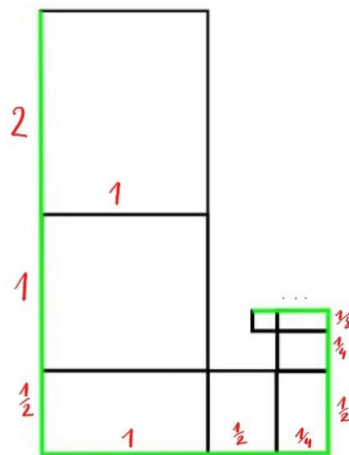




31. **Divnej šnek** Lukáš má papír ve tvaru čtverce o straně dva. Papír rozpůlí (stříhem rozboběžným s jednou stranou) a jednu polovinu si položí na stůl. Druhou polovinu vezme a znovu ji rozpůlí na půl (aby vznikly dva čtverce). Jednu polovinu přidá k papíru na stole, aby navazovala délka stran a druhou stříhá dále. Zase ji rozstříhne na poloviny, jednu polovinu nastaví k papírům na stole stejnou délkou hrany a druhou si nechá. Takto na sebe vždy naváže 3 kusy papíru (tedy každá strana spirály bude tvořená ze tří kusů papíru) a pak cestu zatočí (vždy na stejnou stranu, aby se části papíru stáčely dovnitř a tvořily tak spirálu). Takhle stříhá až do nekonečna. Mezitím přijde Štěpán a na začátek papírového šneka položí reálného šneka a nechá ho oblézt po vnější hraně papírového šneka dovnitř spirály (jako první poleze po delší straně prvního kusu papíru a ven ze spirály už neleze). Jak dlouhou cestu šnek pošnečí?



Výsledek: 7

Řešení:

Všimněme si, že délka první rovinky šneka je $2 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, délka druhé rovinky je $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, a tak dále. Délka každé rovinky je polovina předchozí délky. Sečteme geometrickou poloupnost a získáme

$$\frac{\frac{7}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 7.$$

32. **Sudé funkce**

Áďa vymýšlí letošní Mathrace plakát, na který píše spoustu funkcí. Prozradila nám, že $f_1 = x + 3$, $f_2 = x^2$ a dále platí, že $f_{n+1} = f_n - f_{n-1}$. Určete, kolik existuje přirozených k menších než 10000, pro které je funkce f_k sudá?

Výsledek: 3333

Řešení:

$$\begin{aligned}
f_1 &= x + 3 \\
f_2 &= x^2 \\
f_3 &= f_2 - f_1 = x^2 - x - 3 \\
f_4 &= f_3 - f_2 = (x^2 - x - 3) - x^2 = -x - 3 \\
f_5 &= f_4 - f_3 = (-x - 3) - (x^2 - x - 3) = -x^2 \\
f_6 &= f_5 - f_4 = (-x^2) - (-x - 3) = -x^2 + x + 3 \\
f_7 &= f_6 - f_5 = (-x^2 + x + 3) - (-x^2) = x + 3 = f_1 \\
f_8 &= f_7 - f_6 = (x + 3) - (-x^2 + x + 3) = x^2 = f_2
\end{aligned}$$

Díky tomu, že každé f_n závisí jen na předchozích dvou, se nám bude posloupnost funkcí opakovat, a to každých 6 funkcí. Když vyzkoušíme, které funkce jsou sudé, tedy které splňují $f_n(x) = f_n(-x)$, zjistíme, že to jsou právě ty, které obsahují x s nějakým nenulovým koeficientem. To jsou $f_2, f_5, f_8 \dots$. Chceme takové funkce spočítat pro $k < 10000$, tedy v $f_1, f_2, \dots, f_{9999}$. Z nich každá trojice obsahuje právě jednu sudou funkci, takže jich je **3333**.

33. Pegas se vrací

Pegas je kůň, který na šachovnici dělá pohyb do L v jednom směru o 3 pole a ve druhém o 1. Nyní pegas začíná v levém dolním rohu klasické šachovnice 8×8 a snaží se dostat do pravého horního pole. Kolika způsoby to může udělat, pokud chce udělat nejmenší možný počet skoků?

Výsledek: 26

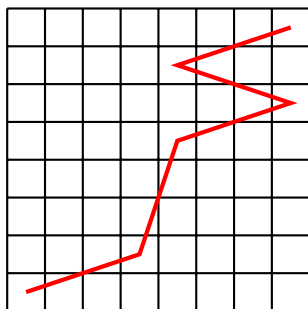
Řešení:

K snazší orientaci při řešení úlohy zavedme souřadnicový systém a uvažujme Pegase jako bod, který se pohybuje pouze po středech čtvercových políček. Počátek necht' je střed políčka v levém dolním rohu šachovnice a jednomu políčku určíme rozměry 1×1 . Pegas se tak snaží dostat z bodu $[0, 0]$ do $[7, 7]$.

Dále si uvědomíme, že Pegas vždy svým pohybem změní svoji pozici o 1 ve směru právě jedné z os a o 3 ve směru té druhé. Součet změn v obou souřadnicích je tedy konstantní a roven 4. Součet změn v obou souřadnicích při daném počtu skoků dále označíme „změna polohy“ a součet změn v obou souřadnicích pro jednu celou cestu jako „celková změna polohy“. Celková změna polohy musí být rovna $7 + 7 = 14$. Celková změna polohy bude zřejmě menší nebo rovna součtu změn poloh při jednotlivých skocích.

Úlohu si rozdělíme na dvě části. V první určíme nejmenší možný počet Pegasových skoků, v druhé pak počet různých cest, které nám při tomto počtu můžou vzniknout.

Počet skoků Pegase označme n . Zřejmě $n > 3$, protože i kdyby se Pegas pohyboval pouze doprava a nahoru, celková změna polohy bude maximálně $12 < 14$. Dále můžeme vyloučit i $n = 4$. Ve směru každé osy se totiž při každém skoku změní poloha o liché číslo, pročež po sudém počtu skoků bude změna v obou souřadnicích sudé číslo, tedy jistě ne 7. Platí $n \geq 5$; uvedením řešení pro pět skoků prokážeme rovnost:



Nyní se pokusíme nalézt všechna možná řešení úlohy.

Když si pohyb Pegase představíme vektorově, každý skok je vektor ve tvaru $(\pm 1, \pm 3)$ nebo $(\pm 3, \pm 1)$. Zaměříme se nyní bez újmy na obecnosti pouze na souřadnici x a konkrétně na počet pohybů ± 3 v této souřadnici ve stanovených pěti skocích. Hledáme všechny kombinace skoků, které x zvýší o 7.

- 0 nebo 5 výskytů ± 3 není možné, protože by součet v žádné z kombinací nedal 7
- pro 1 výskyt ± 3 lze toto číslo doplnit pouze čtyřmi 1, tedy $\{1, 1, 1, 1, 3\}$
- pro 2 výskyty ± 3 lze doplnit pouze na: $\{1, 1, -1, 3, 3\}$
- pro 3 výskyty ± 3 to bude: $\{-1, -1, 3, 3, 3\}$
- a konečně pro 4 výskyty ± 3 můžeme pěticí doplnit jednoznačně na: $\{1, 3, 3, 3, -3\}$

Jednoznačnost doplnění znamének v každém případě si jde jednoduše rozmyslet. Vzhledem k výše uvedené podobě vektoru máme pro danou množinu souřadnic x také jednoznačně určené absolutní hodnoty souřadnic y a podobnými úvahami lze doplnit znaménka. Dostáváme tak tyto čtyři možné kombinace skoků:

- $(1, 3), (1, 3), (1, 3), (1, -3), (3, 1)$
- $(3, 1), (3, 1), (3, 1), (-3, 1), (1, 3)$
- $(1, 3), (1, 3), (-1, 3), (3, -1), (3, -1)$
- $(3, 1), (3, 1), (3, -1), (-1, 3), (-1, 3)$

Hned vidíme, že první dvě pěticí jsou identické až na prohození souřadnic a obdobně je tomu i pro druhou dvojici. Tato situace vzniká díky symetrii tabulky podle spojnice středů startu a cíle Pegasovy trasy. Můžeme tedy pouze najít počet validních permutací pro např. první (označme A) a třetí (označme B) pěticí vektorů a tento počet vynásobit dvěma.

Může se zdát, že na počet permutací pětic stačí uvažovat pouze klasická kombinatorická pravidla. Musíme ovšem také brát v potaz, že Pegas nesmí nikdy opustit šachovnici. Nesmí tedy po žádném skoku nastat, že je součet v některé souřadnici větší než 7 či menší než 0.

V praxi nám tak stačí pro pěticí A zajistit, aby skok (vektor) $(1, -3)$ nebyl první ani poslední. Také chceme, aby nenastala situace, při které jsou vektory $(1, 3)$ první tři skoky (došlo by k překročení 7 v souřadnici y), či aby prvními dvěma skoky nebyly $(3, 1)$ a $(1, -3)$ v tomto pořadí (dostali bychom y do záporných čísel). Spočítáme tak počet permutací vektorů $(1, 3), (1, 3), (1, 3), (3, 1)$, pronásobený počtem povolených umístění vektoru $(1, -3)$ do této sekvence, což je $\frac{4!}{3!} \cdot 3 = 12$ a odečteme dvě výše zmíněné možnosti, při kterých Pegas vyskočí z šachovnice. Celkem tedy pro pěticí A existuje 10 možností Pegasovy cesty a tedy $2 \cdot 10 = 20$ možností pro obě symetrické pěticí.

U pěticí B si snadno všimneme, že první a poslední skok (vektor) musí být $(1, 3)$, protože ostatní mají alespoň jednu souřadnici zápornou. Dle obdobné úvahy jako u pěticí A vidíme, že počet permutací zbylých tří vektorů $(-1, 3), (3, -1), (3, -1)$ je $\frac{3!}{2!} = 3$. Tentokrát při žádné z možností Pegas nevyskočí z šachovnice, což lze snadno ověřit. Spolu se symetrickou pěticí tak dostáváme dalších $2 \cdot 3 = 6$ možností.

Celkem tedy existuje $20 + 6 = 26$ různých cest, kterými se při zadaných podmínkách mohl Pegas vydat.

34. Psychodělení

O přirozeném číslu n řekneme, že je OP, jestliže má mezi všemi přirozenými čísly od 1 do n nejvíce přirozených dělitelů. Určete hodnotu k -tého nejmenšího OP čísla, kde k je páté nejmenší OP číslo.

Výsledek: 240

Řešení:

Pro začátek si zkusíme vypsát dělitele např. prvních 15 přirozených čísel. Vypozorujeme několik věcí:

- Páté nejmenší OP číslo je dvanáct, budeme tedy hledat 12. nejmenší OP číslo.
- Počet dělitelů daného n lze získat pomocí jeho rozkladu na prvočinitele: Necht' $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_i^{k_i}$, pak počet dělitelů n je $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_i + 1)$.

Než hledat OP čísla přes jejich hodnotu, počítejme pro každé k nejmenší číslo s k děliteli, řekneme x_k . Např. pro $k = 10 = 2 \cdot 5$ je $x_{10} = 2^{5-1} \cdot 3^{2-1} = 48$. Takto lze získat relativně rychle x_k pro $k < 50$, čímž získáme posloupnost x_k . Její začátek je 1, 2, 4, 6, 16, 12, 64, 24... Z této posloupnosti

pak vyškrtáme všechna čísla, pro něž později v posloupnosti existuje větší číslo, z uvedeného začátku tedy čísla 16, 64. Toto odpovídá situaci, kdy nejmenší číslo mající $k_1 = 5$ dělitelů, $x_5 = 16$ je větší než nejmenší číslo mající $k_2 = 6$ dělitelů, $x_6 = 12$. Tedy 16 nemůže být OP číslem. Čísla, která v posloupnosti zbyla, pak tvoří podposloupnost z OP čísel. Dvanáctým prvkem této podposloupnosti je číslo 240, což je také výsledek.

35. Devyho věž

Obr Tonda vychází a schází schody velmi zvláštním způsobem: vždy přejde 11, 17, nebo 20 schodů naráz a nijak jinak to neumí. Občas ze srandy dává dětem za úkol zjistit, kolika způsoby dokáže sejít nějaké schody dané délky.

Devyho už tento typ úlohy extrémně štve, a tak se rozhodl postavit věž, kterou Tonda nedokáže vyjít ani jedním způsobem tak, aby mu to vyšlo přesně. Zároveň ale chce, aby byla co největší. Kolik maximálně může mít schodů?

Výsledek: 69

Řešení:

Úlohu přeformulujeme: místo největší věže, kterou nelze vyjít, hledáme nejmenší věž takovou, že každou vyšší vyjít lze. Snadno vidíme, že pokud Tonda dokáže přesně vyjít věž s k schody, vyjde i tu s $k + 11$ schody; stačí tedy hledat nejmenší k takové, že lze vyjít $k, \dots, k + 10$ schodů. Hledané maximum pak bude $k - 1$.

Právě jedno z čísel od k do $k + 10$ je násobkem jedenácti (označme ho $k + n$), a lze jej vyjít pomocí jedenáctischodových kroků. Uvažujme, jak se mění počet vystoupaných schodů, nahradíme-li tyto kroky za delší. Přitom se omezíme na varianty, kdy se počet nezvýší o víc než jedenáct, tedy občas nahrazujeme více kroků za méně. Je patrné, že pokud $k + n$ je menší než 77, pak věž o $k + n + 3$

$17 = 11 + 6$	$2 \cdot 17 = 33 + 1$	$3 \cdot 17 = 44 + 7$	$4 \cdot 17 = 66 + 2$
$20 = 11 + 9$	$17 + 20 = 33 + 4$	$2 \cdot 17 + 20 = 44 + 10$	$3 \cdot 17 + 20 = 66 + 5$
	$2 \cdot 20 = 33 + 7$	$17 + 2 \cdot 20 = 55 + 2$	$2 \cdot 17 + 2 \cdot 20 = 66 + 8$
		$3 \cdot 20 = 55 + 5$	$17 + 3 \cdot 20 = 77$
			$4 \cdot 20 = 77 + 3$

schodech nelze vyjít. Naopak, pokud $k + n$ je alespoň 77, pak lze vyjít věže o $k + n + 3$, $k + n + 2$, \dots , $k + n - 7$ schodech – stačí v tabulce tvary přepsat na např. $17 + 20 = 44 - 7$, $3 \cdot 17 + 20 = 77 - 6$. Proto $n = 7$, hledané $k = 70$ a $k - 1 = 69$.

36. Vylepšené blafuj

Ema s Terkou hrají kostky. Střídají se po hodů, přičemž Ema začíná a hodí klasickou šestistěnnou kostkou. V dalším kole hází Terka a musí hodit číslo větší než Ema. Jestliže takové číslo hodí, pak hází Ema, jestliže ne, prohrává a Ema vyhrává, atd. S jakou pravděpodobností Ema vyhraje?

Výsledek: 31031/46656

Řešení:

Nejdříve úlohu rozdělíme na 6 částí podle toho, co Ema hodí v prvním kole. Vypočítáme pravděpodobnost výhry Emy v každém případě a jako výsledek bude jejich součet vydělený 6, protože každý hod má stejnou pravděpodobnost, a to $\frac{1}{6}$.

Ema hodí 6

Terka už Emu nepřehodí a Ema automaticky vyhrává s pravděpodobností $p_6 = 1$.

Ema hodí 5

Ema vyhraje s pravděpodobností $\frac{5}{6}$. Pouze když Terka hodí 6 ($\frac{1}{6}$), Ema okamžitě prohrává. To můžeme zapsat jako $p_5 = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}(1 - p_6)$. Zde $\frac{5}{6}$ je pravděpodobnost, že Terka Emu nepřehodí a Ema tedy vyhraje. Pravděpodobnost $\frac{1}{6}(1 - p_6) = 0$ vyjadřuje pravděpodobnost, že Terka Emu přehodí a Ema následně vyhraje.

Ema hodí 4

$$p_4 = \frac{4}{6} + \frac{1}{6}(1 - p_5) + \frac{1}{6}(1 - p_6) = \frac{4}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 0 = \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

Ema hodí 3

$$p_3 = \frac{3}{6} + \frac{1}{6}(1 - p_4) + \frac{1}{6}(1 - p_5) + \frac{1}{6}(1 - p_6) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{11}{36} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

Emu hodí 2

$$p_2 = \frac{2}{6} + \frac{1}{6}(1-p_3) + \frac{1}{6}(1-p_4) + \frac{1}{6}(1-p_5) + \frac{1}{6}(1-p_6) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{91}{216} + \frac{1}{6} \cdot \frac{11}{36} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Emu hodí 1

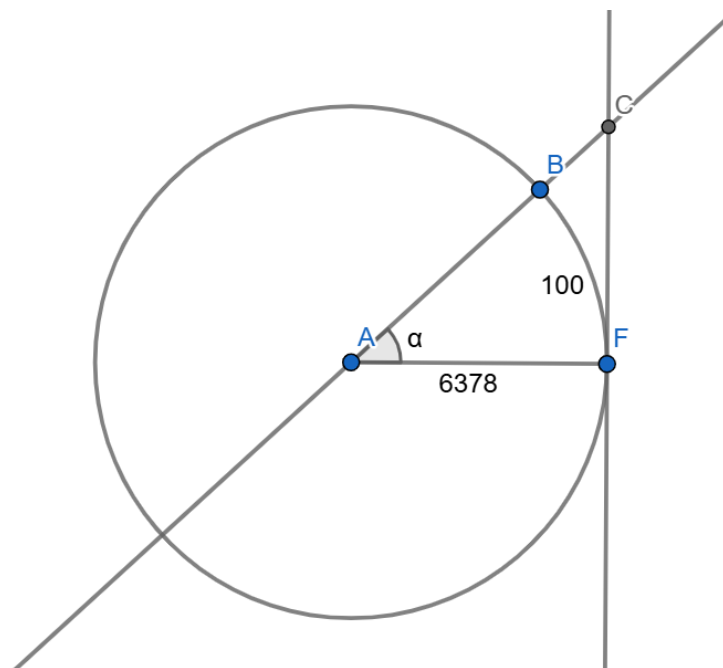
$$p_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}(1-p_2) + \frac{1}{6}(1-p_3) + \frac{1}{6}(1-p_4) + \frac{1}{6}(1-p_5) + \frac{1}{6}(1-p_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{671}{1296} + \frac{1}{6} \cdot \frac{91}{216} + \frac{1}{6} \cdot \frac{11}{36} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

Celková pravděpodobnost je tedy $\frac{1}{6}(1 + \frac{5}{6} + (\frac{5}{6})^2 + (\frac{5}{6})^3 + (\frac{5}{6})^4 + (\frac{5}{6})^5) = \frac{31031}{46656}$

37. Z Brightonu do Francie

Vítek stojí na pobřeží Brightonu a snaží se dohlédnout do Francie. Kolik metrů nad povrchem země musí být, aby tam mohl dohlédnout a nebránilo mu zakřivení Země? Odpověď zaokrouhlete na celé metry. Počítejme, že Země je koule o poloměru 6378 km a délka oblouku Francie - Brighton je 100 km. **Výsledek: 784**

Řešení:



Velikost úhlu α je taková část z 360, jaká je 100 km z obvodu celé zeměkoule. Obvod zeměkoule je 12756π km. Úhel α tedy dopočítáme jako $\frac{36000}{12756\pi}$. Trojúhelník ACF je pravoúhlý, protože tečna je kolmá na poloměr. Vypočítáme kosinus již známého úhlu, ten se rovná přibližně 0,999998770. Dostaneme, že $\cos \alpha = \frac{6378}{|AC|}$, odkud vyjádříme, že $|AC|$ je přibližně 6378,78402. Rozdíl $|AC| - |BC|$ je tedy 784,02...m a hledaná odpověď je **784**.

38. Eris jde ven bez čepice

Máme *sus* binární operaci na přirozených číslech. Definujeme $sus(a, b)$ jako čitatele zlomku $\frac{a}{b}$ v základním tvaru. O množině řekneme, že je No cap, pokud je uzavřená na tuto operaci, což znamená, že pokud a, b leží v množině, pak i $sus(a, b)$ leží v této množině. Určete velikost nejmenší No cap množiny, která obsahuje $\{400, 11664, 2460375, 614656\}$ jako podmnožinu.

Výsledek: 25

Řešení:

Nejprve si rozepíšeme čísla na součin prvočinitelů:

- $a = 400 = 2^4 \cdot 5^2$,
- $b = 11664 = 2^4 \cdot 3^6$,
- $c = 2460375 = 3^9 \cdot 5^3$,
- $d = 614656 = 2^8 \cdot 7^4$.

Pokud máme zlomek s číslem x v čitateli, tak tento zlomek může mít v základním tvaru v čitateli pouze číslo, které má v rozkladu na prvočinitele stejné prvočísla, ale mohou být v menší mocnině. Nyní je otázkou v jaké mocnině tato prvočísla mohou být.

Podívejme se nyní na ta nejjednodušší čísla, která můžeme dostat. Určitě můžeme dostat 1, například z $\frac{a}{a}$. Potom můžeme dostat čísla, která budou mocninami prvočísel 2, 3, 5, 7.

- 7 – Můžeme dostat pouze mocninu 7^4 , například jako $\text{sus}(\text{sus}(d, a), a)$. Vzhledem k tomu, že se 7 nachází pouze v d , menší ani větší mocninu nedostaneme.
- 2 – Největší mocninou, kterou můžeme dostat, je 2^8 , například jako $\text{sus}(d, 7^4)$. Dále můžeme dostat pouze 2^4 například jako $\text{sus}(2^8, a)$. Protože i v našich číslech se 2 vyskytuje pouze v čtvrté a osmé mocnině, jiné možnosti nedostaneme.
- 5 – Můžeme dostat jednoduše 5^3 jako $\text{sus}(\text{sus}(c, b), b)$ a 5^2 jako $\text{sus}(a, 2^4)$. Když na nich provedeme operaci sus , dostaneme dokonce 5^1 .
- 3 – Můžeme dostat stejně jako v předchozích bodech 3^6 a 3^9 . Když na nich nyní provedeme operaci sus dostaneme 3^3 , menší mocninu či jinou mocninu než tyto 3 evidentně nedostaneme.

Když máme nyní tyto jednoduché prvky naší No cap množiny, můžeme je použít na dostání všech ostatních prvků tak, že jimi budeme dělit naše čísla a, b, c, d . Můžeme nyní kombinatoricky spočítat nebo výpisem všech možností zjistit počet prvků naší No cap množiny.

- Z $2^4 \cdot 5^2$ můžeme dostat: $2^4 \cdot 5^1, 2^4 \cdot 5^0, 2^0 \cdot 5^2, 2^0 \cdot 5^1, 2^0 \cdot 5^0$
- Z $2^4 \cdot 3^6$ můžeme dostat: $2^4 \cdot 3^3, 2^4 \cdot 3^0, 2^0 \cdot 3^6, 2^0 \cdot 3^3, 2^0 \cdot 3^0$
- Z $3^9 \cdot 5^3$ můžeme dostat: $3^9 \cdot 5^2, 3^9 \cdot 5^1, 3^9 \cdot 5^0, 3^6 \cdot 5^3, 3^6 \cdot 5^2, 3^6 \cdot 5^1, 3^6 \cdot 5^0, 3^3 \cdot 5^3, 3^3 \cdot 5^2, 3^3 \cdot 5^1, 3^3 \cdot 5^0, 3^0 \cdot 5^3, 3^0 \cdot 5^2, 3^0 \cdot 5^1, 3^0 \cdot 5^0$
- Z $2^8 \cdot 7^4$ můžeme dostat: $2^4 \cdot 7^4, 2^0 \cdot 7^4, 2^8 \cdot 7^0, 2^4 \cdot 7^0, 2^0 \cdot 7^0$

Nyní když sečteme celkem všechny prvky, dostaneme, že v naší No cap množině je právě 25 různých prvků.

39. Spokojený pár

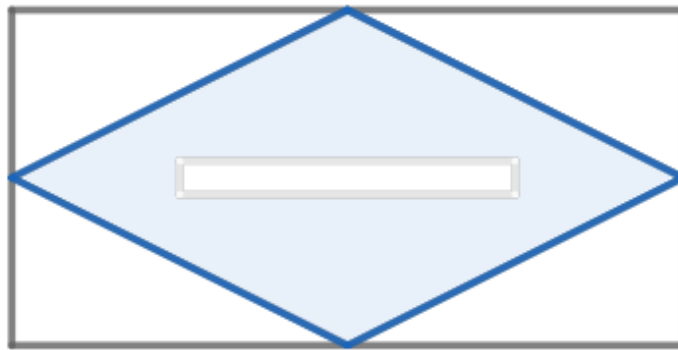
Anička a Štěpán tvoří pár. Víme, že Anička má maximálně π peněz a Štěpán maximálně 2π peněz. Anička a Štěpán se budou mít rádi, pokud rozdíl množství peněz Štěpána a dvojnásobku množství peněz Aničky (v tomto pořadí) bude v intervalu $(-\pi, \pi)$. Jinak by si záviděli. Chtějí si koupit vánočního kapra. K tomu potřebují, aby součet množství peněz Štěpána a dvojnásobku peněz Aničky (její kamarád Lukáš jí totiž přispěje stejnou částku, jakou sama má) byl alespoň π . Aby to nebylo jednoduché, mají oba zamilovaní sklon k pýše. Proto pokud součet množství peněz Štěpána a dvojnásobku množství peněz Aničky přesáhne 3π , zpychnou. Anička je pověřivá a považuje čísla z intervalu $(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi}, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2\pi})$ za nešťastná. Štěpán je pověřivý ještě víc a za nešťastná považuje čísla z intervalu $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Pokud některý z nich má množství peněz, které považuje za nešťastné, bude smutný. Vztah Aničky a Štěpána bude funkční, pokud alespoň jeden z nich nebude smutný. Jestliže se Anička a Štěpán budou mít rádi, koupí si kapra, nezpychnou a jejich vztah bude funkční, pak se do roka a do dne vezmou. Jaká je pravděpodobnost, že se do roka a do dne vezmou?

Výsledek: 0.44934

Řešení:

Na ose x budeme vynášet všechny možnosti, kolik peněz má Štěpán, na ose y naopak Anička. Vzhledem k tomu, že Štěpán má mít maximálně 2π peněz a Anička maximálně π , budou se všechny přípustné dvojice množství peněz nacházet uvnitř obdélníka s rozměry $\pi, 2\pi$. Podle požadavků úlohy si v tomto obdélníku zaznačíme funkce, které ohraničují všechny podmínky a vznikne nám podmnožina čtverce, která obsahuje body, které vyhovují zadání. Konkrétně jde o funkce $y - 2x = \pm\pi, y + 2x = \pi, y + 2x = 3\pi, x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{2\pi}, y = \frac{\pi}{2}, y = \frac{3\pi}{2}$. Tím dostaneme následující obrázek:

Nyní potřebujeme pouze vypočítat obsah modré části a obsah celého čtverce, hledaná pravděpodobnost je potom podíl těchto hodnot. Obsah celého čtverce je $2\pi \cdot \pi = 2\pi^2$. Obsah modrého útvaru vypočítáme jako obsah celého čtverce – součet obsahů čtyř trojúhelníků – obsah obdélníka. Všechny čtyři trojúhelníky jsou shodné a pravoúhlé, délky jejich odvěsen jsou π a $\frac{\pi}{2}$, proto součet jejich obsahů je π^2 . Obdélník má délky stran $\frac{1}{\pi}$ a π , jeho obsah je tedy 1. Obsah modrého útvaru je tedy $2\pi^2 - \pi^2 - 1 = \pi^2 - 1$. Hledaná pravděpodobnost je tedy $\frac{\pi^2 - 1}{2\pi^2}$, což se po zaokrouhlení rovná **0.44934**.



40. **Osmistěnná kostka**

Kolik existuje různých osmistěnných kostek, pokud platí, že když kostku postavíme na libovolný vrchol a rozdělíme ji podle vodorovné osy na dvě poloviny, bude součet čtyř čísel ve vrchní části stejný jako součet čísel ve spodní části? Kostky jsou různé, pokud je nemůžeme ztotožnit libovolnou rotací v prostoru.

Výsledek: 6

Řešení:

Nejprve si úlohu trochu analyzujeme. Součet čísel na všech stěnách je $\sum_{n=1}^8 n = 36$. Každá polovina kostky bude mít tedy součet 18. Jsou právě čtyři kombinace čísel, která nám dají součet 18 a zároveň obsahují jedničku, a to:

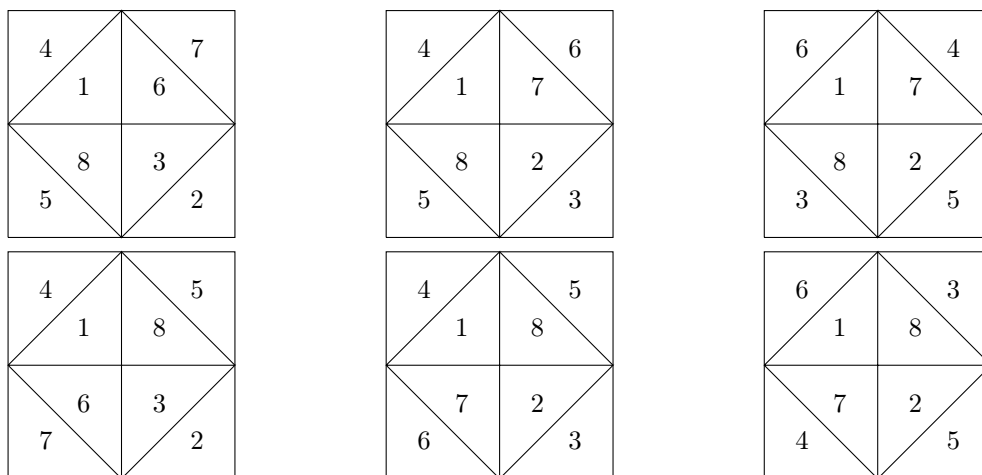
$$1 + 2 + 7 + 8 \rightarrow \text{druhá strana je } 3 + 4 + 5 + 6$$

$$1 + 3 + 6 + 8 \rightarrow \text{druhá strana je } 2 + 4 + 5 + 7$$

$$1 + 4 + 5 + 8 \rightarrow \text{druhá strana je } 2 + 3 + 6 + 7$$

$$1 + 4 + 6 + 7 \rightarrow \text{druhá strana je } 2 + 3 + 5 + 8$$

Pro každou z možností si rozkreslíme, jak může rozestavení čísel na kostce vypadat, a pak proškrtneme opakující se možnosti (označující stejnou kostku po otočení). Zbude nám 6 různých kostek:



41. **Sloup**

Štěpán se netěší na zkoušku z angličtiny, tak chodí okolo sloupu, aby mu čas ubíhal pomaleji. Přitom občas změní směr, aby se mu nemotala hlava. V daný moment Štěpán vnímá čas rychlostí $D = t_r \cdot k$, kde t_r je normální plynutí času (konstanta hodnoty 1 minuta za minutu), $k = \frac{T}{10} + 1$ a T je čas od poslední změny směru v minutách. Pokud tedy např. $D = 3$, pak se Štěpánovi reálná minuta zdá jako tři. Jak dlouho musí Štěpán reálně chodit, aby se mu zdálo, že chodí okolo sloupu 340 minut?

Uvažujte, že změni směr vždy po reálné půlhodině chození.

Výsledek: 140

Řešení:

Podívejme se nejprve na to, kolik času uběhne Štěpánovi mezi změnami směru. V reálném čase uběhne 30 minut. Ze začátku vnímá Štěpán čas stejně jako realitu. Na konci (těsně před otáčkou) vnímá Štěpán čas rychlostí $D = t_r \cdot (\frac{T}{10} + 1) = t_r \cdot (\frac{30}{10} + 1) = 4 \cdot t_r$. Zkusme si teď veličiny připodobnit k něčemu, co už známe. Rychlost vnímání času zní dost jako rychlost, uplynutý reálný čas by mohl být normální čas, Štěpánem vnímaný čas by mohla být vzdálenost. Štěpánova rychlost vnímání se ale mění a nás by zajímala vzdálenost. Najdeme si proto vzoreček pro rovnoměrně zrychlený pohyb: $s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}gt^2$, kde g je zrychlení a $v_0 \cdot t$ je vzdálenost, respektive čas, který by vnímal, kdyby nezrychloval, tj. normální čas, a to 30 minut. Ty ale známe přece taky! Co se týče g , za 30 minut se Štěpánovo vnímání času zvedne z 1 min/min na 4 min/min, tedy $g = \frac{\Delta s}{t} = \frac{4-1}{30} = \frac{1}{10}$, a $v_0 = 1$, neboť jde o standardní vnímání času. Počítejme:

$$\begin{aligned} s &= v_0 \cdot t + \frac{1}{2}gt^2 \\ s &= 1 \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot 30^2 \\ s &= 75 \text{ min} \end{aligned}$$

Spočítali jsme tedy, že Štěpán dobu mezi otáčkami vnímá jako 75 minut; víme, že $340 = 4 \cdot 75 + 40$. Musíme proto ještě spočítat, kolik reálného času je pro Štěpána zbylých čtyřicet minut. Dosadíme tedy do předchozího vzorečku a budeme počítat.

$$\begin{aligned} 40 &= t + \frac{1}{20} \cdot t^2 \\ 0 &= t^2 + 20t - 800 \\ 0 &= (t - 20)(t + 40) \end{aligned}$$

Protože pro nás čas musí být kladný, volíme kořen $t = 20$. Dohromady reálně muselo uběhnout $4 \cdot 30 + 20 = 140$ min.

42. Válec a koule

Na stole je válec o výšce 16 cm a poloměru podstavy 2 cm. Válec na stole leží jednou z podstav. Dále se na stole nacházejí 2 koule o poloměru 1 cm. Také víme, že každá dvojice těles se dotýká. Určete v cm^2 obsah trojúhelníku s vrcholy v bodech dotyku.

Výsledek: 0.62854

Řešení:

Nejprve si uvědomíme, že průnik libovolné roviny rovnoběžné s deskou stolu a zadaného útvaru je buď prázdná množina, nebo množina bodů tvořící 3 kružnice, přičemž v rovině, ve které se nacházejí zadané tři body dotyku, jsou tyto body také body dotyku těchto kružnic.

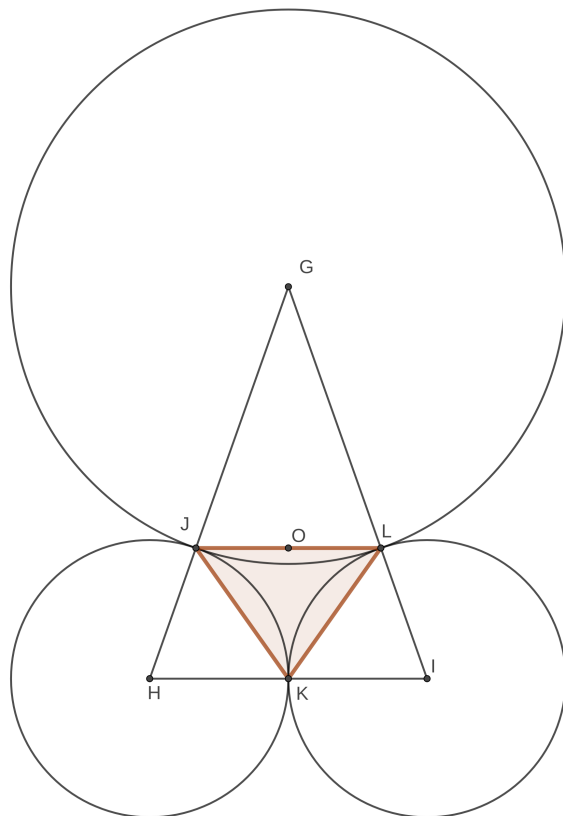
Úlohu si tak můžeme zjednodušit na obsah zvýrazněného $\triangle JKL$ na následujícím obrázku:

$\triangle GHI$ a $\triangle GJL$ jsou podobné s koeficientem podobnosti $\frac{2}{3}$, a tedy ze znalosti $|HI| = 2$ (dvakrát poloměr koule) víme, že $|JL| = \frac{4}{3}$.

Označme střed úsečky JL jako S .

Výška $|SK|$ v $\triangle JKL$ na stranu LJ je zřejmě $|GK| - |GS|$. Velikost $|GS|$ dopočítáme díky koeficientu podobnosti z $|GK|$, což je výška v $\triangle GHI$. Zároveň víme, že $|GI| = 3$ (součet poloměrů válce a koule). Z Pythagorovy věty platí:

$$|GI|^2 = |KI|^2 + |GK|^2,$$



Tedy:

$$|GK| = \sqrt{|GI|^2 - |KI|^2} = \sqrt{(2+1)^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|GS| = \frac{2}{3}|GK| = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

$$|SK| = |GK| - |GS| = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Nyní stačí dosadit vypočtené hodnoty do vzorečku pro obsah trojúhelníku:

$$S(\triangle JKL) = \frac{|LJ| \cdot |SK|}{2} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{9} \approx 0.62854 \text{ cm.}$$

43. Lea pořád myslí na polynomy

Máme polynom čtvrtého stupně $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Víme, že je součinem dvou polynomů druhého stupně $x^2 + ex + f$ a $x^2 + e'x + f'$, které mají diskriminanty rovny 9 a 16 a minimálně jeden kořen mají stejný. Též víme, že má náš polynom pouze celočíselné kořeny všechny v absolutní hodnotě menší nebo rovny pěti. Napište součet všech možných hodnot, kterých může nabývat d , za předpokladu, že $a = 7$.

Výsledek: -40

Řešení:

Stejně jako původní polynom budou mít oba polynomy, na jejichž součin ho rozkládáme, celočíselné kořeny, které budou v absolutní hodnotě menší nebo rovny pěti. To znamená, že tyto polynomy budou mít i celočíselné koeficienty. To nám nedává až tak moc možností, jak dané polynomy mohou vypadat. Napišme si u obou polynomů vždy pro danou hodnotu e či e' , jakou musejí mít hodnotu koeficientů f či f' – (dopočítáme ze vzorečku pro diskriminant $b^2 - 4ac$). A jaké nám to pak dává kořeny – zjistíme z Viětových vztahů.

Nejprve pro $x^2 + ex + f$ s diskriminantem 9. To znamená, že nám stačí zkoumat lichá e , protože jinak by f nebylo celočíselné.

- $|e| = 1 \rightarrow f = -2$ tedy máme dvě možnosti pro kořeny $-1, 2$ nebo $1, -2$.
- $|e| = 3 \rightarrow f = 0$ tedy máme dvě možnosti pro kořeny $0, 3$ nebo $0, -3$.
- $|e| = 5 \rightarrow f = 4$ tedy máme dvě možnosti pro kořeny $1, 4$ nebo $-1, -4$.
- $|e| = 7 \rightarrow f = 10$ tedy máme dvě možnosti pro kořeny $2, 5$ nebo $-2, -5$.
- Pro větší e v absolutní hodnotě dostaneme už moc velké kořeny.

Nyní pro $x^2 + e'x + f'$ s diskriminantem 16. To znamená, že nám stačí zkoumat sudá e' , protože jinak by f' nebylo celočíselné.

- $|e'| = 0 \rightarrow f' = -4$ tedy máme kořeny $-2, 2$
- $|e'| = 2 \rightarrow f' = -3$ tedy máme dvě možnosti pro kořeny $-1, 3$ nebo $1, -3$.
- $|e'| = 4 \rightarrow f' = 0$ tedy máme dvě možnosti pro kořeny $0, 4$ nebo $0, -4$.
- $|e'| = 6 \rightarrow f' = 5$ tedy máme dvě možnosti pro kořeny $1, 5$ nebo $-1, -5$.
- Pro větší e' v absolutní hodnotě dostaneme už moc velké kořeny.

Nyní opět použijeme Viětovy vztahy, a to na dopočítání koeficientů. To, že je a rovno sedmi, znamená, že součet kořenů je roven mínus sedmi. Vzhledem k tomu, že naše dva polynomy mají mít navíc alespoň jeden kořen stejný, dostaneme, že jediné možnosti kořenů jsou $-2, -5, -2, 2$ a $0, -3, 0, -4, 0$. Nyní víme, že d je rovno součinu všech kořenů, takže řešením je $-40 + 0 = -40$.

44. Jekl čtvercový

Tonda se kvůli nedorozumění dostal do vězení a velmi se tam nudil. Od svobody ho oddělovala mřížka $n \times m$ čtverců. Tonda napočítal, že mřížka obsahuje 50141 podčtverců, což jsou části mřížky z $k \times k$ čtverců pro nějaké $k \geq 1$. Najděte všechny možnosti pro n a m . Jako výsledek zadejte součet $s(n) + s(m)$ přes všechny možné rozměry mřížky, kde $s(x)$ je ciferný součet x .

Výsledek: 142

Řešení:

Začněme tím, že si zafixujeme $n \leq m$. Uvědomme si, jak se v takovémto případě bude počítat počet všech čtverců. Hledáme-li čtverečky o velikosti 1×1 , pak jich tam bude n v jednom směru, m ve druhém, celkem tedy $n \cdot m$. Pokud chceme čtverečky velikosti 2×2 , pak se dívejme jen na třeba horní levý čtvereček, to budou v jednom směru všechny až na ten poslední, tj. $(n - 1) \cdot (m - 1)$, atd. Až do velikosti $n \times n$, to je ten největší čtverec, který se tam při našem předpokladu vleze. Rozepišme:

$$\begin{aligned}
 &1 \times 1 \dots n \cdot m \\
 &2 \times 2 \dots (n - 1) \cdot (m - 1) \\
 &3 \times 3 \dots (n - 2) \cdot (m - 2) \\
 &\vdots \\
 &n \times n \dots (n - n + 1) \cdot (m - n + 1) = 1 \cdot (m - n + 1)
 \end{aligned}$$

Napišme si součet všech čtverců jako sumu a upravujme pomocí vzorců pro aritmetické a kvadratické řady:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)(m-i) &= \sum_{i=0}^{n-1} nm - in - im + i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} nm - \sum_{i=0}^{n-1} in - \sum_{i=0}^{n-1} im + \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\
 &= n \cdot nm - \frac{(n-1)n}{2} \cdot n - \frac{(n-1)n}{2} \cdot m + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2 \\
 50141 &= n^2m - \frac{n^3 - n^2}{2} - \frac{n^2 - n}{2} \cdot m + \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - n^2 \\
 300846 &= 6n^2m - 3n^3 + 3n^2 - 3n^2m + 3nm + 2n^3 + 3n^2 + n - 6n^2 \\
 300846 &= 3n^2m - n^3 + n + 3nm \\
 300846 &= n \cdot (n+1) \cdot (3m - n + 1)
 \end{aligned}$$

Součet jsme si upravili do poměrně hezkého tvaru, víme, že n, m jsou počty čtverců, a proto i přirozená čísla. Nesmíme ovšem zapomenout, že tento vzorec není symetrický a platí jen za podmínky, že $n \leq m$. Jak na to teď? Vidíme, že číslo 300846 je dělitelné dvěma po sobě jdoucími čísly $n, n + 1$. Můžeme si tedy najít všechny dělitele čísla 300846 a podívat se, kteří dělitele jdou po sobě a pro ně pak dopočítat m a jen hlídat, že pořád platí $n \leq m$. Pro ty línější (jako já) se dá napsat jednoduchý for cyklus.

```

1 import math
2
3 def cifernysoucet(x):
4     return sum(int(digit) for digit in str(x))
5
6 def check(n,m):
7     ctverecku = 0
8     for i in range(1,n+1):
9         ctverecku += (n+1-i)*(m+1-i)
10    print("Soucet ctverecku:", ctverecku)
11
12
13 soucet = 0
14 big = 6*50141
15 limit = int(math.sqrt(big))
16 for n in range(1, big):
17     if big % (n*(n+1)) == 0:
18         y = (big/(n*(n+1))+n-1)
19         if y % 3 == 0:
20             m = y//3
21             cifsoucet = cifernysoucet(int(m))+cifernysoucet(n)
22             soucet += cifsoucet
23             print("n=",n, " m=", m, " ciferny soucet:", soucet)
24             if n < m:
25                 check(n,int(m))
26             else:
27                 check(int(m),n)

```

Podívejme se, jak to tedy dopadne:

```

1 n= 1 m= 50141.0  ciferny soucet: 12
2 Soucet ctverecku: 50141
3 n= 2 m= 16714.0  ciferny soucet: 33
4 Soucet ctverecku: 50141
5 n= 13 m= 555.0  ciferny soucet: 52
6 Soucet ctverecku: 50141
7 n= 38 m= 80.0  ciferny soucet: 71
8 Soucet ctverecku: 50141
9 n= 57 m= 49.0  ciferny soucet: 96
10 Soucet ctverecku: 50225

```

Vidíme, že jsme získali pět výsledků, nicméně ten poslední je 57 a 49, kde n je větší než m , přičemž při zpětné kontrole vyšel součet jiný, než chtěný (je tomu proto, že při špatném pořadí n, m se v sumě začínou objevovat záporné členy a součet zmenší na požadované číslo, to je však při reálném použití špatně, protože nemůžeme mít záporný počet čtverců).

Vyhodíme proto poslední dvojici a vezme ciferný součet a zvětšíme ho dvakrát (pozn. ciferný součet je počítán postupně, tedy ciferný součet ve výstupu už je ciferný součet jeho a všech předchozích dvojic). Protože teď jsme předpokládali, že $n \leq m$, ale pro $m \leq n$ získáme další symetrická řešení. Řešením je proto číslo 142.

45. Komplexní život pana Fibonacciho

Mějme jednotkovou kružnici a na ní posloupnost bodů $(f_n)_{n=0}^{\infty}$, body jsou určeny svým úhlem α_i , který svírají s osou x . Víme, že $\alpha_0 = \frac{2\pi}{11}$ a $\alpha_1 = \frac{2\pi}{13}$ a platí $\alpha_i = \alpha_{i-1} + \alpha_{i-2}$. Označme m minimální vzdálenost, kterou může mít bod posloupnosti od bodu 1, tedy $m = \min(|f_n - 1|)$. Najděte nejmenší i takové, že $|f_i - 1| = m$.

Výsledek: 21

Řešení:

Můžeme si povšimnout podobnosti s Fibonacciho posloupností: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, \dots$, která je definovaná jako $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$.

- $\alpha_2 = F_2 \cdot \frac{2\pi}{13} + F_1 \cdot \frac{2\pi}{11}$
- $\alpha_3 = F_3 \cdot \frac{2\pi}{13} + F_2 \cdot \frac{2\pi}{11}$
- $\alpha_4 = F_4 \cdot \frac{2\pi}{13} + F_3 \cdot \frac{2\pi}{11}$
- Obecně tedy pro $n \geq 2$ dostaneme $\alpha_i = F_i \cdot \frac{2\pi}{13} + F_{i-1} \cdot \frac{2\pi}{11}$

Nejmenší možná vzdálenost od bodu 1 by samozřejmě byla nulová vzdálenost. Abychom mohli tuto vzdálenost dostat, potřebovali bychom, aby existovalo i takové, že F_i je dělitelné třinácti a F_{i-1} je dělitelné jedenácti. První takové i je 21. Tudíž první i , pro které je vzdálenost 0, je 21.