$, aby platilo:

$$\begin{array}{ccccc} & M & A & T & H \\ & R & A & C & E \\ \hline Z & A & C & A & L \end{array}$$

Jako řešení zadejte poslední řádek (tj. číslo ZACAL). Je možné zadat libovolné ze správných řešení.

Řešení 1 *Možná řešení jsou (až na přehození M,R a H,E) pouze 5283+7246=12429 a 8635+7629=16264.*

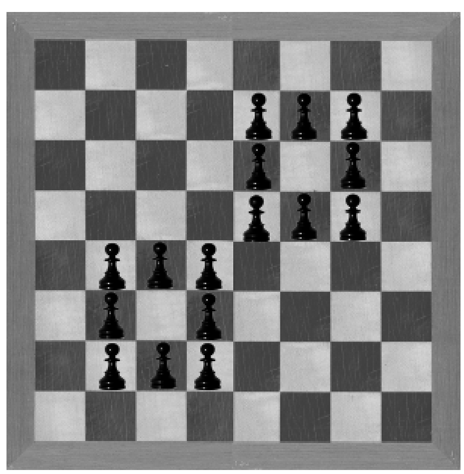
2. Nechť je dána posloupnost kruhů o obsazích $S_1, S_2, \ldots, S_{2010}$. Součet všech těchto obsahů je 2011π a pro obsahy platí $S_{n+1} = S_1 + S_n$. Určete průměr kruhu s obsahem S_{1005}.

Řešení 2 *2*

3. Mějme závodníky s čísly 1 až n, $n \in \{2, \ldots, 100\}$. Ti se utkají na n soutěžích. Pro jaká n může platit, že závodník 1 většinou doběhne před závodníkem 2, závodník 2 většinou před závodníkem 3, ..., závodník $n-1$ před závodníkem n a závodník n před závodníkem 1? Udejte součet všech vyhovujících n.

Řešení 3 *Krom dvou to jde vždy, proto je výsledek* $\frac{(3+100)\cdot(100-2)}{2} = 5047$.

4. Na obrázku vidíte šachovnici, na níž je vyznačeno postavení 16 pěšců. Máte použít jednoho koně a postavit ho tak, aby nejmenším počtem tahů sebral všechny figurky. Jaký nejmenší počet tahů je k tomu potřeba?



Řešení 4 *Všechny pěšce kůň může sebrat minimálně* 16*-ti tahy. Např. A1, B3, D2, C4, B2, D3, B4, C2, D4, E6, G5, F7, E5, G6, E7, F5, G7.*

5. Nechť $M \subseteq \{1, 2, \ldots, 3^7\}$ je množina taková, že součet žádných dvou (ne nutně různých) prvků M neleží v M. Určete největší možný počet prvků množiny M.

Řešení 5 1094

6. Devět účastníků turnaje ve střelbě na běžící terč se rozhodlo uspořádat toto klání následujícím způsobem: V každém kole se z doposud neporažených střelců určí losem dvojice, která se spolu utká v dalším kole. Vítěz posledního (osmého) střetnutí se stává vítězem celého turnaje. Zjistěte počet všech možných průběhů této soutěže.

   Řešení 6 $9 \cdot (8!)^2 = 14631321600$

7. Nechť a, b, c jsou přirozená čísla taková, že $3a = c^3$, $5a = b^2$ a neexistuje šestá mocnina prvočísla, která by dělila a. Najděte největší možnou hodnotu a.

   Řešení 7 *Snadno ověříme, že prvočísla různá od 5 a 3 musí a dělit v šesté mocnině, což nelze. Mocnina trojky dělící a musí být tvaru* $3t - 1$*, sudá a menší než 6, vyhoví pouze 2. Mocnina pětky musí být lichá, dělitelná třemi a menší než 6, proto rovna 3. Proto* $a = 1125$.

8. Newyorský taxikář jede z bodu $A(1, 1)$ do bodu $B(4, 7)$. V bodech $C(2, 5)$ a $D(3, 4)$ jsou dopravní kontroly. Jaká je pravděpodobnost, že se kontrolám vyhne, pokud v každém kroku z křižovatky (a, b), kde $a < 4$, $b < 7$ s pravděpodobností $1/2$ zamíří na $(a + 1, b)$ a s pravděpodobností $1/2$ na $(a, b + 1)$ a z ostatních křižovatek míří přímo k B. Výsledek zadejte jako zlomek v základním tvaru pomocí lomítka, např. "2/7".

   Řešení 8 *Pravděpodobnosti průchodů jednotlivými poli vyplňujeme po diagonálách do tabulky (krom okrajů vidíme analogii s Pascalovým trojúhelníkem):*

1/64	*1/16*	*37/256*	*1*
1/32	*6/64*	*21/128*	*219/256*
1/16	**5/32**	*15/64*	*99/128*
1/8	*4/16*	**10/32**	*21/32*
1/4	*3/8*	*6/16*	*1/2*
1/2	*2/4*	*3/8*	*5/16*
1	*1/2*	*1/4*	*1/8*

   Pravděpodobnost kontroly je součet tučně vyznačených pravděpodobností, pravděpodobnost úniku je pak 17/32.

9. Ze skupiny šesti studentů – Alice, Braňo, Cecílie, Dan, Eva a Fero – je potřeba vytvořit soutěžní tým o dvou až šesti členech. Alice může jít jen pokud půjde Braňo. Pokud půjde Cecílie, nepůjdou Dan ani Eva. Pokud půjde Fero, Alice nepůjde. Kolika způsoby lze tým sestavit tak, aby byly splněny všechny podmínky?

   Řešení 9 *19*

10. Je dáno 2010 bodů $A_1, A_2, \ldots, A_{2010}$ v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce. Každá přímka, která neprochází žádným z daných bodů, určuje rozklad daných bodů na dvě disjunktní podmnožiny. Kolik různých rozkladů lze takto dostat?

    Řešení 10 *Pro n bodů by jich bylo* $\binom{n}{2} + 1$*, tedy v našem případě 2019046.*

11. Najděte celočíselné dvojice (x, y) splňující

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots} + \frac{1}{(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots)^2} + \cdots} + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots} + \frac{1}{(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots)^2} + \cdots\right)^2} + \cdots = y$$

    Výsledek zapište jako součet nejmenšího možného x a největšího možného y.

    Řešení 11 *Trojnásobným užitím vzorce pro součet geometrické řady máme* $\frac{x}{x-1} = y$*. Aby byl výraz na levé straně celočíselný, musí být* $(x - 1)|1$, $x \in \{0, 2\}$*, jediné přípustné řešení je* $x = y = 2$*, proto je očekávaným výsledkem číslo 4.*

12. Najděte minimální hodnotu výrazu $\sqrt{a^2+4}+\sqrt{(b-a)^2+9}+\sqrt{(c-b)^2+4}+\sqrt{(c-4)^2+(5-d)^2}+\sqrt{d^2+1}$, kde a, b, c, d jsou reálná čísla.

Řešení 12 *Jde o délku lomené čáry určené body* $(0,2), (a,0), (b,3), (c,5), (4,d), (5,0)$. *Překlopením prvního úseku této lomené čáry podle* $y=0$ *a posledních dvou úseků podle* $y=5$ *zjistíme, že čára je stejně dlouhá jako nějaká cesta z (0,-2) do (5,10), což je dle Pythagorovy věty alespoň 13.*

13. Čtverec $KLMN$ se nachází uvnitř čtverce $ABCD$, středy obou čtverců jsou totožné. Čtverec $KLMN$ je otočen tak, že prodloužení jeho stran prochází všemi vrcholy $ABCD$. Čtverec $ABCD$ je těmito prodlouženými stranami rozdělen na 5 tečnových čtyřúhelníků (jedním z nich je $KLMN$) a čtyři trojúhelníky. Určete délku strany $KLMN$, je-li strana $ABCD$ rovna 1.

Řešení 13 $\sqrt{3}/2-1$

14. Mějme následující tvrzení o přirozených číslech n, x, y.

   A: $n|x^2+y^2$

   B: $n|xy$

   C: n je prvočíslo

   D: $n=42$

   E: $n|x$ nebo $n|y$

   Uvažme nyní tvrzení $A\wedge B, A\wedge C, A\wedge D, B\wedge C, B\wedge D, C\wedge D, B\wedge C\wedge D, A\wedge C\wedge D, A\wedge B\wedge D, A\wedge B\wedge C$. Některá z nich implikují E, jiná ne. Uveďte řetězec nul a jedniček indikujících, zda dané složené tvrzení implikuje E. Pokud např. myslíte, že první tři jsou dobře a ostatní špatně, zadejte "1110000000".

Řešení 14 *1) ne (*$x=y=2$, $n=4$*), 2) ne (*$n=5, x=2, y=1$*), 3) ne (*$x=y=21$*), 4) ano, 5) ne (*$x=6, y=7$*), 6)ano, 7) ano, 8) ano, 9) ano, 10) ano, řešení je tedy 0001011111. Většina "ano" se opírá o to, že ze sporných předpokladů* C, D *plyne cokoliv, případně o známou implikaci* $B\wedge C \implies E$. *Jedinou výjimkou je* $A\wedge B\wedge D$, *kde musíme rozebrat dělitelnost 2,3, a 7.*

15. Kolik je trojúhelníků s celočíselnými délkami a obvodem 28, pokud podobné trojúhelníky počítáme pouze jednou?

Řešení 15 *16 (např. můžeme vyjít z toho, že nejdelší strana může mít délku pouze* $10, 11, 12$ *nebo* 13*)*

16. Kolika způsoby lze obarvit vrcholy krychle $ABCDEFGH$ černě a bíle tak, aby každá rovina procházející třemi vrcholy obsahovala vrcholy obou barev?

Řešení 16 *Vyhoví pouze ta obarvení, kde jsou černé vrcholy koncovými body mimoběžných hran (například A, B, C, G). Toho lze dosáhnout* $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ *způsoby.*

17. Matěje, Liběnku, Henryho a Bublu napadlo zahrát si bezva hru. Hráči si stoupnou do kruhu a do klobouku se umístí dva lístečky, jeden s nápisem "vyhrál jsi", druhý s nápisem "pošli dál". Začíná Henry. Pokud si vytáhne první lísteček, vyhrál. V opačném případě posílá klobouk hráči po své levé ruce. Stejně hrají i ostatní. Jaké jsou pravděpodobnosti výhry jednotlivých hráčů? Zadejte **součin** těchto pravděpodobností jako zlomek v základním tvaru pomocí lomítka, např. "2/7".

Řešení 17 *Pro pravděpodobnost výhry Henryho platí $p = 1/2 + 1/16p$, odtud $p = 8/15$. Dále pravděpodobnosti výher klesají s kvocientem 1/2. Součin těchto pravděpodobností je* $64/50625$.

18. Kolik je pěticiferných čísel sestavených z cifer $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ takových, že jsou v nich právě 3 různé číslice?

Řešení 18 *1500*

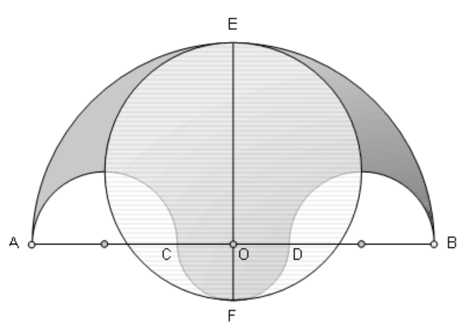
19. Nahraďte písmena číslicemi, aby platilo následující zjednodušení: $\frac{MMMM5}{NNN5} = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{MM5}{N5} = 5$. Zadejte číslo $10 \cdot N + M$.

Řešení 19 $\frac{22225}{4445} = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{225}{45} = 5$*, výsledek 42.*

20. Nad průměrem AB, $|AB| = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ je sestrojena půlkružnice p se středem O. Body C, D dělí stranu AB tak, že $|AC| = |BD| < \frac{1}{2}|AB|$. Nad úsečkami AC, CD, DB jsou sestrojeny půlkružnice a to tak, že kružnice nad průměry AC a BD leží vzhledem k AB ve stejné polorovině jako p, zbylá půlkružnice v polorovině opačné. Všechny čtyři půlkružnice vymezují část roviny o obsahu S_1.

Dále je dána kružnice nad průměrem EF, kde E a F jsou průsečíky dvou z výše uvedených půlkružnic s osou úsečky AB. Její obsah je S_2. Určete hodnotu rozdílu $S_1 - S_2$.

Řešení 20 *Situace vypadá takto:*



Vyjádříme obsah pomocí dvou neznámých poloměrů a dojdeme k výsledku 0.

21. Kolik různých tahů může na prázdné šachovnici udělat jezdec? (Tah je dvojice výchozí pozice – cílová pozice). Jezdec může začínat na libovolném neobsazeném poli šachovnice.

Řešení 21 *Do každého pole šachovnice napíšeme číslo, které udává, kolik tahů z něho může jezdec udělat. Hledaný počet tahů je součtem všech čísel v tomto schématu, tj.* 336.

22. Buď x reálné číslo takové, že $\frac{1}{\cos x} - tg\, x = 2$. Vypočítejte, čemu se rovná $\frac{1}{\cos x} + tg\, x$.

Řešení 22 *Z rovnosti* $\sec^2 x - tg^2\, x = (\sec x - tg\, x)(\sec x + tg\, x) = 1$ *plyne, že* $\sec x + tg\, x = \frac{1}{2}$. *(Funkce* sec *se nazývá sekans a jde o převrácenou hodnotu kosinu.)*

23. Najděte všechna přirozená čísla x, pro která platí, že $x = y^2$, kde $y = |\{w \in \mathbb{N}; w|x\}|$ (tedy y je počet přirozených dělitelů čísla x). Zadejte součet všech vyhovujících x.

Řešení 23 *Zřejmě* $x = 1$ *vyhoví, dále řešme jen netriviální případy. Je-li prvočíselný rozklad čísla* x *roven* $p_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot p_k^{e_k}$*, je počet jeho dělitelů* $y = (e_1+1) \cdot \cdots \cdot (e_k+1)$*, proto má platit* $p_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot p_k^{e_k} = (e_1+1)^2 \cdot \cdots \cdot (e_k+1)^2$. *Funkce* $p_i^{e_i}$ *vzhledem k* e_i *roste pro všechna prvočísla rychleji než* $(e_i+1)^2$. *Rozebráním případů s malými hodnotami* p_i *a* e_i *zjistíme, že vyhoví pouze* $x = 1$ *a* $x = 9$*, očekávaný výsledek je* 10.

24. Zjistěte, kolik celočíselných řešení má rovnice

$$\lfloor \sqrt[2010]{n} \rfloor + \left\lfloor \sqrt[2010]{\frac{n+1}{2}} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \sqrt[2010]{\frac{n+2010}{2011}} \right\rfloor = 2011.$$

Zadejte posledních 5 cifer čísla. Pozn.: Výraz $\lfloor x \rfloor$ značí celou část čísla x, tj. největší celé číslo, které není větší než číslo x.

Řešení 24 *Pro* $n < 0$ *není první sčítanec definován. Pro* $n = 0$ *je levá strana rovna 0. Dál řešme pro* $n > 0$. *Každý sčítanec na levé straně je alespoň 1, rovnost nastane, budou-li všechny sčítance právě 1. Všechny sčítance jsou rostoucí vzhledem k* n*, první je roven 1 pro* n *do* $2^{2010} - 1$. *Zbývá rozmyslet, že pro tato* $n = 2^{2010} - 1$ *jsou i ostatní sčítance rovny 1, ale to plyne z toho, že* $\frac{n+k}{1+k} = 1 + \frac{n-1}{k+1}$ *je nerostoucí vzhledem ke* k. *Možných* n *je proto* $2^{2010} - 1$*, posledních 5 cifer je 81023.*

25. Ňouma s Koumou narýsovali velkou kružnici. Do ní vepsali a-úhelník, do něj kružnici, do ní b-úhelník, do něj kružnici, do ní c-úhelník a do něj kružnici. Protože to byla skvělá zábava, opakovali to celé ještě třikrát, kružnice vzniklá posledním tahem měla 1024-krát menší poloměr, než zadaná. Kolik je $a + b + c$?

Řešení 25 *Rozmyslíme, jak to dopadne pro* $a = b = 3$, $c = 4$. *Víceúhelníky by musely poloměr kružnice snižovat pomaleji. Proto 10.*

26. Uvažme množinu 2^{42} přirozených čísel. Vezměme jejich rozdíly po dvou a ty mezi sebou vynásobme. Jakou nejvyšší mocninou dvojky bude tento součin dělitelný v nejméně příznivém případě? Zajímá nás posledních 5 cifer výsledku.

Řešení 26 *Je-li mezi čísly* a *lichých a* b *sudých, bude* $\binom{a}{2} + \binom{b}{2} \geq 2\binom{2^{41}}{2}$ *rozdílů sudých. Analogicky počet rozdílů dělitelných 4 je* $\binom{s}{2} + \binom{t}{2} + \binom{u}{2} + \binom{v}{2} \geq 2^2\binom{2^{40}}{2}$*, kde* s, t, u, v *jsou počty čísel ve zbytkových třídách mod 4. Celkový stupeň dvojky je alespoň* $\sum_{i=1}^{42} 2^i \binom{2^{42-i}}{2}$*, což lze spočítat vzorcem pro součet geometrické řady nebo nějakým z povolených nástrojů:* `http://www.wolframalpha.com/input/?i=sum%282^41*%282^%2842-t%29-1%29%2C1%2C42%29` *říká 60672.*

27. Mějme posloupnost danou vztahy $a_1 = 1$, $a_{3n} = a_n + 1$, $a_{4n} = a_{3n+1} + a_n - 1$, $a_{2n} = a_n$. Určete $a_{999999999}$.

Řešení 27 *Posloupnost udává počet trojek v rozkladu* n *na prvočísla zvětšený o 1, protože 999999999 je dělitelné 81, ale ne 243, je výsledek 5.*

28. Nechť b_n je poslední cifra čísla $1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$. Posloupnost b_n je periodická. Jaká je její nejkratší perioda?

Řešení 28 *Užitím Malé Fermatovy věty snadno nahlédneme, že každých 20 čísel zvětší poslední cifru o 4 (nebo -6). Aby se tato cifra vrátila na nulu, musíme 20 prvků přičíst pětkrát, proto je perioda 100.*

29. Pravidelný 1024-úhelník o straně 1 byl rozřezán na rovnoběžníky. Určete součet obsahů všech obdélníků v takovémto rozřezání.

Řešení 29 *256*

30. Uvažujme obdélníkový pás $2 \times n$ a označme P_n počet všech takových obarvení některých jeho polí, že žádný čtverec 2×2 v něm nebude celý obarven. Najděte největší mocninu trojky, která dělí číslo P_{2010}. Jako odpověď zadejte exponent.

Řešení 30 *Počet takových pásů délky n splňuje $a_1 = 4$, $a_2 = 15$, $a_n = 3a_{n-1} + 3a_{n-2}$. Položme $b_n = \frac{a_n}{3^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$, máme $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ pro n sudé a $b_n = 3a_{n-1} + b_{n-2}$. Protože $b_1 = 4$, $b_2 = 5$, jsou b_i celá čísla a hledaná mocnina je alespoň 1005. Zbytky b_n mod 3 se opakují, pro $n = 2010$ vyjde zbytek nenulový, hledaný exponent je proto právě 1005.*

Mathrace Sada 3

odevzdávejte do 19.00

31. Nechť p, q, r jsou celá čísla mající právě dva dělitele v oboru přirozených čísel (ale sama mohou být záporná). Kolik řešení pak má rovnice $\frac{1}{p-q-r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$?

Řešení 31 *Z jednoznačnosti rozkladu $(p-q-r)(q+r) = qr$ máme 8 možností, na řešení jich vede pouze 6.*

32. Čemu se rovná 84, jestliže $8.8 = 54$? Tato otázka není nesmyslná, protože 54 není napsáno v desítkové soustavě. Takto položenou otázku lze interpretovat dvěma způsoby, obě odpovědi se považují za správné.

Řešení 32 *Číslo* 54 *je zapsáno ve dvanáctkové soustavě, neboť* $64 = 5.12+4$. *Číslo* 84 *(dvanáctkově) přepsané do desítkové soustavy dává* $8 \cdot 12 + 4 = 100$. *Výsledkem je tedy* 100. *Druhá interpretace je taková, že číslo* 84 *je zadáno desítkově a výsledek se vyžaduje dvanáctkově, v tom případě je odpověď 70.*

33. Najděte všechny trojice p, q, r reálných čísel splňující

$$\log pqr = -2 \tag{1}$$
$$\log p \log q \log r = 2 \tag{2}$$
$$\log p \log q + \log p \log r + \log r \log q = -1 \tag{3}$$

(Funkce log je logaritmus o základu 10.) Výsledek zadejte jako součet p, q, r.

Řešení 33 *Logaritmy jsou dle Viètových vztahů řešeními polynomu x^3+2x^2-x-2, jsou tedy rovny číslům $-1, 1, -2$. Hledaný součet je roven* $10^1 + 10^{-1} + 10^{-2} = 10.11$

34. Mějme čtverec $ABCD$ o straně 1. Body E, F uvnitř čtverce minimalizují součet $4|AE| + 3|DE| + 4|BF| + 3|CF| + 5|EF|$. Určete vzdálenost $|EF|$.

Řešení 34 *Dokreslíme trojúhelníky s přeponami AD, BC o stranách 0.6, 0.8 a 1 a opíšeme jim kružnice. Z Ptolemaiovy věty snadno odvodíme, že hledaný součet lze zdola odhadnout pětinásobkem vzdálenosti přidaných vrcholů. Hledané body mají vzdálenost 0.04.*

35. Krychli o hraně 1 rozvineme do roviny a zkonstruujeme nejmenší kružnici, která vzniklou síť obsahuje. Jaký největší poloměr může taková kružnice mít?

Řešení 35 *Tento poloměr maximalizuje síť, která se skládá ze dvou trojic čtverců spojených hranou. Poloměr kružnice určíme z Pythagorovy věty jako* $\sqrt{5^2+2^2}/2 = 2.6926$.

36. Je dán pravidelný dvanáctiúhelník $A_1A_2A_3 \ldots A_{12}$ vepsaný kružnici s poloměrem 10. Vypočtěte obsah lichoběžníku $A_1A_2A_4A_5$.

Řešení 36 $S = 50$

37. Všiml jsem si, že mé hodinky ve dne (0,5 dne) předbíhají správný čas o půl minuty, v noci (0,5 dne) se zase zpožďují o $\frac{1}{3}$ minuty. Ráno 1. května ukazovaly správný čas. Kolikátého května půjdou napřed o 5 minut?

Řešení 37 *O* 5 *minut se budou předbíhat večer 28. května.*

38. Číslo X je větší než 100 a jeho cifry tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $q \in \mathbb{R}^+$, $q \neq 1$. Určete součet všech možných hodnot čísla X.

Řešení 38 *124+139+421+469+248+842+931+964+1248+8421=13807*

39. Matej, Mirek, Zdeněk, Petr, Vlado a Zbyněk se občas potkávají ve škole. Matej chodí do školy každý druhý den, Mirek každý třetí, Vlado každý čtvrtý, Zdeněk každý pátý, Zbyněk každý šestý a Petr každý sedmý. Protože jsou to svědomití studenti, chodí do školy i o svátcích a prázdninách. V roce 2010 se jednoho dne potkali. Který den to bylo, pokud víte, že Zdeněk byl ve škole 12.1.2010, Petr 13.2.2010, Zbyněk 14.3.2010 a Vlado 13.4.2010. Zadejte součet dne a měsíce.

Řešení 39 *Bylo to 4.9., proto 13.*

40. Henry, Liběnka a Matěj hráli hru zvanou Magická trojka. Každý hráč měl 3 hromádky mincí: koruny, dvoukoruny a pětikoruny. Na začátku byly hromádky prázdné. V každém tahu musel hráč přidat právě jednu z kombinací mincí:

    a) Jednu 1 Kč, pět 2 Kč a čtyři 5 Kč
    b) Tři 1 Kč, jednu 2 Kč a dvě 5 Kč
    c) Čyři 1 Kč, tři 2 Kč a jednu 5 Kč

    Vyhrál ten, kdo své hromádky doplnil nejdříve tak, aby počet mincí na každé z nich byla třetí mocnina stejného přirozeného čísla k. Protože všichni hrají optimálně, ten, kdo začíná, vyhraje. Po kolika nejméně kolech to může nastat? (Kolo je tvořeno třemi tahy, každý hráč v něm táhne právě jednou.)

Řešení 40 *Řešením soustavy rovnic*

$$\begin{aligned} a + 3b + 4c &= k^3 \\ 5a + b + 3c &= k^3 \\ 4a + 5b + c &= k^3 \end{aligned}$$

máme $a = \frac{k^3}{8}$, $b = \frac{9k^3}{40}$, $c = \frac{k^3}{20}$. *Nejmenší* k*, pro která jsou všechny tyto výrazy celočíselné, je* $k \geq 10$. *Pro* $k = 10$ *je* $a + b + c = 400$.

41. Kolika způsoby můžu vybrat 3 různé číslice (z množiny $\{0, 1, .., 9\}$) tak, abych žádné dvě nebyly po sobě jdoucí?

Řešení 41 *56*

42. Jaké jsou možnosti pro největší úhel v trojúhelníku, který lze rozřezat na 5 trojúhelníků, které jsou všechny podobné původnímu? Výsledek uveďte jako součet všech možných řešení.

Řešení 42 *90+120=210.*

43. Liběnka se dočetla, že v roce 2012 bude už zase konec světa, a to hned několikrát. Všechna data však měla společné to, že trojnásobek součtu všech cifer v celém datu (tj. např pro 24.11.2010 2+4+1+1+2+0+1+0=11) byl roven součtu dne a měsíce. Jaká data to byla? Z každého data vezměte pouze den a tyto dny sečtěte.

Řešení 43 *Možná data jsou 30. 3. 2012, 23.10. 2012, 22. 11. 2012 a 21. 12. 2012, proto 96.*

44. V pěti domech pěti různých barev žije pět lidí pěti různých národností, každý má jiné auto, jiný oblíbený sport a chová jiné zvíře. Víte, že

- Hokejista bydlí hned napravo od hráče rugby.
- Volkswagen parkuje před prvním domem.
- Švýcar žije hned nalevo od černého domu.
- Chovatel psů hraje lakros.
- Mezi domem, u nějž parkuje Ford, a žlutým domem je právě jeden dům.
- Pátý dům je šedý.
- Mezi domem se psy a žlutým domem jsou dva domy.
- Želvy žijí hned vedle černého domu.
- Mezi domem hráče lakrosu a zeleným domem je právě jeden dům.
- Ir žije v domě č.2.
- Kočky žijí hned vedle domu se Seatem.
- Řek žije nalevo od řidiče BMW.
- Mezi chovatelem motýlů a hráčem rugby jsou dva domy.
- Mezi řidiči Porsche a Volkswagenu je jeden dům.
- Ir hraje rugby.
- Švéd řídí BMW.
- Fotbalista chová želvy.

Jako řešení zadejte první písmena značek aut od prvního k pátému domu.

Řešení 44 *VFPBS. Úlohu jsme převzali z online generátoru:* `http://www.mensus.net/brain/logic.shtml?code=545D7E.55D518F`

45. Trojúhelník ABC má délky stran $a = 49$, $b = 61$, c je celé číslo. Najděte hodnotu c tak, aby byl ABC podobný trojúhelníku, jehož strany ve vhodném pořadí mají délky t_a, t_b, t_c, což jsou délky těžnic trojúhelníku ABC.

Řešení 45 *Vzpomeneme si na vzorec* $4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - d^2$. *Sečtením jeho cyklických záměn zjistíme koeficient podobnosti trojúhelníků. Musí platit* $a^2 + c^2 = 2b^2$ *nebo nějaká cyklická záměna, ze tří možných c je celočíselné pouze* 71.