Mathrace Sada 1

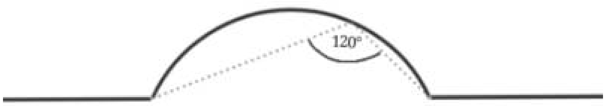
odevzdávejte do 17.00

Pokud je řešením počet nějakých objektů a správná odpověď je nekonečno, napište „inf". Pokud je řešením racionální necelé číslo, napište jej jako zlomek v základním tvaru (např. 5/7, ale ne 4/6). Pokud je řešením iracionální číslo, napište jej v desetinném zápisu s tečkou zaokrouhleno na 5 desetinných míst (např. 5.55579846 . . . jako 5.55580).

1. **Hvězdní kámoši**
C3P0 a R2D2 se potkali na hvězdném semináři pro roboty. C3P0 byl naštvaný, že je první v abecedě. R2D2 mu oponoval, že to nezná, protože u něj je pravděpodobnost, že se to stane, dost malá. Určete prvních pět nenulových číslic pravděpodobnosti, že R2D2 bude první v abecedě mezi 20 roboty, jestliže jména robotů se tvoří písmeno-číslice-písmeno-číslice. Písmeno se vybírá z klasické anglické abecedy a každé jméno robota je unikátní.
Výsledek: 11136

Řešení:
Existuje 10 číslic a 26 písmen anglické abecedy. Chceme určit pravděpodobnost, že R2D2 bude první v abecedě mezi dvaceti roboty, tedy výsledek bude podíl počtu dvacetic, kde je R2D2 první v abecedě, a počtu všech dvacetic, kde je R2D2. Počet všech robotů je $26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10$. Počet všech dvacetic, kde je R2D2, získáme tak, že ze všech zbylých robotů vybereme 19 dalších. Tedy jmenovatel našeho zlomku bude $\binom{26^2 \cdot 10^2 - 1}{19}$. Počet dvacetic, kde je R2D2 první v abecedě, určíme tak, že zjistíme, kolik robotů je v abecedě za R2D2, a z tohoto počtu vybereme 19. Robotů, kteří začínají R2D a jsou v abecedě dále, existuje 7 (poslední číslice musí být větší než 2). Robotů začínajících pouze R2 je $22 \cdot 10$ (třetí pozice musí být písmeno větší než D a poslední číslice už může být libovolná). Podobně robotů začínajících pouze R existuje $7 \cdot 26 \cdot 10$. Robotů nezačínajících na R, kteří jsou v abecedě za R2D2, existuje $8 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10$. (Opět pouze první písmeno musí být větší než R, zbytek už libovolný) Počet dvacetic, kde je R2D2 první v abecedě, je tedy $\binom{7+22 \cdot 10+7 \cdot 26 \cdot 10+8 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10}{19}$. Hledaná pravděpodobnost je tedy $\frac{\binom{7+22 \cdot 10+7 \cdot 26 \cdot 10+8 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10}{19}}{\binom{26^2 \cdot 10^2 - 1}{19}}$, což po vyčíslení dá správnou odpověď prvních pěti nenulových číslic - **11136**.

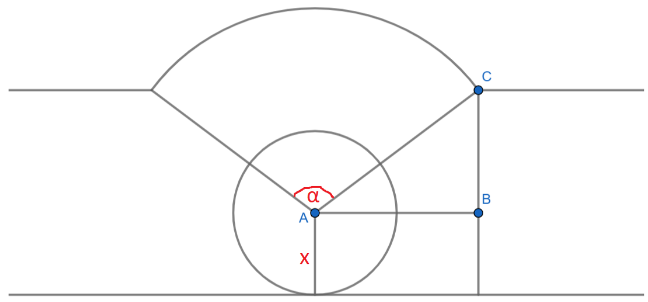
2. **Traktor**
Traktor jede přes kládu pevně připevněnou k zemi. Uprostřed předního kola má senzor, který zaznamenává jeho pohyb. Po přejetí klády vykreslil senzor na počítač křivku viz obrázek. Určete poloměr klády v centimetrech, když víte, že poloměr předního kola je 50 cm.

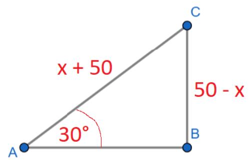


Výsledek: $\frac{50}{3}$

Řešení:

Prvně si musíme uvědomit, že když traktor přejíždí kládu, střed jeho kola bude mít od povrchu klády stále stejnou vzdálenost (konkrétně poloměr kola, tedy 50 cm.) Znamená to, že kláda a část kružnice, kterou vykreslil senzor, budou mít stejný střed. Označíme poloměr klády jako x cm a pak poloměr





části kružnice na počítači bude $(x + 50)$ cm. Nyní se zaměříme na úhel mezi spojnicemi průsečíků části kružnice a polopřímek (v obrázku α.) Část kružnice je zřejmě ekvigonála s obvodovým úhlem $120°$. Středový úhel je vždy dvojnásobný, tedy $240°$ a $\alpha = 360° - 240° = 120°$. Z obrázku se zaměříme na pravoúhlý trojúhelník ABC s délkami stran $(x + 50)$ cm a $(x - 50)$ cm. Vypočítáme $\angle BAC$, který bude roven $\frac{180-\alpha}{2}° = \frac{180-120}{2}° = \frac{60}{2}° = 30°$. Použijeme znalost, že $sin(30°) = \frac{1}{2}$ a zároveň je to poměr protilehlé ku přeponě a dostáváme výsledek:

$$\frac{1}{2} = \frac{50 - x}{50 + x}$$

$$50 + x = 2(50 - x)$$

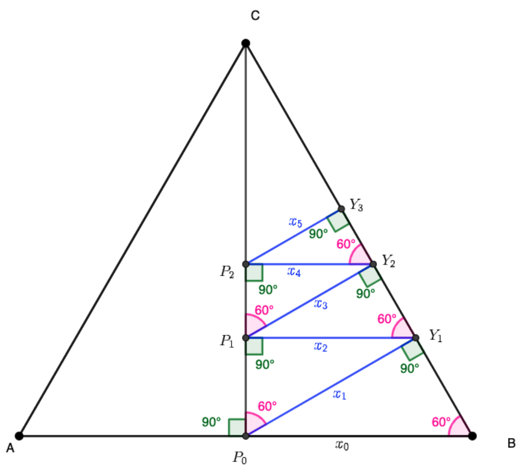
$$3x = 50$$

$$x = \frac{50}{3}$$

3. **Devyho intervaly**
   Devy trénuje na běžecký závod, a tak běhá v rovnostranném trojúhelníku o straně 1, přepůleném výškou. Začne u paty výšky a utíká kolmo na jednu ze dvou stran, na kterých pata výšky neleží. Když dorazí na stranu, tak se otočí a utíká zpátky kolmo na výšku. Pak až dorazí na výšku, tak se zase otočí a utíká kolmo na tu stejnou stranu a tak dál a tak dál, dokud mu nedojde dech (což jemu nikdy nedojde, tudíž do nekonečna). Jak dlouhou trasu uběhne?
   Výsledek: $\frac{3}{2} + \sqrt{3} = 3.23205$

   Řešení:
   Začneme tím, že si nakreslíme obrázek Devyho trasy. Zaznačme si do obrázku úhly. Protože ABC je trojúhelník rovnostranný, tak $|\angle ABC| = 60°$. Můžeme dopočítat, že $|\angle BP_0Y_1| = 30°$, a proto pak $|\angle Y_1P_0P_1| = 60°$. Vznikají nám tam proto postupně podobné trojúhelníčky, které jsou polovinou rovnostranných trojúhelníků. Ze zadání víme, že $|AB| = 1$, tedy $x_0 = |P_0B| = \frac{1}{2}$. Délku x_1 pak můžeme spočítat jako výšku v rovnostranném trojúhelníku se stranou x_0 (nebo pomocí $\sin, \cos$ úhlů). Tedy $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_0$. Stejně tak x_2 můžeme spočítat jako výšku v rovnostranném trojúhelníku se stranou x_1, tedy $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1$. Z cest jsme získali geometrickou posloupnost s kvocientem $q = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ a prvním členem $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Součet této konvergující (kvocient je menší než jedna) geometrické poslupnosti pak můžeme spočítat pomocí vzorce:

$$S = x_1\frac{1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4 + 2\sqrt{3}}{4 - 3} = \frac{3}{2} + \sqrt{3}$$



4. **Zbytek od oběda**
   Kolik existuje přirozených čísel n menších než 4444 takových, že existují přirozená čísla a, b tak, že $4444a + 2222b$ dává zbytek 1 po dělení n?
   Výsledek: 2000

   Řešení:
   Pokud je n soudělné s 4444, je určitě soudělné i s 2222, tedy existuje nějaké přirozené $d > 1$, které dělí n, 4444, 2222. Což znamená, že d bude dělit i $4444a + 2222b$ pro libovolná přirozená čísla a, b. Tedy pokud bychom si napsali $4444a + 2222b = cn + r$, kde r je náš zbytek po dělení, takže d musí dělit i r, tudíž r musí být větší než 1.

   Nyní se podívejme na ta n, která jsou s 4444 nesoudělná. Z Bezoutovy rovnosti plyne, že existují k, l, celá čísla taková, že $4444k + nl = 1$. To znamená, že 4444 dává zbytek 1 po dělení n, protože pokud se obě strany mají rovnat, musí dávat stejný zbytek po dělení n.

   My bychom potřebovali nějaké přirozené číslo, ale k může být i záporné. Nicméně zbytek 1 po dělení n bude dávat i každé číslo ve tvaru $4444(k + cn)$ pro celé číslo c, tudíž existuje i přirozené číslo $k' = k + cn$ (pro nějaké vhodné c) takové, že $4444k'$ dává zbytek 1 po dělení n. Nyní zvolíme $b = 2$ a $a = k' - 1$ a dostaneme $4444(k' - 1) + 2 \cdot 2222 = 4444k'$, které tedy dává zbytek 1 po dělení n.

   Takže taková a, b existují právě pro n nesoudělná s 4444. Jejich počet můžeme spočítat například pomocí Eulerovy funkce $\phi(4444) = \phi(4) \cdot \phi(11) \cdot \phi(101) = 2 \cdot 10 \cdot 100 = 2000$.

5. **Ujetý eskalátor**
   Ráďa s Leou jezdí do prvního patra. Mohou jezdit buď po eskalátoru, nebo výtahem, který jede přímo nahoru a potká se s vrchním koncem eskalátoru. Lea zjistila, že když jede na eskalátoru a jde u toho do protisměru, tak jí cesta dolů trvá třikrát déle (Lea je rychlejší než eskalátor), než když jde nahoru stejným směrem jako eskalátor. Když zjistily tuto věc, rozhodly se uspořádat závody na různé způsoby. Pojede-li Lea výtahem a Ráďa na eskalátoru (ani jedna u toho nejde), bude Rádin čas $1.875\times$ větší než Lein. Pojede-li Lea na eskalátoru a Ráďa nejprve půjde od jednoho konce k výtahu a pak teprve pojede výtahem, bude Lein čas $1.2\times$ větší než Rádin. Urči cosinus úhlu, pod kterým stoupají schody. (Ráďa s Leou samozřejmě chodí obě stejnou konstantní rychlostí a nástupy/výstupy a čekání na výtah můžeme zanedbat.)
   Výsledek: $\frac{3}{5}$

   Řešení:
   Rychlost eskalátoru si označíme jako v_e, rychlost chůze jako v_{ch} a délku eskalátoru jako s. Potom rychlost, jakou se budeme pochybovat nahoru (ve směru eskalátoru), bude $v_{ch} + v_e$ a rychlost, kterou se budeme pohybovat v protisměru, $v_{ch} - v_e$. Z druhé věty tedy dostáváme vztah:

$$\frac{3s}{v_{ch} + v_e} = \frac{s}{v_{ch} - v_e}$$

$$3(v_{ch} - v_e) = v_{ch} + v_e$$

$$v_{ch} = 2v_e$$

Dále si označíme výšku výtahu jako x a z Pythagotrovy věty dostáváme, že vzdálenost začátku eskalátoru a začátku výtahu v přízemí je $\sqrt{s^2 - x^2}$. Rychlost výtahu označíme jako v_v. Ze čtvrté věty tedy dostáváme:

$$\frac{s}{v_e} = 1,875\frac{x}{v_v}$$

$$v_v = 1,875\frac{xv_e}{s}$$

A z páté věty vidíme, že

$$\frac{s}{v_e} = 1,2(\frac{\sqrt{s^2 - x^2}}{v_{ch}} + \frac{x}{v_v}).$$

Nyní nahradíme v_{ch} pomocí $v_{ch} = 2v_e$ a v_v pomocí $v_v = 1,875\frac{xv_e}{s}$ a dostáváme:

$$\frac{s}{v_e} = 1,2(\frac{\sqrt{s^2 - x^2}}{2v_e} + \frac{s}{1,875v_e})$$

$$3,75s = 2,25\sqrt{s^2 - x^2} + 2,4s$$

$$1,35s = 2,25\sqrt{s^2 - x^2}$$

$$1,8225s^2 = 5,0625s^2 - 5,0625x^2$$

$$5,0625x^2 = 3,24s^2$$

$$\frac{x}{s} = \sqrt{\frac{3,24}{5,0625}} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{4}{5}$$

Víme tedy, že délky x a s jsou v poměru $4 : 5$, můžeme tedy položit $x = 4a$, $s = 5a$ a $\sqrt{s^2 - x^2} = 3a$. Kosinus úhlu je poměr přilehlé ku přeponě a dostáváme tedy výsledek

$$\frac{\sqrt{s^2 - x^2}}{s} = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}.$$

6. **Na minutu přesně**

Účastníci Mathrace musejí tlesknout vždy, když se aktuální čas v minutách (počet minut, které uběhly od poslední půlnoci) rovná velikosti úhlu, který svírají ručičky hodin, v úhlových minutách. Soutěž začíná v 16 hodin, tedy v 960 minut. V jaký čas tlesknou účastníci poprvé? Výsledkem je zlomek vyjadřující aktuální počet minut. Hodiny mají jen hodinovou a minutovou ručičku.

Výsledek: $\frac{324000}{331}$

Řešení:

Začínáme, když je 16:00 (tedy 960 min) a ručičky svírají úhel $120° = 7200'$. Nyní se podíváme, co se stane, když bude o minutu víc. Velká ručička se posune ve směru hodinových ručiček o $\frac{1}{60}$ celého úhlu. Celý úhel má $360 \cdot 60' = 21600'$, tedy náš úhel se zmenší o $\frac{21600}{60}' = 360'$. Malá ručička se ale posune míň, konkrétně o $\frac{1}{12 \cdot 60}$ celého úhlu. Náš úhel se tedy zároveň zvětší o $\frac{21600}{12 \cdot 60}' = 30'$. Když to spojíme, dostáváme, že s každou minutou se nám úhel zmenší o $330'$. Počet minut, který musíme přičíst k 960, aby se nám minuty rovnaly, si označíme jako x a dostáváme jednoduchou rovnici:

$$960 + x = 7200 - 330x$$

$$331x = 6240$$

$$x = \frac{6240}{331}$$

Výsledek bude tedy $960 + \frac{6240}{331} = \frac{324000}{331}$.

7. **Polynom**
Uvažme polynom $x^3 + ax^2 + bx + 8$. Terka zjistila, že má dvojnásobný kořen a všechny jeho kořeny jsou celočíselné. Určete součet hodnot, kterých může nabývat výraz $a^2 - 2b$.
Výsledek: 78

Řešení:
Označme si dvojnásobný celočíselný kořen jako x_1, pak je tam ještě třetí kořen x_3, přičemž protože je polynom třetího stupně, už to musejí být všechny kořeny a můžeme ho rozložit na kořenové činitele tvaru: $x^3 + ax^2 + bx + 8 = (x - x_1)(x - x_1)(x - x_3)$. Platí:

$$\begin{aligned} x_1x_1x_3 &= -8 \\ x_1x_1 + x_1x_3 + x_1x_3 &= b \\ x_1 + x_1 + x_3 &= -a \end{aligned}$$

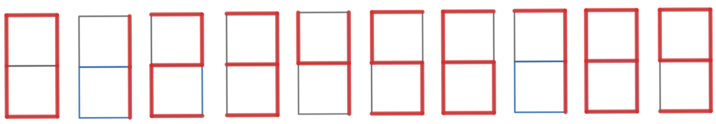
známé taky jako Viétovy vztahy. Vezme si první rovnici, ze které vidíme, že dvojnásobný kořen musí dělit -8 ve druhé mocnině, získáváme proto možnosti $x_1 = \pm 1, \pm 2$. Počítejme:

- $x_1 = 1, x_3 = -8$, pak $a^2 - 2b = 6^2 - 2(-15) = 66$
- $x_1 = -1, x_3 = -8$, pak $a^2 - 2b = 10^2 - 2 \cdot 17 = 66$
- $x_1 = 2, x_3 = -2$, pak $a^2 - 2b = 2^2 - 2(-4) = 12$
- $x_1 = -2, x_3 = -2$, pak $a^2 - 2b = 8^2 - 2 \cdot 12 = 12$

Výraz může nabývat dvou hodnot, a výsledek tedy bude jejich součet 12+66=78.

8. **Rozbitý display**
Lukáš je zručný a vyrobil si funkční digitální display hodin (půlnoc je 00 : 00). Teda skoro funkční. Občas náhodné kombinace segmentů nesvítí. Display je tvořen čtyřmi pozicemi pro cifry, každá pozice má klasicky 7 segmentů. Kolik existuje kombinací rozsvícení segmentů takových, že z nich lze již jednoznačně určit, kolik je hodin?
Výsledek: 950 208

Řešení:



Nejdříve se zaměříme na poslední (čtvrtou) pozici. Jedná se o minutovou pozici která může obsahovat všechny číslice $0-9$. V digitálním zápisu si můžeme povšimnout, že všechny číslice jsou podmnožinou číslice 8 (8 obsahuje všech 7 segmentů). Na této pozici je možné jednoznačně určit pouze 8, zbytek lze na ni vždy doplnit. Musíme tedy najít taková rozsvícení, že jednoznačně určují 8. Jsou určeny 3 segmenty (prostřední, horní vpravo, dolní vlevo), které musí vždy svítit, abychom mohli vyloučit číslice $0, 6, 9$. Zároveň tímto rozsvícením vyloučíme i $1, 3, 4, 5, 7$, takže nám zbývá vyloučit pouze číslici 2. Na to máme 3 možnosti: buď bude svítit segment vlevo nahoře; vpravo dole; nebo oba. Takto jsme tedy jednoznačně určili číslici 8, přičemž horní a dolní segment jsme vůbec nepoužili. Celkem máme tedy 3×2(horní svítí/nesvítí)$\times 2$(dolní svítí/nesvítí)=**12 možností**, jak jednoznačně určit poslední pozici.

3. pozice (desítky minut) může nabývat hodnot $0 - 5$.
Jednoznačné určení číslice 0
Pokud bude svítit levý dolní segment, hned můžeme vyřadit $1, 3, 4, 5$. Na odlišení od dvojky musí svítit levý horní, pravý dolní, nebo oba zároveň => 3 možnosti. Dále máme pořád nepoužívané 3 segmenty (horní; pravý horní; dolní), které můžou, ale nemusí svítit. Celkem: $3 \times 2^3 = 24$ možností. Pokud by levý dolní segment nesvítil, tak musí svítit pravý horní (pro odlišení od 5) a levý horní (pro odlišení od 3). Tím rovnou vyřazujeme 1 a 2 a pro vyřazení 4 máme 3 možnosti: svítí horní/ dolní/ oba. Tímto máme jednoznačně určenou 0 bez využití pravého dolního segmentu (levý dolní musí nesvítit, aby se tyto možnosti odlišily od výše zmíněných 24 možností) => $3 \times 2 = 6$ dalších možností. Celkem celkem: $24 + 6 = 30$ možností.
Jednoznačné určení číslice 1
1 je bohužel podmnožinou číslic 0 a 3, proto se nedá jednoznačně zapsat.

Jednoznačné určení číslice 2
Na displayi musí svítit prostřední segment (na rozlišení od 0) a pokud bude svítit levý dolní (jinak se neodliší od 3), už je 2 jednoznačná. Pro tuto variantu máme $2^3 = 8$ možností (pravý horní; horní; dolní svítí/nesvítí). Jiná možnost není.
Jednoznačné určení číslice 3
Podobně jak u dvojky musí svítit prostřední (0) a pravý dolní (2). Ještě se musíme odlišit od 5 - to máme jednu možnost: pravý horní segment. Na rozlišení od 4 musí svítít horní, dolní, nebo oba segmenty => celkem tedy 3 možnosti.
Jednoznačné určení číslice 4
Musí svítit: prostřední (0), levý horní (3), pravý horní (5). Tímto rozsvícením zároveň vyřadíme i 1 a 2 => na pravém dolním segmentu nezáleží, jestli svítí, nebo ne => 2 možnosti.
Jednoznačné určení číslice 5
Musí svítit: prostřední (0), levý horní (3). Tím vyřazujeme i 1 a 2. 4 můžeme vyřadit rozsvícením horního, dolního, nebo obou segmentů - 3 možnosti. Stále jsme nepoužili pravý dolní segment => $3 \times 2 = 6$ možností.
30+0+8+3+2+6 = 49 možností pro 3. pozici.

Pokud na první pozici bude 0 nebo 1, na druhé pozici musí být osmička, kterou můžeme jednoznačně určit **12 způsoby**. Pokud bude tedy na druhé pozici 8, víme, že na první je 0, nebo 1, přičemž 1 nejsme schopni jednoznačně zapsat. 0 můžeme zapsat celkem $(2^4 - 1) \times 2^2 =$ **60 způsoby**, kde 2^4 jsou všechny světelné kombinace horního; levého horního; levého dolního a dolního segmentu až na tu (-1), kde žádný z těchto 4 segmentů nesvítí (tím máme zajištěné odlišení od 1). To celé je vynásobené 2^2 za pravý horní a pravý dolní segment, které můžou svítit, ale nemusejí.

Na první pozici může být i dvojka. Tu odlišíme od 0 a 1 rozsvícením prostředního segmentu. Dále máme 4 další segmenty (horní; pravý horní; levý dolní a dolní), které můžou svítit => 2^4 =**16 možností**. V tomto případě, když víme, že na první pozici je dvojka, na druhé pozici můžou být pouze číslice $0 - 3$.
Jednoznačné určení číslice 0
Pokud bude svítit levý horní segment, hned můžeme vyřadit $1, 2, 3$ a máme $2^5 = 32$ možností. Pokud levý horní segment svítit nebude, musí svítit pravý dolní (pro vyřazení dvojky) a levý dolní (3). Tím rovnou vyřazujeme i jedničku. 2 segmenty svítí, 1 svítit nemůže a na zbylých 3 nezáleží => $2^3 = 8$ možností. Celkem tedy 40 možností
Jednoznačné určení číslice 1
1 je bohužel podmnožinou číslic 0 a 3, proto se nedá jednoznačně zapsat.
Jednoznačné určení číslice 2
Na displayi musí svítit prostřední segment (na rozlišení od 0), a pokud bude svítit levý dolní (jinak se neodliší od 3), tak už je 2 jednoznačná. Pro tuto variantu máme $2^3 = 8$ možností (pravý horní; horní; dolní svítí/nesvítí).
Jednoznačné určení číslice 3
Podobně jak u dvojky musí svítit prostřední (0) a pravý dolní (2). Zbylé 3 segmenty mohou svítit v libovolné kombinaci, takže máme zase $2^3 = 8$ možností.
40+0+8+8 = 56 možností pro 2. pozici, pokud na 1. pozici je dvojka.

Výsledné 4 pozice jsou nezávislé, proto počet možných rozsvícení můžeme vyjádřit jako součin možností na každé pozici.
Pokud na 1. pozici je 0 => $60 \times 12 \times 49 \times 12$.
Pokud na 1. pozici je 2 => $16 \times 56 \times 49 \times 12$.
Celkem tedy: $60 \times 12 \times 49 \times 12 + 16 \times 56 \times 49 \times 12 = 950208$ možností.

9. **Marťovo DnD**
Marťa hraje DnD a hází třemi kostkami. Při hodu se počítají lepší dvě kostky a pro úspěch potřebuje hodit součet alespoň 9. Jaká je pravděpodobnost, že se mu to podaří?
Výsledek: $\frac{113}{216}$

Řešení:
Způsobů, kterými může skončit hod třemi kostkami, je celkem $6^3 = 216$. Zbývá nám určit, kolik z nich nám dá součet dvou větších alespoň 9.

Rozeberme si případy podle toho, jaké padlo největší číslo:

- Největší číslo je 6. Pak dostaneme součet alespoň 9 jen pro druhé největší číslo s hodnotou $3, 4, 5$ nebo 6.

Druhé největší	Třetí kostka	Kolika způsoby se tomohlo stát
6	6	1
6	{1,2,3,4,5}	$5 \times 3 = 15$
5	5	3
5	{1,2,3,4}	$4 \times 6 = 24$
4	4	3
4	{1,2,3}	$3 \times 6 = 18$
3	3	3
3	{1,2}	$2 \times 6 = 12$

Celkem máme $1 + 15 + 3 + 24 + 3 + 18 + 3 + 12 = 79$ způsobů, kolika mohlo padnout alespoň 9 s největší kostkou 6.

- Největší číslo je 5. Pak dostaneme součet alespoň 9 jen pro druhé největší číslo s hodnotou 4 nebo 5.

Druhé největší	Třetí kostka	Kolika způsoby se tomohlo stát
5	5	1
5	{1,2,3,4}	$4 \times 3 = 12$
4	4	3
4	{1,2,3}	$3 \times 6 = 18$

Celkem máme $1 + 12 + 3 + 18 = 34$ způsobů, kolika mohlo padnout alespoň 9 s největší kostkou 5.

- Největší číslo je 4 nebo méně. Pak zřejmě součet dvou největších bude nejvýše 8, což není výsledek, který by Marťa chtěl.

Sečteme všechny vyhovující možnosti a dostáváme výsledek $\frac{79+34}{216} = \frac{113}{216}$.

10. **Mrtě funkce**
Pro přirozené číslo n označíme $\Psi(n)$ součin všech jeho dělitelů. Kolik je $\log_{10} \Psi(\Psi(\Psi(\Psi(10))))$?
Výsledek: 45765225

Řešení:

$$\Psi(10) = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10 = 100$$
$$\Psi(100) = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 50 \cdot 100 = (1 \cdot 100) \cdot (2 \cdot 50) \cdot (4 \cdot 25) \cdot (5 \cdot 20) \cdot 10 = 10^9$$

Při výpočtu $\Psi(100)$ nám velmi pomohlo to, že dělitele šlo popárovat tak, že jejich součin byl 100 (až na jeden člen). Důvod je ten, že pokud $k \mid 100$, tak i $\frac{100}{k} \mid 100$. Obecně pro $\Psi(10^n)$ máme:

$$\Psi(10^n) = \Psi(2^n \cdot 5^n) = \begin{matrix} & 1 & \cdot & 2 & \cdot \dots \cdot & 2^{n-1} & \cdot & 2^n \\ \cdot & 5 & \cdot & 2 \cdot 5 & \cdot \dots \cdot & 2^{n-1} \cdot 5 & \cdot & 2^n \cdot 5 \\ \cdot & 5^2 & \cdot & 2 \cdot 5^2 & \cdot \dots \cdot & 2^{n-1} \cdot 5^2 & \cdot & 2^n \cdot 5^2 \\ & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \cdot & 5^n & \cdot & 2 \cdot 5^n & \cdot \dots \cdot & 2^{n-1} \cdot 5^n & \cdot & 2^n \cdot 5^n \end{matrix}$$

Tabulka dělitelů je velikosti $(n+1) \times (n+1)$, Takže pomocí popárování získáme $\frac{(n+1)^2}{2}$ zaokrouhleno dolů činitelů velikosti $2^n \cdot 5^n = 10^n$. Pro liché n je $(n+1)^2$ sudé, takže je jich právě $\frac{(n+1)^2}{2}$ a jejich celkový součin je:

$$(10^n)^{\frac{(n+1)^2}{2}} = 10^{\frac{n(n+1)^2}{2}}$$

Pokud je n sudé, tak tak je $(n+1)^2$ liché, a dělitelé tedy nepůjdou perfektně popárovat. Dělitel $2^{\frac{n}{2}} 5^{\frac{n}{2}} = 10^{\frac{n}{2}}$ by totiž chtěl být v páru se sám sebou, ale takový dělitel je jen jeden. Jinak je $\frac{(n+1)^2-1}{2}$ párů, takže jejich celkový součin je:

$$(10^n)^{\frac{(n+1)^2-1}{2}} \cdot 10^{\frac{n}{2}} = 10^{\frac{n(n+1)^2-n}{2}} \cdot 10^{\frac{n}{2}} = 10^{\frac{n(n+1)^2}{2}}$$

Výsledek je v obou případech stejný, takže máme následující vzorec pro $\Psi(10^n)$:

$$\Psi(10^n) = 10^{\frac{n(n+1)^2}{2}}$$

Pak už přímočarým výpočtem dojdeme k výsledku:

$$\Psi(\Psi(\Psi(\Psi(10)))) = \Psi(\Psi(\Psi(100))) = \Psi(\Psi(10^9)) = \Psi(10^{\frac{9\cdot 10^2}{2}}) = \Psi(10^{450}) = 10^{\frac{450\cdot 451^2}{2}} = 10^{45765225}$$

Odpověď je tedy **45765225**.

11. **Devy má dvě andulky**
Devy má dvě andulky. Jedna je zelená, druhá je modrá. Zelená krouží kolem kulatého lustru dokola, a to tak rychle, že jeden okruh jí trvá 20 s. Modrá krouží v opačném směru a jeden přelet jí zabere 25 s. Lustr se točí konstantní rychlostí ve směru zelené andulky. Ptáci vyletí ve stejnou dobu ze stejného místa. Poprvé se potkají opět na stejném místě obě andulky i lustr (ve výchozí pozici) za 400 s. Určete součet temp, kterými se může lustr otáčet. Tempem uvažujeme čas jedné otáčky.

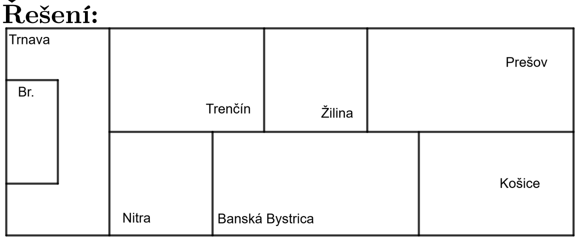
Výsledek: 496

Řešení:
Nejprve si uvědomíme, že směr letu ptáků ani směr otáčení lustru nic na úloze nemění. Jde nám jen o to, jak dlouho ptákům a lustru trvá jedna otáčka. Poprvé se vše potká po 400 sekundách, tedy nejmenší společný násobek všech tří rychlostí je 400. Nejmenší společný násobek čísel 20 a 25 je 100, proto hledáme všechna čísla, jejichž *nsn* s číslem 100 je 400. $100 = 2^2 \cdot 5^2$, v hledaném čísle musí být v rozkladu 2^4 a 5^n, kde $n \in \{0, 1, 2\}$. Správné možnosti jsou tedy $16, 80, 400$. Jejich součet je **496**.

12. **Výlety po Slovensku**
Vlakomil rád cestuje, ale nerad by jel na stejný výlet víckrát. Kolik výletů po Slovensku si může naplánovat, jestliže chce při každém výletu projet každý slovenský kraj právě jednou? Může přejet z kraje do druhého kraje, jen když spolu sousedí.

Výsledek: 22

Řešení:

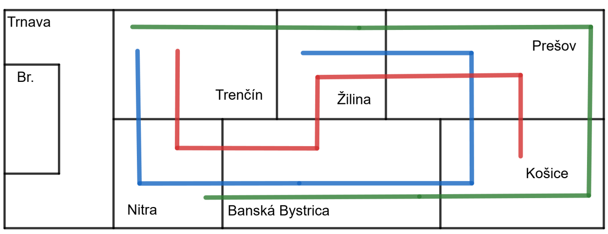


Zjednodušená mapa Slovenska

Bratislava sousedí pouze s jedním dalším krajem => výlet v ní bude buď začínat, nebo končit. Zaměříme se na výlety začínající v Bratislavě. Výsledný počet všech výletů bude dvojnásobný (ke každému výletu z Bratislavy existuje i výlet "po zpátku"). Všechny naše výlety tedy povedou z Bratislavy do Trnavy a následně buď do Nitry, nebo Trenčína.

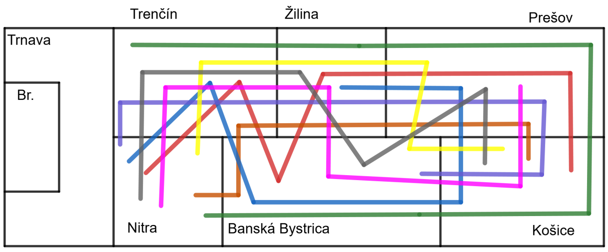
3. kraj = Trenčín

Trenčín → Žilina → Prešov → Košice → Banská Bystrica → Nitra ✓
Trenčín → Žilina → Prešov → Banská Bystrica → do Košic nebo do Nitry se nedostaneme
Trenčín → Žilina → Banská Bystrica → do Košic / Prešova nebo do Nitry se nedostaneme
Trenčín → Banská Bystrica → do Košic / Prešova / Žiliny nebo do Nitry se nedostaneme
Trenčín → Nitra → Banská Bystrica → Žilina → Prešov → Košice ✓
Trenčín → Nitra → Banská Bystrica → Prešov → do Košic nebo do Žiliny se nedostaneme
Trenčín → Nitra → Banská Bystrica → Košice → Prešov → Žilina ✓



3. kraj = Nitra

Nitra → Banská Bystrica → Košice → Prešov → Žilina → Trenčín ✓
Nitra → Banská Bystrica → Prešov →do Košic nebo do Žiliny / Trenčína se nedostaneme
Nitra → Banská Bystrica → Žilina →do Košic / Prešova nebo do Trenčína se nedostaneme
Nitra → Banská Bystrica → Trenčín → Žilina → Prešov → Košice ✓
Nitra → Trenčín → Žilina → Prešov → Košice → Banská Bystrica ✓
Nitra → Trenčín → Žilina → Prešov → Banská Bystrica → Košice ✓
Nitra → Trenčín → Žilina → Banská Bystrica → Prešov → Košice ✓
Nitra → Trenčín → Žilina → Banská Bystrica → Košice → Prešov ✓
Nitra → Trenčín → Banská Bystrica → Žilina → Prešov → Košice ✓
Nitra → Trenčín → Banská Bystrica → Prešov do Košic nebo do Žiliny se nedostaneme
Nitra → Trenčín → Banská Bystrica → Košice → Prešov → Žilina ✓



Máme 11 vyhovujících cest, celkem tedy 22 výletů.

13. **Základní kameny**
Máme polynom $p = x^3+y^3+z^3-x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2$. A definujme si tři základní stavební polynomiální kameny $k_1 = x+y+z$, $k_2 = xy+yz+zx$, $k_3 = xyz$. Můžeme vystavit polynom p pomocí našich stavebních kamenů jako $p = ak_1k_3 + bk_2^2 + ck_2k_1^2 + dk_1^4 + ek_3 + fk_2k_1 + gk_1^3$ (protože v p jsou pouze prvky stupně čtyři a tři). Najděte tyto koeficienty a jako řešení napište za sebe jejich absolutní hodnoty v pořadí $abcdefg$.
Výsledek: 2100331

Řešení:
Jediný způsob, jak získat člen x^3, je pomocí k_1 umocněného na třetí.

$$k_1^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2x) + 6xyz$$

$$k_1^3 - 6k_3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2x)$$

Členy tvaru u^2v získáme násobkem k_2k_1:

$$k_2k_1 = x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2x + 3xyz$$

$$x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2x = k_2k_1 - 3k_3$$

$$3(x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2x) = 3(k_2k_1 - 3k_3).$$

Dohromady dostáváme

$$k_1^3 - 6k_3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2x)$$

$$k_1^3 - 6k_3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(k_2k_1 - 3k_3)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = k_1^3 - 6k_3 - 3(k_2k_1 - 3k_3)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = k_1^3 + 3k_3 - 3k_2k_1.$$

Členy $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$ vyjádříme pomocí k_2^2:

$$k_2^2 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2(x^2yx + xy^2z + xyz^2)$$

Kde

$$x^2yx + xy^2z + xyz^2 = k_1k_3$$

$$k_2^2 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2k_1k_3$$
$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = k_2^2 - 2k_1k_3.$$

Nakonec vyjádříme p jako

$$p = x^3 + y^3 + z^3 - x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2$$

$$p = k_1^3 + 3k_3 - 3k_2k_1 - (k_2^2 - 2k_1k_3)$$
$$p = k_1^3 + 3k_3 - 3k_2k_1 - k_2^2 + 2k_1k_3.$$

Odtud vidíme, že $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$, $d = 0$, $e = 3$, $f = -3$, $g = 1$, a tedy výsledek je 2100331.

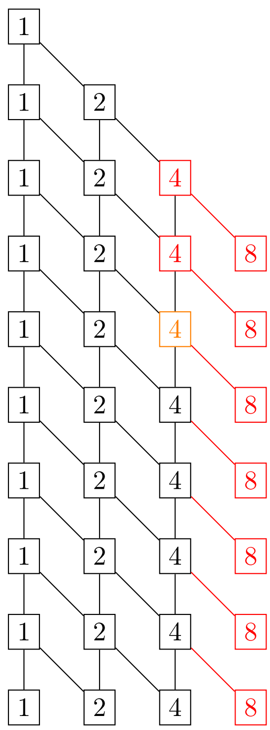
14. **Koule z modelíny**
Anna se rozhodla, že si chce vymodelovat koule. Vzala si plastelínu a začala modelovat. Celkem vymodelovala 10 koulí. První koule měla poloměr 1 m. Při každé další kouli se rozhodla s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, jestli kouli zdvojnásobí poloměr, nebo ho zachová. Určete pravděpodobnost, že jí k vymodelování 10 koulí bude stačit 1690 m^3 plastelíny.
Výsledek: $\frac{21}{256}$

Řešení:
Připomeňme, že objem koule se počítá pomocí vzorce $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Dále si můžeme předpočítat, jaký maximální poloměr může mít koule, aby ji mohla Anna vymodelovat v rámci těch 10 koulí.

Poloměr	1	2	4	8	...
Objem	4.18879...	33.51032...	268.08257...	2144.66058...	...

Víme tedy, že určitě nevymodelovala žádnou kouli s poloměrem 8 nebo větší. Jak mohlo její modelování vypadat?



Všechny černé cesty přes černé vrcholy znázorňují právě ty možnosti, jak by mohla Anna vymodelovat 10 koulí z modelíny, kterou má k dispozici, a na nichž by vymodelovala jen maximálně 5 koulí o poloměru 4.

Cesta se 6 koulemi o poloměru 4 je možná jen v případě, že alespoň dvě z koulí mají poloměr 1.

Cesty s více než 6 koulemi nejsou možné, což je jednoduché ověřit.

Každá cesta má pravděpodobnost $\frac{1}{2^9}$ a je jich celkem $1 + 9 + (4 + 5 + 6 + 7 + 8) + 2 = 42$.
Výsledná pravděpodobnost je tedy $\frac{42}{512} = \frac{21}{256}$.

15. **Kluk s kamením**
Lukáš je naštvaný, a tak kolem sebe ze zlosti hází kameny. Matematiku ale i přesto miluje, tak se po chvíli zarazil a začal radši počítat, jaká je (při náhodně zvoleném úhlu $(0 - 90$ stupňů) a síle vrhu) pravděpodobnost, že maximální výška kamene od země překoná jeho finální vzdálenost od místa vrhu (Lukáš se pohybuje na dokonalé rovině).
Výsledek: 0.15596

Řešení:
Podívejme se, jak musí Lukáš hodit kámen tak, aby jeho maximální výška byla stejná jako vzdálenost dopadu. Kámen poletí po parabole a nejvyššího místa dosáhne v jejím vrcholu. Umístěme si tuto parabolu do soustavy souřadnic tak, aby procházela počátkem a byla v něm rostoucí. To bude zároveň místo, na kterém Lukáš stojí. Označme maximální výšku kamene p a pokusme se vyjádřit parabolu rovnicí. Jelikož prochází počátkem, bude její rovnice tvaru $ax^2 + bx$. Maximální výšky kámen dosáhne, když $x = \frac{p}{2}$, a tak $\frac{a \cdot p^2}{4} + \frac{b \cdot p}{2} = p$. V bodě dopadu pak platí $a \cdot p^2 + b \cdot p = 0$. Vyřešením soustavy rovnic dostáváme rovnici paraboly

$$y = -\frac{4 \cdot x^2}{p} + 4x.$$

Abychom zjistili úhel, pod kterým byl takový kámen hozen, potřebujeme znát směrnici tečny v počátku. Pro řešitele, kteří umějí počítat s derivacemi, jistě nebyl problém ji dopočítat pomocí nich, podívejme se ale, jak se na ni dalo přijít i jiným způsobem.

Po tečně chceme, aby procházela bodem dotyku, tedy počátkem a zároveň měla s parabolou právě jeden společný bod. Také nesmí být rovnoběžná s osou paraboly, která je v našem případě rovnoběžná s osou y. Taková přímka bude mít rovnici tvaru $y = k \cdot x$. Když toto dosadíme do rovnice paraboly, dostaneme jako řešení všechny jejich průsečíky.

$$k \cdot x = -\frac{4 \cdot x^2}{p} + 4x$$

Tato rovnice má určitě řešení 0, protože oba útvary procházejí počátkem. Aby přímka opravdu byla tečnou, potřebujeme, aby i druhé řešení bylo 0. Dostáváme tedy po vydělení x a dosazení $x = 0$

$$\begin{aligned} \frac{4 \cdot x}{p} + k - 4 &= 0 \\ k - 4 &= 0 \\ k &= 4. \end{aligned}$$

Směrnice tečny v počátku je 4. Už stačí jen dopočítat úhel, který svírá s osou x. Ze známého vztahu dostaneme $tg\alpha = 4$, $\alpha = arctg4$. Jelikož Lukáš hází pod náhodným úhlem mezi 0 a $\frac{\pi}{2}$, pravděpodobnost, že úhel bude větší než $arctg4$, je $1 - \frac{2 \cdot cotg4}{\pi} \approx 0.15596$. Můžeme si všimnout, že na síle vrhu ani vzdálenosti dopadu nezáleží. Řešení by se tedy dalo zjednodušit a počítat pro nějakou konkrétní hodnotu p bez újmy na obecnosti.