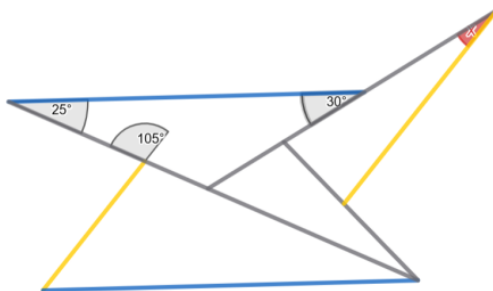
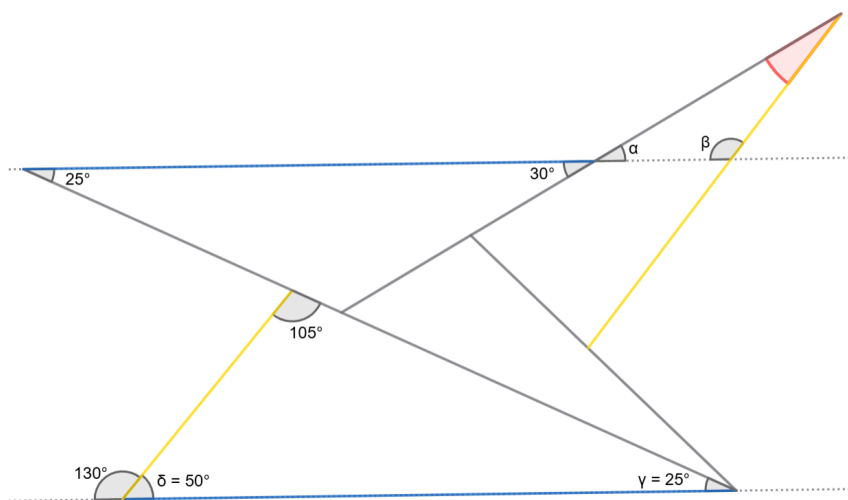


**16. ÚHLOVÁ ÚLOHA**

Jaká je velikost červeného úhlu x ? (Víte, že vyznačené úhly jsou zleva 25° , 105° , 30° a žluté a modré úsečky jsou rovnoběžné. Zadejte ve stupních.)

**Výsledek: 20****Postup řešení:**

Jako první krok si prodloužíme modré rovnoběžky. Dále, čeho si můžeme hned všimnout je, že $\alpha = 30^\circ$, protože je to vrcholový úhel s úhlem ze zadání. Z vlastností rovnoběžek pak dostáváme $\gamma = 25^\circ$ a z vlastností trojúhelníků, že součet jejich vnitřních úhlů je vždy 180° , vidíme, že $\delta = (180 - 105 - 25)^\circ = 50^\circ$. Opět z vlastností rovnoběžek ale dostáváme, že β a vedlejší úhel úhlu δ mají stejnou velikost, tzn. $\beta = (180 - 50)^\circ = 130^\circ$. Celkem tedy máme:

$$x = (180 - \alpha - \beta)^\circ = (180 - 30 - 130)^\circ = 20^\circ$$

17. BRKOŘEKA

Oskar, Lukáš, Ráďa a Tonda se potřebují dostat z jednoho břehu řeky na druhý. Bohužel ale mají pouze jedny siamské brkoplavky, do kterých se najednou vejdou maximálně dva. Najednou tedy mohou řeku přeplavávat maximálně dva, a to pouze pokud na jejich břehu jsou plavky. Oskar řeku přeplave za 1 minutu, Lukáš za 2 minuty, Ráďa za 5 minut a Tonda za 10. Pokud plavou dva spolu, budou plavat rychlostí toho pomalejšího. Za kolik minut můžou být nejdříve všichni na druhém břehu?

Výsledek: 17

Postup řešení:

Klíčem k minimalizaci celkového času je zajistit, aby nejpomalejší (Ráďa a Tonda) přeplavali řeku společně, a aby zpět plavali vždy ti nejrychlejší (Oskar a Lukáš).

Tabulka 1: Optimalizovaný postup převozu přes řeku

Krok	Pasažéři	Čas	Startovní břeh	Cílový břeh	Kumulativní čas
1	O + L (přes)	2	R, T	O, L	2
2	O (zpět)	1	O, R, T	L	2 + 1 = 3
3	R + T (přes)	10	O	L, R, T	3 + 10 = 13
4	L (zpět)	2	O, L	R, T	13 + 2 = 15
5	O + L (přes)	2	∅	O, L, R, T	15 + 2 = 17

Všichni mohou být nejdříve na druhém břehu za 17 minut.

18. ZA SEDMERO HORAMI

Libovolné přirozené číslo můžeme redukovat pomocí jeho ciferného součtu až na jednociferné číslo. Např. číslo 987 zredukujeme na $9 + 8 + 7 = 24$ a to zredukujeme na $2 + 4 = 6$. Redukce čísla 987 je tedy číslice 6. Kolik existuje čísel do 999, která se zredukují na číslici 7?

Výsledek: 111

Postup řešení:

Jak je známo, ciferný součet zachovává zbytek po dělení devíti (neboť $10^n \equiv 1 \pmod{9}$). Tedy nutně i opakovaný ciferný součet. Proto se číslo zredukuje na 7 právě tehdy, když dává zbytek 7 po dělení devíti. Takových čísel je v rozmezí do 999 právě 111.

19. PROCHÁZENÍ

Máme kvadratický polynom, který má v bodech 1, 2, 3 následující funkční hodnoty: $f(1) = 18, f(2) = 38, f(3) = 64$. Najděte tento polynom a jako řešení запиšte absolutní hodnoty jeho koeficientů za sebe, např. 1213 pro $x^2 - 21x + 3$.

Výsledek: 3114

Postup řešení:

Kvadratické polynomy jsou tvaru $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tuto úlohu lze vyřešit mnoha způsoby, například tipováním, dokud to nezačne sedět, nebo vyřešením následující soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}f(1) &= a + b + c = 18 \\f(2) &= 4a + 2b + c = 38 \\f(3) &= 9a + 3b + c = 64\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3a + b &= 20 \\8a + 2b &= 46\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2a &= 6 \Rightarrow a = 3 \\3a + b &= 9 + b = 20 \Rightarrow b = 11 \\a + b + c &= 14 + c = 18 \Rightarrow c = 4\end{aligned}$$

Takže $f(x) = 3x^2 + 11x + 4$, a výsledek je 3114.

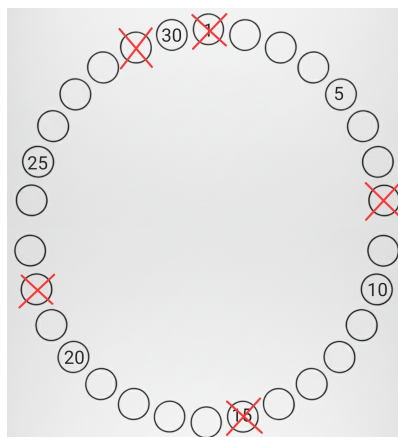
20. SVANIČKA

Anička má vždy po učení matematiky velký hlad, proto se rozhodla všem 30 žákům sníst svačinu. Aby to bylo zajímavé, žáky nechala sednout do kružnice, rovnoměrně daleko od sebe. Aniččino svačení probíhalo následovně: sní někomu svačinu, jde po směru hodinových ručiček. Počítá si, okolo kolika žáků, kteří ještě mají svačinu, prošla. Jakmile narazí na sedmého takového žáka, sní mu svačinu a dále pokračuje stejným způsobem. (Jakmile tedy zbyde poslední žák, chuděra Anička musí obejít 7 kol, než mu bude moci sníst svačinu.) Skončí, když sní poslední svačinu. Kolik celkem ujde úhlových stupňů kolem kružnice?

Výsledek: 9192

Postup řešení:

Bohužel nám nezbyde nic jiného než projít si Aniččinu cestu a postupně škrtat studenty se sněženou svačinou. Doporučujeme si označit studenty čísly 1 až 30. Dopočítáme úhel mezi studenty jako $\alpha = \frac{360^\circ}{30} = 12^\circ$. Vytvoříme si hezký nákres a pustíme se do díla. Takto vypadá situace po prvním obejití kruhu:



A pro pořádek uvádíme i tabulku s čísly studentů, jimž byla v daném kole sněžena svačina:

Kolo	1	2	3	4	5	6	7
Sněženo	1,8,15,22,29	7,16,24	3,12,21	2,13,25	6,19	4,18	5,23

Kolo	8	9	10	11	13	15	17	20	26
Sněženo	11,30	27	26	28	10	20	9	14	17

Skončili jsme ve 26. kole u sedmnáctého studenta, celkem tedy Anička obešla

$$25 \cdot 360^\circ + 16 \cdot \alpha = 9192^\circ$$

21. RÁĎA S LEOU PERMUTUJÍ

Na stole jsou v řadě papírky s čísly 1 až 12 seřazené vzestupně. Prvně přijde Lea a zamíchá je opět do řady tak, že číslo, které bylo na daném místě původně, má stejný zbytek po dělení třemi jako nové číslo. Potom přijde Ráďa a opět čísla zamíchá, tentokrát tak, že nová čísla mají stejnou paritu jako ta, která byla na daném místě po Leině zamíchání. Kolik je možností, jak řada čísel vypadá na konci?

Výsledek: 111 974 400

Postup řešení:

Podívejme se, co se může stát s čísly 1, 4, 7, 10. Všechna mají stejný zbytek po dělení třemi, a tak při Leině zamíchání dojde k nějaké jejich permutaci. Dvě z nich jsou sudá a dvě lichá, což se zachová i při Ráďině zamíchání. Na konci tedy na těchto místech musí být čtveřice čísel, z nichž dvě jsou sudá a dvě lichá. To samé platí i pro čtveřice čísel se zbytky 2 a 0.

Dále vysvětlíme, že každé takové zamíchání, které zachovává počty sudých a lichých čísel ve čtveřicích, můžeme získat. Každé dvojici zbytků po dělení třemi a dvěma odpovídají dvě čísla. Známe-li počáteční pořadí a konečné pořadí papírků, dostáváme na každém místě dvě možnosti, jak mohlo vypadat prostřední zamíchání. Když bude konečné pořadí splňovat naši podmínku, budou každé dvojici možných čísel v prostředním zamíchání odpovídat dvě pozice. Stačí tedy tato dvě čísla na daná místa nějak přiřadit a dostáváme dvojici permutací, která vyhovuje. (Tato volba znamená, že při znalosti začátečního a konečného pořadí existuje více možností – konkrétně 2^6 – dvojic permutací Ley a Ráďi.)

Nakonec nám stačí rozhodnout, kolik koncových pořadí vyhovuje. Vyberme nejprve dvě lichá a dvě sudá čísla pro pozice odpovídající papírkům 1, 4, 7, 10 a ta libovolně seřaďme. Takto dostáváme $\binom{6}{2}^2 \cdot 4!$ možností. Analogicky pro druhou čtveřici už vybíráme pouze ze čtyř sudých a lichých čísel, máme tedy $\binom{4}{2}^2 \cdot 4!$ možností a pro poslední čtveřici už není co vybírat a zbývá $4!$ možností.

Dohromady tedy máme $\binom{6}{2}^2 \cdot 4! \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot 4! \cdot 4! = 111974400$ možností. Poznamenejme, že pokud k výsledku můžeme dojít i v tomto tvaru: $\frac{4!^3 \cdot 6!^2}{2^6}$, kde v čitateli je součin možností pro obě zamíchání a ve jmenovateli počet dvojic zamíchání, která vedou ke stejné řadě papírků na konci.

22. PALILAP

Kolik je sedmiciferných palindromů takových, že po vynásobení jedenácti už nebudou palindromem?

Výsledek: 6855

Postup řešení:

Sedmiciferný palindrom si pomocí proměnných můžeme zapsat jako ABCDCBA. Z tohoto zápisu můžeme jednoduše spočítat počet všech sedmiciferných palindromů: za A můžeme dosadit 9 cifer (1-9) a za B, C a D 10 cifer (0-9), tedy máme celkem $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ palindromů. Nyní můžeme spočítat kolik palindromů po vynásobení 11 stále palindromem je a řešení poté dopočítat.

	A	B	C	D	C	B	A	
								·11
	A	B	C	D	C	B	A	
A	B	C	D	C	B	A		
A	A+B	B+C	C+D	C+D	B+C	A+B	A	

Aby byl součin palindromem, musí platit následující nerovnosti, jinak by přenášení jedničky narušilo symetrii cifer (např. kdyby $a + b \geq 10$, první cifra by už neodpovídala poslední):

- $a + b < 10$
- $b + c < 10$
- $c + d < 10$

Počet palindromů zjistíme přes fixaci dvojice (b, c) a dopočítáním počtu možností zvolení a, d . Vzor chování ukazuje tabulka pro $b = 0, 1$.

(b,c)	a	d	možností
(0,0)	9	10	90
(0,1)	9	9	81
⋮			⋮
(0,9)	9	1	9
(1,0)	8	10	80
(1,1)	8	9	72
⋮			⋮
(1,8)	8	2	16

Počet možností pro dané b můžeme na základě pozorování z tabulky zapsat jako sumu: $b \sim \sum_{c=0}^{9-b} (9-b) \cdot (10-c)$. Celkový počet palindromů s požadovanou vlastností je $\sum_{b=0}^8 \sum_{c=0}^{9-b} (9-b) \cdot (10-c)$, pro $b = 9$ není žádná možnost pro a , proto suma končí 8. Počet palindromů, které po vynásobení 11 zůstanou palindromem je $495 + 432 + 364 + 294 + 225 + 160 + 102 + 54 + 19 = 2145$. Odpověď, kolik palindromů nebude po vynásobení 11 palindromem, je $9000 - 2145 = 6855$.

23. VOLEJBALOVÝ TURNAJ

Štěpán hrál volejbal a za stavu 24 : 23 (pro něj) začalo přšet. Protože už nebyl čas set dohrát, týmy se dohodly, že si o každý další bod hodí mincí. Soupeř ale vytáhl falešnou minci a bude mu padat rub s pravděpodobností $\frac{2}{3}$. (Štěpán získá bod, pokud na minci padne líc.) S jakou pravděpodobností Štěpán set vyhraje, pokud se hraje do 25 bodů, přičemž výsledný stav musí být o dva?

Výsledek: 7/15

Postup řešení:

Označme A pravděpodobnost že Štěpánův tým vyhraje, když je teď ve stavu 24:23 (tedy A je řešení úlohy). Dále označme B pravděpodobnost, že vyhraje poté, co se dostane do stavu 24:24. Nyní tedy poprvé házejí mincí a Štěpán s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ ihned vyhraje a s pravděpodobností $\frac{2}{3}$ se dostane do stavu 24:24, kde má pravděpodobnost na výhru B, tedy

$$A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}B.$$

Nyní je potřeba si uvědomit, že pro všechna skóre vyšší než 23:23 pravděpodobnost výhry nezávisí na přesném skóre, ale pouze na rozdílu bodů, např. pokud je skóre shodné je potřeba pro výhru dát v následujících dvou hodech dva body, nebo ve čtyřech dát tři body atd., nezáleží jestli je to 25:25, nebo 27:27. Podobně v našem případě je pravděpodobnost pro 25:24 stejná jako pro 24:23, tedy A. Dostáváme rovnici

$$B = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}C,$$

kde C je pravděpodobnost výhry za stavu 24:25. Tu můžeme podobně jako první rovnici vyjádřit pomocí B jako

$$C = \frac{2}{3}0 + \frac{1}{3}B = \frac{1}{3}B.$$

Soustavu tří rovnic vyřešíme například dosazením do druhé rovnice

$$B = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}B\right) + \frac{2}{3}\frac{1}{3}B.$$

24. PRÁVNICKÉ BEZPRÁVÍ

Kačka skládá zkoušku z pracovního práva. Čeká ji test o 10 otázkách s třemi odpověďmi, kde 0 – 3 odpovědi je správně. Aby zkoušku zvládla, musí mít alespoň 7 otázek dobře, přičemž u každé odpovědi si je jistá jen na 90 %. S jakou pravděpodobností úspěšně zvládne zkoušku?

Výsledek: 0.72492

Postup řešení:

Aby Kačka správně odpověděla na jednu otázku, musí správně vyplnit každou z odpovědí dané otázky (všechny i žádná odpověď mohou být správně). Pravděpodobnost, že Kačka odpoví na jakoukoliv otázku správně je tedy 0.9^3 .

Nyní potřebujeme zjistit, s jakou pravděpodobností bude správných otázek alespoň 7. Můžeme si uvědomit, že hledáme počet úspěchů z 10 pokusů s tím, že každý úspěch má pravděpodobnost 0.9^3 . Toto je přesně binomické rozdělení pomocí kterého jsme schopni najít pravděpodobnost přesného počtu úspěšných otázek.

Jelikož je úspěšných otázek maximálně 10, tak abychom uvažovali všechny možnosti, kdy máme alespoň 7 otázek správně, musíme najít pravděpodobnost pro 7, 8, 9, 10 úspěšných otázek. Pravděpodobnost 7 úspěšných otázek je $\binom{10}{7} \cdot (0.9^3)^7 \cdot (1 - 0.9^3)^3$. Pro 8 úspěšných otázek následně $\binom{10}{8} \cdot (0.9^3)^8 \cdot (1 - 0.9^3)^2$, pro 9 je pravděpodobnost $\binom{10}{9} \cdot (0.9^3)^9 \cdot (1 - 0.9^3)^1$ a pro 10 je pravděpodobnost $\binom{10}{10} \cdot (0.9^3)^{10} \cdot (1 - 0.9^3)^0$. Pokud všechny tyto pravděpodobnosti sečteme, máme výsledek 0.72492.

25. DEVYTELÉ

Dělitele $n > 1$ čísla a nazveme Devytelem, pokud $(n + 1) \mid a$. Najděte nejmenší číslo k takové, že k má právě 4 Devytele a $2k$ má právě 7 Devytelů.

Výsledek: 210

Postup řešení:

Uvědomíme si, že číslo n je Devytelem čísla k právě tehdy, když $n(n + 1) \mid k$. Tedy zkoumáme dělitelnost čísla 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72... Dále lze řešit dvěma způsoby:

- Zkoušením, a sice vypsáním nejmenších společných násobků (alespoň) čtveřic čísel typu $n(n + 1)$. Dostaneme posloupnost kandidátů 60, 120, 168, 180, 210, 240, 300, 332, 360, 420, ... Vyškrtneme ty členy, které mají více než čtyři Devytele a hledáme ty, jejichž dvojnásobek má 7 Devytelů. Nejmenší takové číslo je $k = 210$.
- Všimneme si, že všechna z čísel typu $n(n + 1)$ jsou dělitelná dvěma, zhruba polovina čtyřmi a jen málo osmi. Pokud by tedy platilo $4 \mid k$, číslo $2k$ by mělo navíc ty Devytele, kteří jsou dělitelní osmi. Těch je málo, tedy by k muselo být velké. Přijmeme tedy předpoklad $2 \mid k, 4 \nmid k$ a zkonstruujeme co nejmenší číslo mající 4 Devytele. Rychle dojdeme k $k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$

26. BABIČKA ZABÍJÍ SLIMÁKY NA POLI

Babička má pole tvaru kruhu o poloměru 1 km. Pole však napadli slimáci. Babička vlastním tělem chránila pravidelný n -úhelník vepsaný kruhu. Pak se ale unavila a poslala místo sebe hlídat jejího vlčáka Štěpána, který hlídá pravidelný $2n$ -úhelník vepsaný kruhu. Za předpokladu, že Štěpán uhlídá *přibližně* 1,0094× větší plochu než babička, určete $n \in \mathbb{N}$.

Výsledek: 23

Postup řešení:

Vzorec pro obsah pravidelného n -úhelníku (vepsaného kružnici) je

$$S_n = \frac{1}{2} n r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

Vyjádríme stejným způsobem obsah $2n$ -úhelníku, dosadíme $r = 1$ a upravujeme rovnici

$$1,0094 = \frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{\frac{1}{2} 2n \sin \frac{2\pi}{2n}}{\frac{1}{2} n \sin \frac{2\pi}{n}} = \frac{n \sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{2} n \sin \frac{2\pi}{n}} = \frac{n \sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{2} n \cdot 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}}$$

kde čtvrté = je využití vzorce $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ve jmenovateli. Z takto zjednodušeného vzorce již snadno dopočítáme n jakožto

$$n = \frac{\pi}{\arccos \frac{1}{1,0094}} = 23,00196 \dots \approx 23$$

27. FOODCOURT

Ve foodcourtu jsou tři fastfoody: TerkaTaco, LeaLí Vance a PeťaPho. Uvažujme zákazníky, kteří chodí do foodcourtu každý den a vybírají si právě jeden z fastfoodů. Pokud zákazník jeden den navštíví PeťaPho, další den jej navštíví s 90% pravděpodobností. Pro LeaLí Vance a TerkaTaco je tato pravděpodobnost 80 %. Pokud se zákazník rozhodne změnit fastfood, vybere si náhodně mezi zbývajících dvěma, a to se stejnou pravděpodobností. Najděte takové rozdělení zákazníků mezi obchody, při kterém bude podíl zákazníků navštěvujících jednotlivé obchody konstantní, tj. pokud v jeden den navštěvovalo fastfoody (p_1, p_2, p_3) % zákazníků, další den bude fastfoody opět navštěvovat (p_1, p_2, p_3) % zákazníků. Jako odpověď zadejte podíl zákazníků takto navštěvujících TerkaTaco.

Výsledek: $1/4$

Postup řešení:

Označme stejně jako v zadání (p_1, p_2, p_3) rozložení zákazníků mezi jednotlivé fastfoody (v pořadí TerkaTaco, LeaLí Vance, PeťaPho) v nějaký den. Podle zadání bude další den rozložení následující:

$$(0,8p_1 + 0,1p_2 + 0,05p_3; 0,8p_2 + 0,1p_1 + 0,05p_3; 0,9p_3 + 0,1p_1 + 0,1p_2).$$

Aby byly poměry návštěvníků konstantní, řešíme soustavu rovnic:

$$p_1 = 0,8p_1 + 0,1p_2 + 0,05p_3,$$

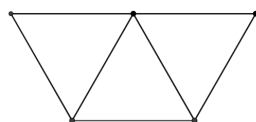
$$p_2 = 0,8p_2 + 0,1p_1 + 0,05p_3,$$

$$p_3 = 0,9p_3 + 0,1p_1 + 0,1p_2.$$

Jejím jediným řešením takovým, že $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ (tedy součet zákazníků dá 100%), je trojice $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. TerkaTaco tedy navštěvuje $\frac{1}{4}$ zákazníků.

28. OLYMPIÁDNÍ MATEMATIKA

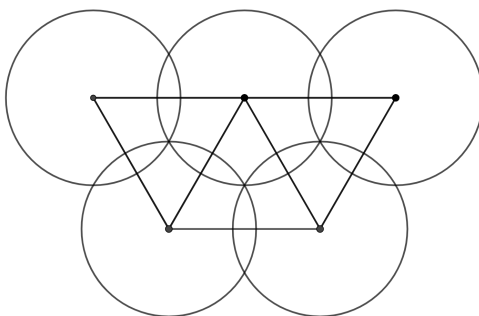
Olympijská vlajka se skládá z pěti kruhů se středy v rovnostranných trojúhelnících o straně délky $100\sqrt{3}$ cm, rozložených jako na obrázku. Poloměr kruhu je 100 cm. Spočítejte, jakou plochu zabírají kruhy (zaokrouhlete na setiny).



Výsledek: 144397.58

Postup řešení:

$\sqrt{10000 \cdot 3 - 2500 \cdot 3} = \sqrt{7500 \cdot 3} = 150$ cm. Současně poloměry kružnic jsou rovny 100 cm, což znamená, že se tři kružnice se středy ve vrcholech jednoho trojúhelníku protnou v ortocentru, nebo také těžišti trojúhelníku. Jsme tedy nyní už připraveni si nakreslit obrázek.


$$2 \cdot \frac{10000\pi}{6} - 2 \cdot \frac{5000\sqrt{3}}{2}$$
$$5 \cdot \pi 100^2 \cdot 3 - 14 \cdot \frac{10000\pi}{6} + 14 \cdot \frac{5000\sqrt{3}}{2} = 144397.58$$

29. STŘELEC PETR

Petr hrál s tatškou v obýváku šachy a ztratili bílého střelce. Pak půjčil šachy malému Davidovi a věděl, že s pravděpodobností 0.5 Davídek ztratí jednu další figurku (všechny se stejnou pravděpodobností). Večer Davídek šachy uklidil a druhý den Petr začal hledat a první figurka, kterou našel, byla bílý střelec. (Pokud by byly ztracené dvě figurky, byla stejná pravděpodobnost, že najde první jednu nebo druhou.) V tu chvíli se Petr zaradoval, protože tato skutečnost částečně napovídá, že Davídek figurku neztratil. Jaká je pravděpodobnost, že když Petr teď otevře krabici a doplní střelce, bude mít kompletní sadu šachů?

Výsledek: 31/47

Postup řešení:

Jedná se o pravděpodobnostní problém, tak si rozepíšeme všechny možné jevy. Víme, že už byl ztracen jeden bílý střelec. Dále:

- A) Davídek nic neztratí. $P(A) = \frac{1}{2}$
- B) Davídek ztratí bílého střelce. Pravděpodobnost, že figurku ztratí, je jedna polovina a tu vynásobíme pravděpodobností, že ztracená figurka je bílý střelec, tedy jedna figurka ze zbývajících 31. $P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{31}$
- C) Davídek ztratí figurku různou od bílého střelce. Pravděpodobnost ztracení vynásobenou pravděpodobností určující typ figurky musíme vynásobit ještě jednou polovinou, jelikož víme, že Petr druhý den našel bílého střelce (na to měl pravděpodobnost jedna polovina). $P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{30}{31} \cdot \frac{1}{2}$.

Tedy celková pravděpodobnost, že naše situace nastane, je $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{31} + \frac{1}{2} \cdot \frac{30}{31} \cdot \frac{1}{2} = \frac{47}{62}$. Nás zajímá pravděpodobnost, že sada je kompletní, tedy v jak velké části naší situace je kompletní, a to odpovídá jevu, že Davídek nic neztratí. $P = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)+P(C)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{47}{62}} = \frac{62}{2 \cdot 47} = \frac{31}{47}$.

30. PÁTÁ PRÁVĚ SE ODMOCNILA

Devy si chce přidat do salátu číslo $d = \sqrt[7]{\sqrt{5} + \sqrt{5 + \sqrt{5}}}$, aby si ho ale mohl přidat, potřebuje vědět, jestli je to kořenová zelenina. Najděte normovaný (koeficient u vedoucího členu - členu s nejvyšší mocninou - je jedna) polynom (28. stupně) s celočíselnými koeficienty takový, že číslo d je jeho kořenem. Jako odpověď zadejte součet všech jeho koeficientů.

Výsledek: -44

Postup řešení:

Ze zadání víme, že platí

$$d = \sqrt[7]{\sqrt{5} + \sqrt{5 + \sqrt{5}}}$$

Pojďme si hrát s touto rovnicí, abychom se zbavili odmocnin.

$$d = \sqrt[7]{\sqrt{5} + \sqrt{5 + \sqrt{5}}}$$

$$d^7 = \sqrt{5} + \sqrt{5 + \sqrt{5}}$$

$$d^7 - \sqrt{5} = \sqrt{5 + \sqrt{5}}$$

$$d^{14} - 2\sqrt{5}d^7 + 5 = 5 + \sqrt{5}$$

$$d^{14} - 2\sqrt{5}d^7 = \sqrt{5}$$

$$d^{14} = 2\sqrt{5}d^7 + \sqrt{5}$$

$$d^{28} = 20d^{14} + 20d^7 + 5$$

$$d^{28} - 20d^{14} - 20d^7 - 5 = 0$$

Tím, že jsme původní rovnici pro kořen umocňovali, jsme získali polynom $P(x) = x^{28} - 20x^{14} - 20x^7 - 5$, který má celočíselné koeficienty a současně d za kořen. Zadat jako odpověď pak musíme $1 - 20 - 20 - 5 = -44$.