U většiny úloh jsou uvedeny pouze číselné výsledky.

Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.00

1. Kolik jedniček je obsaženo v číslech od jedné do milionu (včetně)?

   Řešení 600001

2. Označme A_n množinu n-ciferných čísel obsahujících jedničku a B_n množinu n-ciferných čísel neobsahujících jedničku. Pro která přirozená n je A_n menší než B_n?

   Formát odpovědi: Pokud je takových n je konečně mnoho, zadejte je jako rostoucí posloupnost čísel oddělených čárkou, v opačném případě napište „nekonecno“.

   Řešení 1,2,3,4,5,6

3. Najděte součin tří nejmenších celých kladných čísel, která nelze vyjádřit jako rozdíl prvočísel.

   Řešení $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$

4. Z číslic 2, 3, 6, 8, 9 sestavte dvě přirozená čísla tak, aby jejich součin byl maximální. Každou cifru smíte použít nejvýše jednou. Jako výsledek zadejte výsledný součin.

   Řešení 80166

5. Domorodec si chce u obchodníka koupit kalkulačku za 11 liber. Má u sebe ale pouze místní měnu: kaie, limy a mogy, od každého 11 ks. Převodní kurz je takový, že 11 kaiů je 15 liber, 11 limů je 16 liber a 11 mogů je 17 liber. Jakou kombinací mincí má za kalkulačku zaplatit?

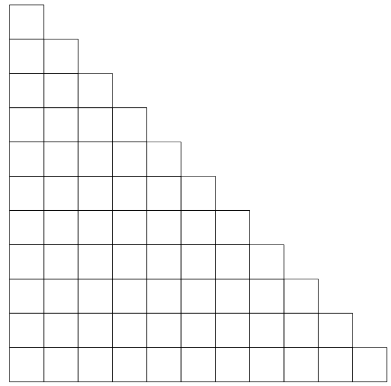
   Formát odpovědi: čtveřice čísel a, K, L, M oddělených čárkou, kde a je počet řešení úlohy a K, L, M jsou po řadě počty kaiů, limů a mogů v takovém řešení, že je $K+2L+3M$ minimální.

   Řešení $1, 7, 1, 0$

6. Kolikrát mezi jednou hodinou odpolední 2.12.2009 a desátou ranní 3.12.2009 svírají hodinová a minutová ručička pravý úhel?

   Řešení 38

7. Kolik čtverců je na obrázku?



Řešení 161=1+6+15+28+45+66

8. Na stole leží 84 korun. Každou druhou nahradíme dvoukorunou. Pak začneme od začátku a každou třetí minci nahradíme pětikorunou. Pak každou čtvrtou minci nahradíme desetikorunou. Jaká celková částka (v korunách) je na konci na stole?

Řešení $371 = 7 \cdot (1 + 2 + 5 + 10 + 1 + 5 + 1 + 10 + 5 + 2 + 1 + 10) = 7 \cdot 53$

9. Najděte součet všech přirozených čísel menších než 1000 takových, že se každé z nich skládá z různých sudých cifer a je dělitelné 9.

Řešení 3996

10. Na kulečníkovém stole jsou černá a bílá koule o nulovém poloměru (jde tedy o hmotné body). Pomocí tága rozpohybujeme bílou kouli tak, aby se čtyřikrát odrazila od mantinelu a poté narazila do černé koule. Bílá koule se pohybuje po lomené čáře, která se láme pouze na mantinelech a to podle zákona o úhlu odrazu. Přitom nesmí spadnout do děr v rozích (které jsou zanedbatelně malé) a před čtvrtým odrazem od mantinelu se nesmí dotknout černé koule. Kolik nejvýše může existovat způsobů, jak tohoto docílit?

Řešení 16

11. Do rovnostranného trojúhelníku ABC je vepsán rovnostranný trojúhelník KLM tak, že KL je kolmé k AB. Je-li obsah trojúhelníku KLM 10, jaký je obsah trojúhelníku ABC?

Řešení 30

12. Kruhový stolek se dotýká severní a západní stěny pokoje. Jeden bod na jeho obvodu je od severní stěny vzdálen 10 cm, od západní 5 cm. Jaký je poloměr stolku v cm, je-li větší než 5 cm?

Řešení 25

13. Nechť a, b, c jsou čísla z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (ne nutně různá). Jaká je pravděpodobnost, že $ab + c$ je liché?

Řešení 0.528

14. Trojúhelník má strany o délkách 11, 15 a k, kde k je přirozené číslo. Kolik takových přirozených čísel k existuje, jestliže je trojúhelník tupoúhlý?

Řešení 13 (5 až 10, 19 až 25)

15. Kolik různých prvočísel se nachází v rozkladu přirozeného čísla N na součin prvočísel, jestliže

$$\log_2(\log_3(\log_5(\ldots \log_p(N)\ldots) = 2009,$$

kde p značí 2009-té prvočíslo v řadě $2, 3, 5, \ldots$.

Řešení 1

16. Kolik nejvíce podmnožin množiny {1,2,…,2009} můžeme vybrat tak, aby žádné dvě nebyly disjunktní.

    Formát odpovědi: posledních 5 cifer čísla.

    Řešení 20256

17. Určete součet nejmenších deseti přirozených čísel n, pro která je polynom $x^4 - (2n + 4)x^2 + (n-2)^2$ součinem dvou nekonstantních polynomů s celočíselnými koeficienty.

    Řešení 151, pro $n = 2$ lze vytknout x. Dále řešme případy, kdy $2 \neq n$ a 0 není kořen. Má-li být polynom dělitelný $(x + r)$, musí být ze sudosti funkce dělitelný i $(x - r)$ a tedy i $(x^2 - r^2)$. Zadaný polynom lze proto zapsat jako součin nekonstantních polynomů s celožíselnými koeficienty právě když jej lze zapsat jako $(x^2 - p)(x^2 - q)$ nebo $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$, kde p, q, a, b, c, d jsou reálná čísla. V prvním případě jsou p, q kořeny polynomu $y^2 - (2n+4)y + (n-2)^2$. Jeho diskriminant musí být druhá mocnina, proto $8n = t^2$ pro nějaké $t = 4k$, kde k je celé číslo. Pak $n = 2k^2$,$p, q = 2k^2 + 2 \pm 4k$.

    Ve druhém případě máme z nulovosti dvou koeficientů tvar rozkladu $(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + b) = x^4 + (2b - a^2)x^2 + b^2$, odtud porovnáním koeficientů $b = n - 2$, $-2n - 4 = 2n - 4 - a^2$, $a^2 = 4n$, n musí být čtverec: $n = l^2$, $a = 2l$, $b = l^2 - 2$.

    V obou případech jsme nalezli nutné podmínky pro n způsobem, při němž jsme současně zkonstruovali dané rozklady. Vyhoví proto právě ta n, která lze psát jako $2k^2$ nebo l^2. Mezi nimi je i 2, kterou jsme brali jako zvláštní případ. Nejmenších 10 vyhovujících n jsou 1, 2, 4, 8, 9, 16, 18, 25, 32, 49,

18. Pro každé přirozené číslo n označme $f(n)$ číslo, které z čísla n vznikne násobným opakováním operace ciferného součtu. Přesněji pro jednociferná n je $f(n) = n$ a pro víceciferná je $f(n) = f(c(n))$, kde c značí ciferný součet. Najděte součet všech přirozených $n < 100$, která splňují rovnost $f(n) = f(3n)$.

    Řešení $9 + 18 + \cdots + 99 = 594$

19. Nechť S je podmnožina množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ taková, že S neobsahuje žádnou trojci čísel, která by byla po dvou nesoudělná. Kolik nejvíce prvků má S?

    Řešení 4

20. Určete počet permutací $(a_1, a_2, \dots a_{12})$ množiny $\{1, 2, \dots, 12\}$ pro která je součin

$$(a_1 - 1) \cdot (a_2 - 2) \cdot \dots \cdot (a_{12} - 12)$$

    lichý.

Řešení $720^2 = 518400$

21. Na fakultě jsme vyslechli následující rozhovor studentů:

    Adéla: „Jsem blázen.“

    Bedřich: „Studuju matematiku.“

    Cyril: „Já studuju fyziku.“

    Darina: „Nejsem blázen.“

    Adéla: „Cyril studuje matematiku.“

    Bedřich: „Darina je blázen.“

    Cyril: „Bedřich studuje fyziku.“

    Darina: „Cyril není blázen.“

    Víte navíc, že

    - Každý student je buď matematik, nebo fyzik.
    - Každý student buď je, nebo není blázen.
    - Matematici říkají to, co si myslí.
    - Fyzici říkají opak toho, co si myslí.
    - To, co si myslí blázni, není pravda.
    - To, co si myslí ti, kteří nejsou blázni, je pravda.

    Popište čtveřici studentů.

    Formát odpovědi: osmice písmen, první dvě popisují Adélu, další dvě Bedřicha, další dvě Cyrila a poslední dvě Darinu. První písmeno ve dvojici je M nebo F podle toho, co daný člověk studuje. Druhé je B nebo N podle toho, jestli je blázen nebo ne.

    Řešení FBMNMBMB

22. Správné odpovědi k MathRace jsou uloženy v trezoru. K němu má přístup 11 organizátorů. Kolik nejméně zámků musí na trezoru být a kolik nejméně klíčů od každého musíme vyrobit, chceme-li rozdat klíče organizátorům tak, aby mohli trezor otevřít, právě když se jich sejde alespoň polovina.

    Formát odpovědi: dvojice čísel oddělených čárkou, první je počet zámků, druhé počet klíčů od každého zámku.

    Řešení $\binom{11}{5} = 462, 6$. Žádná pětice nemůže trezor otevřít sama, proto pro každou pětici existuje zámek, od kterého tato pětice nemá klíč. Kdyby existovaly dvě různé pětice, kterým chybí klíč od stejného zámku, nemohlo by ani sjednocení těchto pětic trezor otevřít, což nelze. Proto je klíčů alespoň tolik, jako pětic lidí. Kdyby od nějakého zámku bylo méně než šest klíčů, existovala by šestice lidí, která by zámek nemohla odemčít, od každého zámku je proto alespoň šest klíčů.

23. Je dána pětice čísel. Když je sčítáme po dvou, můžeme dostat součty 16, 18,19, 20, 21, 22, 23, 24, 26 a 27. Jaká jsou to čísla?

    Formát odpovědi: neklesající posloupnost pěti čísel oddělených čárkou.

Řešení 7,9,11,12,15

24. Pět loupežníků si chce rozdělit lup v podobě 1000 grošů. Postupně sdělují ostatním své nabídky na rozdělení. Pokud s nabídkou prvního souhlasí alespoň polovina ostatních loupežníků, nabídku přijmou. Pokud ne, prvního zabijí a nabízí druhý. Takto pokračují, dokud nějakou nabídku nepřijmou.

    Nejdůležitější pro loupežníka je získat co nejvíce peněz. Druhou nejvyšší prioritu má zabít co nejvíc ostatních loupežníků. Loupežník bude hlasovat proti nabídce, i kdyby kvůli tomu měl přijít o život. Nabídku ale podpoří, pokud tím získá jediný groš.

    Všichni loupežníci vědí, že ostatní loupežníci mají stejné priority a jednají naprosto logicky. Není možné operovat s menším finančním obnosem než 1 groš.

    Jaké rozdělení lupu má navrhnout první loupežník?

    Formát odpovědi: posloupnost pěti čísel oddělených čárkami, kde i-té číslo říká, kolik navrhne i-tému loupežníkovi.

    Řešení 997,0,1,0,2 Kdyby zbyli jen čtvrtý a pátý loupežník, čtvrtý navrhne cokoliv, pátý ho zabije a vše si nechá. Kdyby zbyli třetí, čtvrtý a pátý, třetí nabídne čtvrtému jeden groš, pátému nic a sám si nechá 999, tato nabídka bude schválena (čtvrtému se vyplatí). Kdyby zbyli všichni krom prvního, nabídne druhý pátému groš, čtvrtému dva, třetímu nic a sám si nechá 997. Tuto nabídku odpoří pátý i čtvrtý. První proto nabídkou 997,0,1,0,2 uspokojí třetího i pátého.

25. Nechť a, b, c, d, e, f, g, h jsou reálná čísla splňující

$$
\begin{aligned}
a + 4b + 9c + 16d + 25e + 36f + 49g &= 1\\
4a + 9b + 16c + 25d + 36e + 49f + 64g &= 12\\
9a + 16b + 25c + 36d + 49e + 64f + 81g &= 123
\end{aligned}
$$

    Určete hodnotu $16a + 25b + 36c + 49d + 64e + 81f + 100g$.

    Řešení 334

26. V roce 2008 evidovala seznamka Naslepo s.r.o. x mužů a y žen, přičemž $x > y$. Schůzky jim domlouvali na základě losování z množiny všech klientů. Pravděpodobnost, že vylosují dvojici opačného pohlaví byla 50%. V roce 2009 vzrostl počet klientů oproti roku 2008 o 100. Stále je mezi klienty více mužů než žen a pravděpodobnost vylosování dvojice opačného pohlaví je stále 50%. Kolik můžů a žen je mezi klienty seznamky v roce 2009?

    Formát odpovědi: dvojice čísel oddělených čárkou, první udává počet mužů, druhé počet žen.

    Řešení 351,325

27. Pupa si myslí trojmístné číslo dělitelné 29. Když prohodí poslední dvě cifry, dostane číslo o 72 větší. Jaké je myšlené číslo?

    Řešení 319

28. Je dán pravidelný 2009-úhelník. Náhodně vybereme dvě disjunktní trojice vrcholů mnohoúhelníku. Jaká je pravděpodobnost, že se trojúhelníky určené vybranými vrcholy neprotínají?

Řešení $0.3 = 6/20$

29. Na šachovnici 3×3 jsou v horních rozích bílí jezdci a v dolních rozích černí jezdci. Kolik nejméně tahů je potřeba, aby se černí jezdci dostali do horních rohů a bílí do dolních?

Řešení 16

30. Opravte pravou stranu jedné z rovnic tak, aby měla soustava řešení a toto řešení uveďte:

$$x + y = 41,\ y + z = 13,\ x + z = 16,\ 2x + y + z = 55,\ x + 2y + z = 52.$$

Formát odpovědi: trojice čísel x, y, z v tomto pořadí oddělených čárkou.

Řešení $21, 18, -5$

31. Na ulici jsou čtyři domy různých barev, v nich bydlí lidé Nor, Ir, Rus a Slovinec, každý chová jiné zvíře a pije jiný nápoj.

    (a) Nor bydlí nalevo od Slovince.
    (b) Rus bydlí těsně nalevo od růžového domu.
    (c) Kočky jsou v domě hned vedle muže, který pije kávu.
    (d) Člověk, který pije víno, bydlí těsně napravo od člověka, který pije čaj.
    (e) Nor bydlí napravo od želv.
    (f) Modrý dům je napravo od hnědého.
    (g) Třetí dům zleva je modrý.
    (h) Mezi koňmi a osobou pijící čaj je jeden dům.

    Kde kdo bydlí?

    Formát odpovědi: řetězec čtyř počátečních písmen jejich národností v pořadí, ve kterém bydlí (zleva doprava).

    Řešení INRS,RINS,RNIS,RNSI

32. Najděte součet čísel $a \in \mathbb{N}$ takových, že pro dané a existuje trojice přirozených čísel (b, c, d) splňující $a + b = cd$, $c + d = ab$, $a \leq b$, $a \leq c \leq d$?

    Řešení ANULOVÁNO (správná odpověď je 3)

33. Policii se podařilo dopadnout při loupeži trojici bratrů. Vědí, že jde o Alfonse, Bořka a Cecila, ale nevědí, který je který. Vědí také, že Alfons vždy mluví pravdu, Bořek vždy lže a Cecil někdy mluví pravdu a někdy lže. Policista si je postaví vedle sebe a ptá se: „Jak se jmenuje ten uprostřed?“

    Levý odpoví:„Alfons“

    Prostřední odpoví:„Bořek“

    Pravý odpoví:„Cecil“

    V jakém pořadí stáli?

    Formát odpovědi: trojice prvních písmen jejich jmen v pořadí, ve kterém stojí (zleva doprava).

    Řešení BCA

34. Máme osm kuliček, z nichž každá má jinou hmotnost. Kolik potřebujeme vážení na rovnoramenných vahách k tomu, abychom našli nejlehčí a nejtěžší kuličku?

Řešení 10

35. Na tabuli je napsáno pět vět.

    1. Věty 4 a 5 jsou nepravdivé.
    2. Věty 4 a 5 jsou nepravdivé.
    3. Věta 1 je stejně pravdivá jako věta 4.
    4. Věta 5 je nepravdivá.
    5. Věta 1 je pravdivá, ale věta 2 je nepravdivá.

    Rozhodněte, které věty jsou pravdivé.

    Formát odpovědi: pětice písmen, z nichž i-té je P, pokud je i-tá věta pravdivá a N, pokud je nepravdivá.

    Řešení NNNPN

36. Určete přirozené číslo, které v číselné soustavě při základu n má zápis $xyz0$ a v soustavě při základu $2n$ má zápis $yz5$.

    Formát odpovědi: trojice číslic xyz, tentokrát cifry čárkami neoddělujte.

    Řešení 234

37. Na chodbě potkáme čtyři studenty, kteří studují matematiku nebo fyziku. Narozdíl od prvního příkladu žádný z nich není blázen. Fyzikové vždy lžou a matematici vždy mluví pravdu. Každý z nich buď fandí nebo nefandí Brněnskému klubu Kometa.

    První povídá: „Jsem fyzik a fandím Kometě.“

    Druhý povídá: „Jsem fyzik nebo fandím Kometě.“

    Třetí povídá: „Je-li mezi námi jediný fyzik, jsem to já.“

    Čtvrtý povídá: „Fanoušků Komety je mezi námi alespoň tolik, co fyziků.“

    Formát odpovědi: osm písmen, vždy dvě písmena popisují jednoho studenta. První písmeno ve dvojici je M,F podle toho, jestli je student matematik nebo fyzik a druhé K nebo N podle toho, jestli fandí Kometě nebo ne. Písmena neoddělujte.

    Řešení FNMKMNFN

38. Alfons, Bořek, Cecil, Dušan a Emil jsou bratři, každý je jinak vysoký. Alfons je menší než Emil. Dušan je vyšší než Alfons i Emil. Alfons není nejmenší. Bořek je menší než Emil. Dušan není nejvyšší. Seřaďtě bratry podle výšky.

    Formát odpovědi: první písmena jejich jmen od nejmenšího k nejvyššímu.

    Řešení BAEDC

39. Polynom P čtvrtého stupně má tu vlastnost, že pro všechna x z intervalu $\langle -1, 1\rangle$ je $P(x) \in \langle 0, 1\rangle$. Jaký nejvyšší koeficient může mít u x^4?

Řešení 4

40. Uvažme všechny dvojice přirozených čísel x a n takových, že $x^{n+1} - (x+1)^n = 2001$. Součet všech vyhovujících x označme S_x, součet všech n je S_n.

Formát odpovědi: dvojici čísel S_x, S_n v tomto pořadí oddělených čárkou

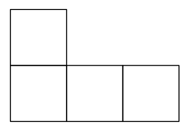
Řešení 13,2

41. Určete počet permutací $(a, b, c, d, e, f, g, h, i)$ množiny $\{-4, -3, ..., 4\}$, pro které je

$$a + b + c = d + e + f = 0.$$

Řešení $2592 = 2 \cdot 6^4$

42. Je dána šachovnice o rozměrech 7×7. Sloupce jsou označeny písmeny A až G, řádky čísly 1 až 7. Chceme odebrat jedno pole tak, aby bylo možné zbylá pole pokrýt L-tetrominy(viz obrázek). Tetromina je možno otáčet i překlápět.Určete souřadnice polí, která lze odebrat.



Formát odpovědi: označení polí seřazené abecedně podle sloupců, v případě shody podle řádků (např. A1A4C3C5D2)

Řešení B2B4B6D2D4D6F2F4F6

43. Kolik existuje řetězců délky 2009 složených z jedniček a nul takových, že pro každý jeho podřetězec p platí $|j(p) - n(p)| \leq 2$, kde $j(p)$ je počet jedniček v p a $n(p)$ je počet nul v p.

Formát odpovědi: posledních 5 cifer čísla

Řešení 40062

44. Uvažujme posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_k$ přirozených čísel nejvýše rovných 2009. Určete maximální počet členů takové posloupnosti, když víte, že každé dva její sousední členy jsou různé a navíc v ní neexistuje čtveřice indexů $p < q < r < s$ splňující $a_p = a_r \neq a_q = a_s$.

Řešení 4017

45. Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_5$ jsou množiny o pěti prvcích a $A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = A_3 \cap A_4 = A_4 \cap A_5 = A_5 \cap A_1 = \emptyset$. Kolik nejméně prvků může obsahovat sjednocení všech pěti množin A_i?

Řešení 13