Mathrace Sada 1

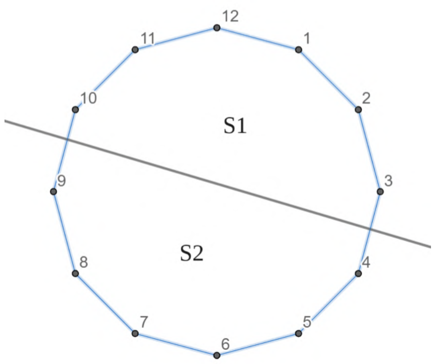
odevzdávejte do 17.00

Pokud je řešením počet nějakých objektů a správná odpověď je nekonečno, napište „inf“. Pokud je řešením racionální necelé číslo, napište jej jako zlomek v základním tvaru (např. 5/7, ale ne 4/6). Pokud je řešením iracionální číslo, napište jej v desetinném zápisu s tečkou zaokrouhleno na 5 desetinných míst (např. 5.55579846... jako 5.55580).

1. **Dělení hodin**

Výsledek: 68400

Řešení:



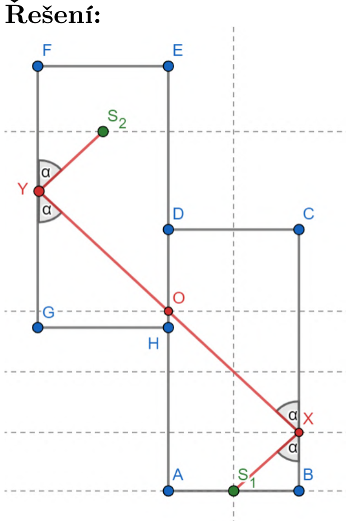
Hodiny si můžeme představit jako pravidelný dvanáctiúhelník. Součty v již rozříznutých hodinách si označíme S1 a S2. Zřejmě tyto dva součty musí dát dohromady součet čísel 1 až 12. Vždy tedy bude platit $S1 + S2 = 78$ a pokud se mají rovnat, pak $S1 = S2 = 39$. Můžeme si všimnout, že jeden takový řez prochází středem, viz obrázek. Nyní když tento řez otočíme o 30° od středu proti směru hodinových ručiček S2 se zvýší o 6 a tím pádem S1 se o 6 sníží. Když o 60°, tak se S2 sníží o 12 a když o 90°, tak se sníží o 18. V opačném směru se bude S1 snižovat a S2 zvyšovat. Tento řez na obrázku je tedy jediný řez procházející středem, který vyhovuje zadání.
Nyní nám tedy stačí vyřešit řezy, které středem neprocházejí. Podíváme se na řezy, které čísla rozdělí na množiny po 5 a po 7 číslech.
Zřejmě nejvyšší součet, který můžeme dostat pomocí pěti čísel je $12 + 11 + 10 + 9 + 8 = 30 < 39$. Žádný takový řez tedy nemůže splnit zadání. Další řezy nyní už řešit nemusíme, protože součet méně čísel (od 1 do 12) než šesti bude vždy menší než 39.
Jediný řez vyhovující zadání je tedy řez na obrázku, stačí tedy vypočítat:

$$1 \times 2 \times 3 \times 10 \times 11 \times 12 + 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 68400$$

2. **Šmoula hraje minigolf**

Výsledek: 2.66218

Řešení:



Střed úsečky XY označíme jako O. Vzhledem k tomu, že úhel dopadu a odrazu je stejný, budou hodnoty $|\measuredangle S_1XB|$, $|\measuredangle CXY|$, $|\measuredangle XYG|$, $|\measuredangle S_2YF|$ stejné (v obrázku označeno jako α). Když povedeme body S_1 a S_2 rovnoběžky se stranou AB, pak jejich vzdálenost bude 11 cm. Bod O pak tuto vzdálenost půlí, tj. $|AO| = 11/2$. Nyní protože S_1 i S_2 mají od stěn dráhy stejnou vzdálenost, tak $|S_1X| = |S_2Y| = \frac{|OX|}{2}$. Z obrázku tedy hned vidíme, že $|XB| = \frac{|AO|}{3} = \frac{11}{6}$cm. (Pokud vedeme z bodu O kolmici na stranu BC, vznikne nám podobný troujúhelník (věta uu) s S_1BX, akorát s dvakrát delšími stranamy.)
Stačí nám tedy zjistit velikost úhlu α. Využijeme k tomu goniometrické funkce. Známe délky stran S_1B a BX, použijeme tedy $\tan\alpha = \frac{|S_1B|}{|BX|} = \frac{2}{\frac{11}{6}} = \frac{12}{11}$. A tedy $\alpha = \arctan\frac{12}{11}$.
Výsledek tedy bude $|BX| + \alpha = \frac{11}{6} + \arctan\frac{12}{11} \doteq 2.66218$

3. **Světýlka**

Výsledek: 111 111

Řešení: Každé světýlko ovlivní pouze lidé, jejichž pořadové číslo dělí číslo tohoto světýlka - např. světýlko číslo 12 budou přepínat první, druhý, třetí, čtvrtý, šestý a dvanáctý člověk. Protože toto světýlko ovlivnil sudý počet lidí, zůstane toto světýlko zhasnuté. Hledáme proto taková světýlka, která ovlivní lichý počet lidí, tedy světýlka s takovými čísly, které mají lichý počet dělitelů. Dělitelé čísla se dají obvykle popárovat tak, že jejich součin je původní číslo. Jediné číslo, které takovouto dvojičku mít nebude, je odmocnina z tohoto čísla, která by se musela napárovat sama se sebou. Hledáme proto počet světýlek, jejichž číslo je nějaká mocnina přirozeného čísla a těch bude přesně 111111, protože $111111^2 = 1234565432 < 12345678910 < 111112^2 = 1234587654$.

4. **Kořeny Polynomů**

   Výsledek: -6750

   Řešení:

   Jak to s úlohamy podobného tvaru býva, i tato je řešitelná pomocí Vietových vztahů: Nechť x_1, x_2, x_3 jsou kořeny polynomu $p = x^3 + 5x^2 + 3$. Platí:

$$p = x^3 + 5x^2 + 3 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$$

   a tedy:

$$-5 = x_1 + x_2 + x_3 \qquad 0 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \qquad -3 = x_1x_2x_3$$

   Chceme najít polynom $q = y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0$, který má kořeny x_1^2, x_2^2, x_3^2. Z toho máme:

$$\begin{aligned} q &= y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = (y - x_1^2)(y - x_2^2)(y - x_3^2) \\ &= y^3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)y^2 + (x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2)y - x_1^2x_2^2x_3^2 \end{aligned}$$

   a z toho:

$$-a_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \qquad a_1 = x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 \qquad -a_0 = x_1^2x_2^2x_3^2$$

   Pak už se to takzvaně vyalgebruje:

$$\begin{aligned} -a_0 &= x_1^2x_2^2x_3^2 = (x_1x_2x_3)^2 = (-3)^2 = 9 \\ a_1 &= x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 = (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 - 2(x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2) \\ &= (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x_1x_2x_3 = 0 - 2(-5)(-3) = -30 \\ -a_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = (-5)^2 - 2 \cdot 0 = 25 \end{aligned}$$

   Výsledkem je součin $a_0a_1a_2 = (-9)(-30)(-25) = -6750$

5. **Smoothie**

   Výsledek: 224

   Řešení: Nejdříve vypočítáme celkový objem, který můžeme do nádoby vložit/nalít tak, aby šel mixér zavřít. Objem polokoule je $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi 3^3 = 18\pi$ cm^3. Objem válce je $\pi r^2 v = \pi 3^2(15 - 2) = 117\pi$ cm^3. Celkový možný objem je tedy $18\pi + 117\pi = 135\pi$ cm^3. Teď potřebujeme zjistit objem banánu. To zvládneme pomocí vzorce pro vztah objemu, hustoty a hmotnosti $V = \frac{m}{\rho} = \frac{350}{1{,}75} = 200$ cm^3 (1750 kg/m^3 = 1.75 g/cm^3). Pro objem mléka nám tedy zbývá $135\pi - 200 = 224{,}115$ cm^3 = 224,115 ml. Zaokrouhlením na celé mililitry dostáváme 224.

6. **Sedm**

   Výsledek: 9 000 000

   Řešení: Podívejme se nejprve na takové sedmiciferné číslo, které má všechny cifry různé. Označme ciferný součet tohoto čísla c. První cifru můžeme při tvoření permutací umístit na 7 pozic, další cifru můžeme umístit už jen na 6, další na 5 atd. Počet permutací cifer takovéhoto čísla tedy můžeme spočítat jako 7!. Všimněme si ještě, že prohozením cifer v čísle se ciferný součet nezmění. Sumu ciferných součtů všech permutací takovéhoto čísla, tedy bude $7! \cdot c = 7 \cdot (6! \cdot c)$, což rozhodně dělitelné sedmi bude.

   To by byl jednodušší případ. Co když budeme mít jednu číslici dvakrát - celkem tedy 6 různých cifer. Počet permutací pak můžeme spočítat jako $\frac{7!}{2!}$, kde se nejprve tváříme, že všechny cifry jsou jiné a pak to podělíme 2!, kde zpětně „odusPořádáme“ ty cifry, které jsou stejné (počítání permutací s opakováním). Ze sumy ciferných součtů nám sedmička nezmizí $\frac{7!}{2!} \cdot c$, navíc počet permutací bude celé číslo, vidíme proto, že i tato suma bude dělitelná sedmi.

Mohli bychom takto rozebírat každý případ opakování cifer zvlášť, raději si ale rozmysleme, v jakých případech se nám povede z finálního součinu „odstranit“ (vydělit) sedmičku. Ciferný součet je celé číslo, tím sedmičku neodstraníme, musela by být pouze ve jmenovateli, což by se povedlo, pokud by se nám nějaká cifra v čísle objevovala sedmkrát a více. Pokud ale má číslo sedm cifer, pak určitě je jeho ciferný součet dělitelný sedmi. Permutace existuje pouze jedna a tedy i suma všech ciferných součtů jeho permutací je dělitelná sedmi. Zadání proto vyhoví všechna sedmiciferná čísla, kterých je přesně 9 000 000.

7. **Pravoúhlé radovánky**

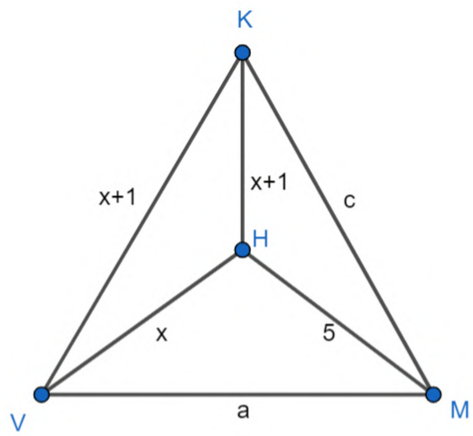
 Výsledek:145,84675

 Řešení: Označme si $c = |AB|$, $a = |BC|$. Obsah trojúhelníka je 2023, tedy $a \cdot b = 4046$, proto $c = \frac{4046}{a}$. Z Pythagorovy věty přepona má délku $\sqrt{a^2 + (\frac{4046}{a})^2}$. Ze vzorce pro poloměr kružnice vepsané $\frac{S}{\frac{a+b+c}{2}}$ po dosazení plyne, že poloměr je roven $\frac{4046}{a+\frac{4046}{a}+\sqrt{a^2+(\frac{4046}{a})^2}}$. Z AG nerovnosti pro minimalizaci jmenovatele plyne, že maximální poloměr kružnice vepsané nastane když $a = \frac{4046}{a}$, tedy $a = b$ a trojúhelník bude rovnoramenný a $a = b = \sqrt{4046}$ a $c = \sqrt{8092}$. Poté $r = \frac{4046}{2\cdot\sqrt{4046}+\sqrt{8092}}$. Potom výsledek je $\sqrt{4046} + \sqrt{4046} + \frac{4046}{2\cdot\sqrt{4046}+\sqrt{8092}}$, po zaokrouhlení $145,84675$. Další možnost byla rovnici derivovat.

8. **Dopravní**

 Výsledek: 182

 Řešení:



Ze zadání víme, že všechny trojúhelníky v našem obrázku jsou buď rovnoramenné, kde ty dvě delší strany se rovnají, nebo jsou rovnostranné. Označme si x délku úsečky $|VH|$. Potom strana $|KH| = x + 1$. Z toho rovnou dostaneme, že strana $b = x + 1$, protože $x \leq x + 1$.

Nyní projděme všechny možnosti, co můžou nastat. Podívejme se na trojúhelník VHM v kombinaci s trojúhelníkem VKM:

(a) $a = x = 5$: Potom: $x + 1 = 6$ a $c = 6$ a tedy dostaneme $L = 5 + 6 + 6 = 17$

(b) $x = 5$, $0.5 \leq a < 5$: Potom $x + 1 = 6$ a $c = 6$ a tedy dostaneme $L \in \langle 12.5, 17)$

(c) $a = 5$, $0.5 \leq x < 4$: Potom $0.5 \leq x + 1 < 5$ a tedy $c = 5$ a $L \in \langle 10.5, 15)$

(d) $a = 5$, $x = 4$: Potom $x + 1 = 5$ a $0.5 \leq c < 5$ a dostaneme $L \in \langle 10.5, 15)$

(e) $a = 5$, $4 < x < 5$: Potom $x + 1 \in (5, 6)$ a $c = x + 1$ a dostaneme $L \in (15, 17)$

(f) $x = a > 5$: Potom $x + 1 > 6$ a $c = x + 1$ a tedy $L \in (17, \infty)$

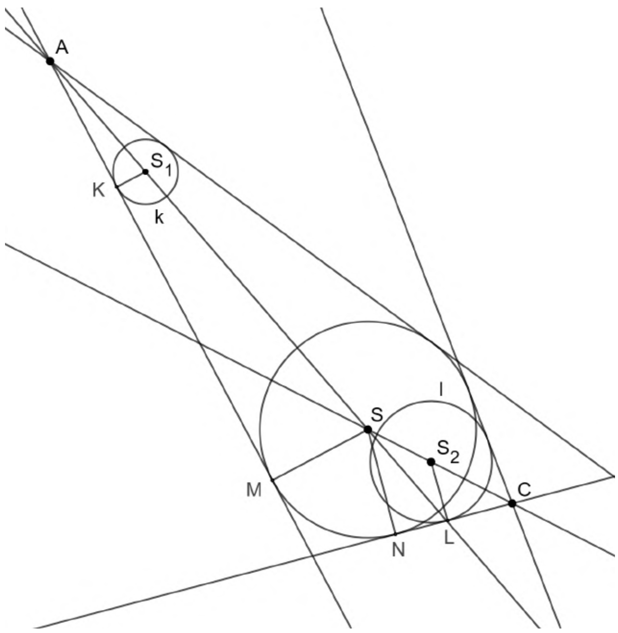
Takhle jsme prošli všechny možnosti a vidíme, že existují tedy pouze 2 celá čísla, která dostaneme třemi způsoby, a to jsou 13 a 14.

9. **Čtyřúhelník**

Výsledek: $\frac{8}{5}$

Řešení:

Pokud vedeme ke kružnici 2 tečny, střed této kružnice leží na ose úhlu, který tečny spolu svírají. Proto A, S_1, S leží na jedné přímce a C, S_2, S také. Dále si povšimněme, že trojúhelníky AKS_1 a AMS jsou podobné podle věty *uu* (body K, L, M, N jsou body dotyku tečny s kružnicí): $\angle KAS_1 = \angle MAS$; $|\angle S_1KA| = |\angle SMA|$. Podobné trojúhelníky zachovávají poměr stran, proto tedy platí: $\frac{|AS_1|}{|KS_1|} = \frac{|AS|}{|MS|}$, $|AS_1| = |KS_1|\frac{|AS|}{|MS|}$. To stejné platí pro trojúhelníky CLS_2 a CNS, takže $\frac{|CS_2|}{|LS_2|} = \frac{|CS|}{|NS|}$, $|CS_2| = |LS_2|\frac{|CS|}{|NS|}$. Chtěný poměr $\frac{|AS_1|}{|CS_2|}$ můžeme vyjádřit jako



$$\frac{|KS_1|\frac{|AS|}{|MS|}}{|LS_2|\frac{|CS|}{|NS|}} = \frac{|KS_1|}{|LS_2|}\frac{|AS|}{|CS|}\frac{|NS|}{|MS|}$$

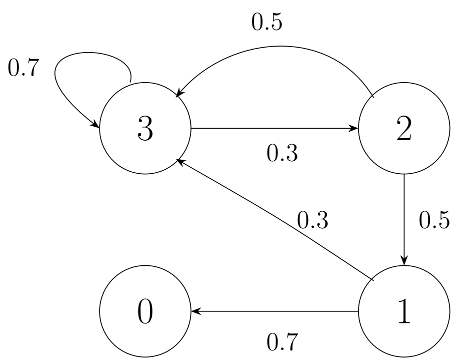
Ze zadání víme, že $|KS_1| = 8$ cm; $|LS_2| = 15$ cm; $\frac{|AS|}{|CS|} = 3$. M a N leží na stejné kružnici se středem S, proto $|NS| = |MS|$ a $\frac{|NS|}{|MS|} = 1$. Výsledný poměr je tedy:

$$\frac{8}{15} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{8}{5}$$

10. **Princ Markov zabíjí draka v řetězech**

Výsledek: 0.2457

Řešení: Situaci si můžeme nakreslit následujícím obrázkem (grafem), kde vždy číslo v kruhu značí současný počet hlav draka a šipka (přechod) značí jedno seknutí mečem. Čísla značí pravděpodobnosti, s jakými se změní počet hlav draka při konkrétní seknutí.



Tento graf můžeme „rozbalit“ a spočítat celkovou pravděpodobnost cest délky nejvýše 5, které končí ve vrcholu označeném 0. Takové cesty jsou právě

$$3-2-1-0,$$
$$3-3-2-1-0,$$
$$3-3-3-2-1-0,$$
$$3-2-3-2-1-0$$

s pravděpodobnostmi $0.3 \times 0.5 \times 0.7 = 0.105$, $0.7 \times 0.3 \times 0.5 \times 0.7 = 0.0735$, $0.7 \times 0.7 \times 0.3 \times 0.5 \times 0.7 = 0.05145$ a $0.3 \times 0.5 \times 0.3 \times 0.5 \times 0.7 = 0.01575$, což v součtu dává $0.105 + 0.0735 + 0.05145 + 0.01575 = 0.2457$.

11. **Hráčská**

Výsledek: 0.625

Řešení: U řešení budeme postupovat tak, že si spočítáme počet všech hodů, při kterých padne součet méně než 10 a odečteme ho od celkového počtu hodů. Počet způsobů jakým nám může padnout součet $3-9$ je po řadě: $1, 3, 6, 10, 15, 21, 25$, což dává součet 81 a máme tedy $6^3 - 81 = 135$ způsobů, jak může padnout požadovaný součet. Pravděpodobnost je pak počet příznivých ku celkovému počtu případů, tedy $\frac{81}{6^3} = 0,625$.

12. **Posloupnost Posloupností**

Výsledek: 57

Řešení: Pro lepší představu si lze zadání představit jako tabulku 20×20, ve které se každý prvek rovná součtu dvou jemu předcházejících, a to zároveň ve sloupci a řádku. Z této tabulky máme zadán čtverec 2×2 v jednom rohu a dvě čísla na diagonále v protějším rohu. Je zřejmé, že tato tabulka bude symetrická podle její diagonály.

Vezmeme obě velká čísla a budeme je rozkládat:

$$a_{20,20} = a_{19,20} + a_{18,20} = 2a_{18,20} + a_{17,20} = 3a_{17,20} + 2a_{16,20} = \dots$$
$$\dots = 4181a_{2,20} + 2584a_{1,20}$$
$$a_{19,19} = a_{18,19} + a_{17,19} = 2a_{17,19} + a_{16,19} = 3a_{16,19} + 2a_{15,19} = \dots$$
$$\dots = 2584a_{2,19} + 1597a_{1,19}$$

Pro rychlejší postup si šlo všimnout, že rozklady odpovídají členům Fibonacciho posloupnosti.

Nyní si stejně vyjádříme čísla $a_{1,20}, a_{2,20}, a_{1,19}, a_{2,19}$:

$$a_{1,20} = a_{1,19} + a_{1,18} = 2a_{1,18} + a_{1,17} = \dots = 4181a_{1,2} + 2584a_{1,1} = 2584a$$
$$a_{2,20} = a_{2,19} + a_{2,18} = 2a_{2,18} + a_{2,17} = \dots = 4181a_{2,2} + 2584a_{2,1} = 4181b$$
$$a_{1,19} = a_{1,18} + a_{1,17} = 2a_{1,17} + a_{1,16} = \dots = 2584a_{1,2} + 1597a_{1,1} = 1597a$$
$$a_{2,19} = a_{2,18} + a_{2,17} = 2a_{2,17} + a_{2,16} = \dots = 2584a_{2,2} + 1597a_{2,1} = 2584b$$

Tyto výsledky dosadíme do předchozích rovnic a dostáváme:

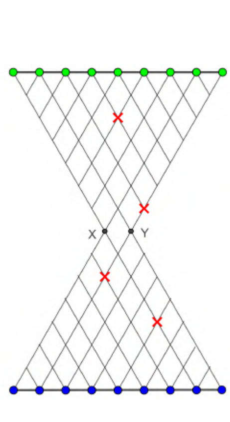
$$179306347 = 2584^2 a + 4184^2 b$$
$$68488939 = 1597^2 a + 2584^2 b$$

Řešením této soustavy rovnic je (a,b) = (19,3).

13. **Přesýpací hodiny**

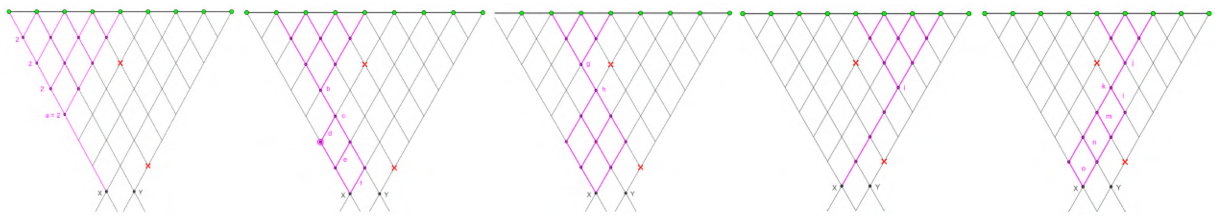
Výsledek: 7488

Řešení:

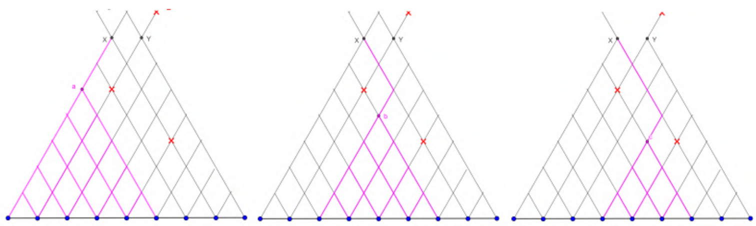


Pokud má zrnko propadnout z vrchu až dolů, jistě musí projít právě jedním bodem X nebo Y. Na celkový počet možných projití se tedy můžeme dívat jako na součet možných projití bodem X a možných projití bodem Y. Pokud se zaměříme například na bod X, způsoby, jak se dostat z vrchu do bodu X, jsou nezávislé se způsoby, jak se dostat z bodu X dolů. Zavedu si označení:
A - počet možných způsobů, jak se dostat z vrchu do bodu X
B - počet možných způsobů, jak se dostat z bodu X dolů
C - počet možných způsobů, jak se dostat z vrchu do bodu Y
D - počet možných způsobů, jak se dostat z bodu Y dolů
Celkový počet možností tedy bude: $A \cdot B + C \cdot D$
Ještě bych ráda zmínila,že nezáleží, ze které strany se na cestu díváme, tj. počet cest z vrchu do bodu X můžeme počítat jako počet cest z bodu X nahoru.
A:
1. možnost - cesty procházející bodem a:
Z bodu X do bodu a vede pouze jediná cesta. Cesty se různí až nad bodem a. V a máme dvě možnosti, kam se vydat, a v každém dalším bodě máme zase dvě možnosti, kam jít, dokud nedojdeme

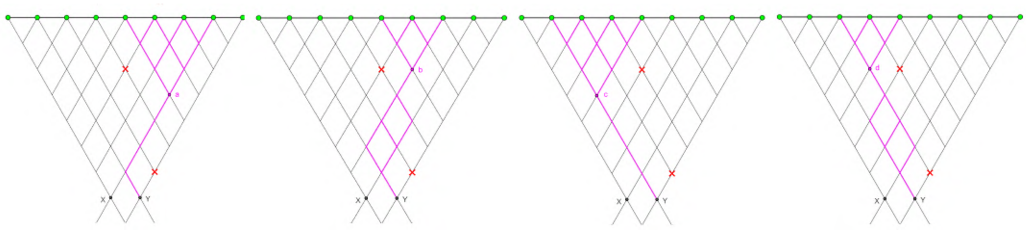
úplně nahoru. Celkový počet cest 1. typu je tedy $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
2. možnost - cesty procházející bodem b, které neprocházejí bodem a
Pokud se máme dostat do bodu b jinudy, než přes a, musíme jít vždy přes bod c. Z bodu X se do bodu c můžeme dostat třemi způsoby (vybereme jednu z cest d,e,f. Z bodu b nahoru se můžeme dostat podobně jako u a $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ způsoby. Celkový počet cest 2. typu je tedy $3 \cdot 8 = 24$
3. možnost - cesty procházející bodem g, které neprocházejí body a a b
Tyto cesty musí vést bodem h, do kterého se z X dostaneme tak, že se posuneme $2x$ šikmo nahoru doprava a $2x$ šikmo nahoru do leva. Máme tedy 4 pohyby a chceme vybrat 2 z těchto pohybů, kdy se pohneme třeba šikmo nahoru doleva. Počet možností, kolikáté pohyby budou do leva nám udává kombinační číslo $\binom{4}{2} = 6$. Z bodu g nahoru se dostaneme $2 \cdot 2 = 4$ způsoby. Celkový počet cest 3. typu je tedy $6 \cdot 4 = 24$
4. možnost - cesty procházející bodem i
Z bodu X se do bodu i dostaneme právě jednou cestou. Z bodu i nahoru $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ způsoby.
5. možnost - cesty procházející bodem j, které neprocházejí bodem i
Podobně jako u druhé možnosti se do bodu j můžeme dostat jen přes bod k, do kterého se z bodu X můžeme dostat čtyřmi způsoby, podle výběru jedné z úseček l,m,n,o. Z bodu j nahoru vedou 4 cesty, celkový počet cest 5. typu je tedy $4 \cdot 4 = 16$
Počet všech možných cest z vrchu do bodu X je tedy $16 + 24 + 24 + 8 + 16 = 88$.



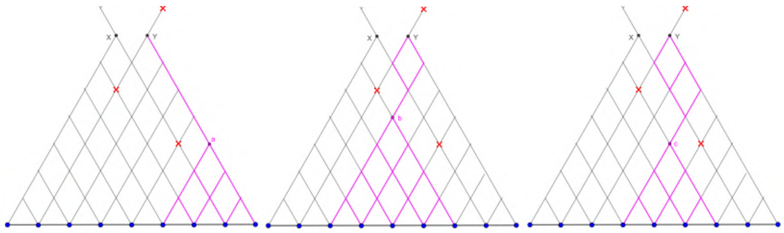
B:
Zbytek úlohy budu řešit stejně jako **A**, proto nebudu psát tak podrobné popisky:
1. možnost - cesty procházející bodem a: $2^5 = 32$ možností
2. možnost - cesty procházející bodem b: $2^4 = 16$ možností
3. možnost - cesty procházející bodem c, neprocházející bodem b : $2^3 = 8$ možností
Celkem: $32 + 16 + 8 = 56$ možností.



C:
1. možnost - cesty procházející bodem a: $2^3 = 8$ možností
2. možnost - cesty procházející bodem b, neprocházející bodem a: $Y -> b$: 3 možnosti, $b->$ nahoru: $2^2 = 4$ možnosti; tedy $3 \cdot 4 = 12$ možností
3. možnost - cesty procházející bodem c: $2^3 = 8$ možností
4. možnost - cesty procházející bodem d, neprocházející bodem c: $Y -> d$: 3 možnosti, $d->$ nahoru: $2^2 = 4$ možnosti; tedy $3 \cdot 4 = 12$ možností
Celkem: 8+12+8+12=40 cest



D:
1. možnost - cesty procházející bodem a: $2^3 = 8$ možností
2. možnost - cesty procházející bodem b: $Y -> b : 2$ možnosti, $b -> $ dolů: $2^4 = 16$ možností; tedy $2 \cdot 16 = 32$ možností
3. možnost - cesty procházející bodem c, neprocházející bodem $b : Y -> c : 3$ možnosti, $c -> $ dolů: $2^3 = 8$ možností; tedy $3 \cdot 8 = 24$ možností
Celkem: $8 + 32 + 24 = 64$ možností.



Všechny možné cesty zrnek vedoucí z vrchu až dolů: $A \cdot B + C \cdot D = 88 \cdot 56 + 40 \cdot 64 = 7488$

14. **Skoro odmocniny**

Výsledek: 21653600

Řešení:

Úloha se dá řešit napřímo, pomocí toho, že si pro každý interval, kde může ležet x zjistíme, kde může ležet y, za použití kombinatoriky. Možná jednodušší je zde úlohu naprogramovat, zde například přidávám nejjednodušší možnost (rozhodně ne nejhezčí) v pythonu, která po nějakém množství času vyplivne odpověď 21653600.

```
from math import floor
from math import sqrt

count = 0
for x in range(-40402,40402):
  for y in range(-40402,40402):
    if floor(sqrt(abs(x))) +floor(sqrt(abs(y))) == 200:
      count += 1
print(count)
```

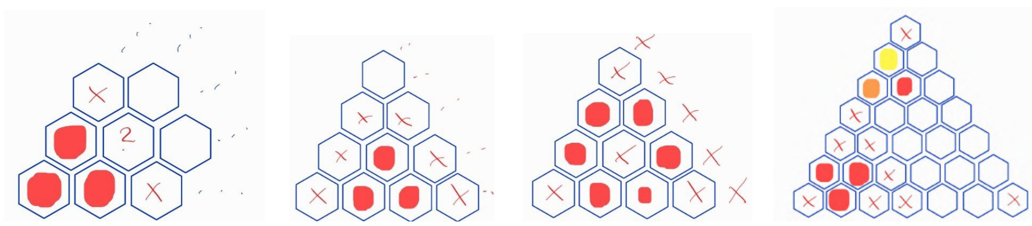
15. **AZ kvíz**

Výsledek: 1336

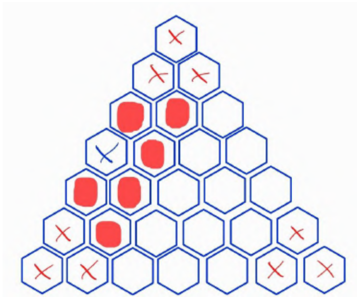
Řešení: Jako první můžeme z vybarvených polí vyřadit rohy, jelikož ty vynucují vybarvená dvě další políčka, která už pak nemůžou sousedit s žádným dalším a zároveň vylučují jakékoli jiné políčko na dané hraně. Kvůli tomu v takové situaci není možné spojit všechny tři hrany.

Z podobné myšlenky plyne, že kdykoli nám vznikne na herním plánu „trojúhelík“, tedy tři políčka dotýkající se navzájem, nemohou být spojena s žádným dalším políčkem.

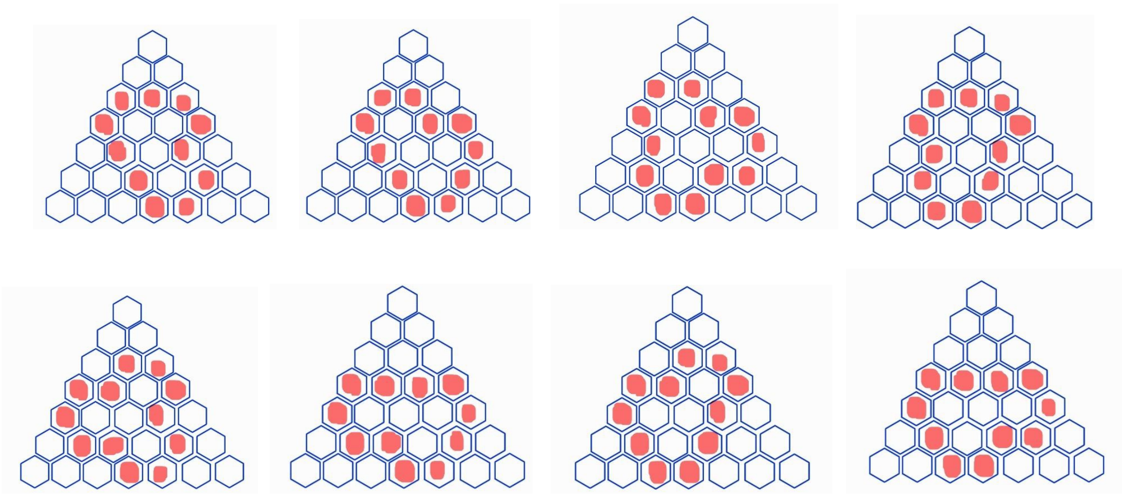
Kdybychom obarvili druhé políčko od rohu, vznikly by nám tři situace zobrazené na obrázcích. Z prvních dvou zřejmě ani jeden nemůže dát požadované řešení. Ve třetím případě nemohou být oranžové a žluté políčko obarvena zároveň, čímž nám opět vznikne trojúhelník a nemožnost spojit tři hrany dohromady.



Dále ukážeme, že musí být vybarvené prostřední pole z hrany. Kdyby tomut ak nebylo, situace by vypadala jako na obrázku níže, což porušuje pravidlo o dvou obarvených sousedech.



Obarvení splňující zadání má tedy obarvené středy hran a jedno ze s nimi sousedících hranových políček. Možností jak takto obarvit políčka hran je $2 \times 2 \times 2 = 8$. Ukážeme, že pro každou z těchto možností existuje právě jedno obarvení splňující zadání.



Jednoduchým sečtením čísel v jednotlivých řešeních získáme maximum $4+5+7+9+10+12+15+17+19+20+24+25 = 167$ a výsledek $8 \times 167 = 1336$.

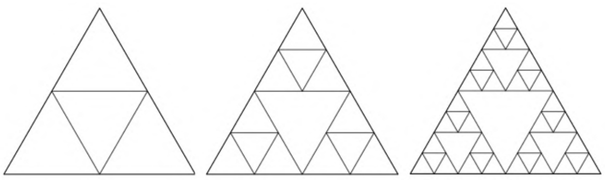
16. **Brkodort**

Výsledek: 159

Řešení: Pojďme se zaměřit na to, kolik nám v každém kole řezání přibude kousků dortu. V 1. kole řezání nám přibydou 3 kousky (z 1 celého dortu uděláme 4 shodné trojůhelníky). Ve 2. kole rozkrojíme každý nový kousek (v tomto případě jsou to 3 kousky) znovu na 4, takže nám přibyde 3x počet předchozích nových. A takto to pokračuje...

1. kolo: $1 + 3$
2. kolo: $(1 + 3) + 3 \cdot 3$
3. kolo: $(1 + 3 + 9) + 9 \cdot 3$
4. kolo: $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4$

...



Teď si můžeme všimnout, že v každém kole je počet kousků *n-tý* součet geometrické řady s počátečním členem $a_1 = 1$ a kvocientem $q = 3$. Konkrétně v *n-tém* kole máme *(n+1)-tý* součet geometrické řady. S využitím vzorce pro *n-tý* součet geometrické řady vytvoříme nerovnici, kterou následně vypočítáme:

$$
\begin{aligned}
2023^{23} &\leq a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \\
2023^{23} &\leq \frac{1-3^n}{1-3} \\
-2 \cdot 2023^{23} &\geq 1-3^n \\
3^n &\geq 1 + 2 \cdot 2023^{23} \\
n &\geq \log_3(1 + 2 \cdot 2023^{23}) \\
n &\geq 159,999
\end{aligned}
$$

Protože n je přirozené číslo, a hledáme nejmenší takové, platí $n = 160$. To znamená, že součet 160-ti členů této posloupnosti vystačí pro daný počet účastníků. Tento součet dostaneme po 159. kole krájení dortu.

17. **Babylon**

Výsledek: 2017

Řešení:

Jestliže někdo ve městě umí mluvit 7 jazyky, potom mi stačí umět mluvit jedním z těchto 7 jazyků. Určitě se tedy nemusím učit mluvit více než 2017 jazyky.

Množinu všech jazyků si označme $J = \{J_1, J_2, \ldots, J_{2023}\}$. Když nyní nalezneme alespoň jeden příklad přiřazení příslušného počtu jazyků každému obyvateli, při kterém se budu muset naučit mluvit právě 2017 jazyky, dokážeme, že toto číslo je řešením úlohy.

Tento příklad vytvoříme snadno tak, že každému obyvateli, mluvícímu pouze jedním jazykem přiřadíme libovolný jazyk, pouze s podmínkou, že každým z jazyků mluví alespoň jeden z nich. Poté přiřadíme každému zbývajícímu obyvateli libovolně příslušný počet jazyků z množiny $J' = \{J_1, J_2, \ldots, J_7\}$. Tak zajistíme, že 2016 jazyky mluví vždy pouze právě jeden člověk (tedy se ho musím zajisté naučit) a v rámci množiny J' se potřebuju naučit nejméně jeden jazyk. Tedy celkem se musím naučit nejméně 2017 jazyků.

18. **Casino**

Výsledek: 3/10

Řešení: Každou situaci lze jednoznačně charakterizovat podle toho, jaké kuličky jsou zrovna v nádobě A. Mohou nastat jen tři situace, jak udává následující tabulka:

Situace	Nádoba A	Nádoba B
1	2 bílé	3 černé
2	1 bílá, 1 černá	1 bílá, 2 černé
3	2 černé	2 bílé, 1 černá

Nyní lze určit všechny přechodové pravděpodobnosti, tj. pokud je systém v nějaké situaci, s jakou pravděpodobností bude po 1 prohození v (ne nutně) jiné situaci. Docházíme k těmto hodnotám (vypsány jsou pouze ty nenulové):

$$
\begin{aligned}
1 &\longrightarrow 2 : 1 \\
2 &\longrightarrow 1 : 1/6 \\
2 &\longrightarrow 2 : 1/2 \\
2 &\longrightarrow 3 : 1/3 \\
3 &\longrightarrow 2 : 2/3 \\
3 &\longrightarrow 3 : 1/3
\end{aligned}
$$

Chceme znát pravděpodobnost, s jakou je systém v dané situaci (3). Označme si pořadě x, y, z pravděpodobnosti, že je systém v situaci 1,2,3. Udělejme si pravděpodobnostní tabulku pro systém v nějakém okamžiku t a okamžiku po jednom prohození $t + 1$:

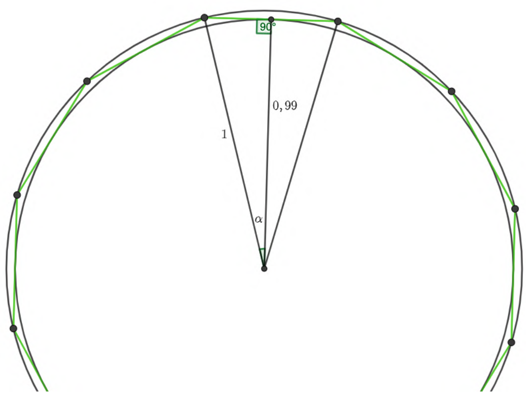
	1	2	3
t	x	y	z
$t+1$	$y/6$	$x+y/2+2z/3$	$y/3+z/3$

Protože nevíme, kdy byl stroj spuštěn, musí se pravděpodobnosti v jednotlivých sloupcích rovnat. Dostáváme tak čtyři rovnice o třech neznámých (čtvrtou rovnicí je nutná podmínka pravděpodobností $x+y+z=1$), jejichž jediným řešením je $(x,y,z)=(1/10, 6/10, 3/10)$, nás zajímá z, tedy odpovědí je $3/10$.

19. **Lapač snů**

Výsledek: 22

Řešení: Představme si takový n-úhelník vepsaný do kružnice. Největší koule, která takovým n-úhelníkem projde bude taková, která by se dala „vepsat“ do n-úhelníka.



Vzdálenost středu strany n-úhelníka od středu kružnic bude 0,99. Vzdálenost bodů n-úhelníka od středu bude 1. Důležitý pak pro nás bude středový úhel α, který spočítáme pomocí goniometrických funkcí z pravoúhlého trojúhelníka jako: $\alpha = \arccos(99/100)$ Je-li n počet stran n-úhelníka, pak úhel α se dá spočítat, jako $2\alpha = \frac{2\pi}{n}$, z čehož získáme, že nejmenší $n = \frac{pi}{\arccos(99/100)}$, při kterém nejde ještě koule prostrčit je 22.

20. **Sirková**

Výsledek: 338

Řešení:

Všimněme si, že tato hra je tzv. nestranná: jediná rozdíl mezi hráči je to, který z nich je zrovna na tahu. Jinak mají k dispozici úplně stejné tahy. Uděláme si tabulku toho, zda člověk, který je na tahu, a vidí n a m sirek, má (1) nebo nemá (0) výherní strategii. Jak to ale poznáme? Ze zadání máme, že pokud nevidíme žádou sirku, tak vyhráváme. Jinak, pokud se můžeme dostat sebráním 1 až 3 sirek z jedné z hromádek (tedy posunem o 1 až 3 políčka nahoru nebo doleva) do stavu proherního (pro druhého hráče, neboť ten bude na tahu), tak máme výherní strategii. Jinak jsme ve stavu proherním. Tímto můžeme tabulku postavit z levého horního rohu:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
2	1	1	0	1	1	1	0	1	1
3	1	1	1	0	1	1	1	0	1
4	1	0	1	1	1	0	1	1	1
5	0	1	1	1	0	1	1	1	0
6	1	1	0	1	1	1	0	1	1
7	1	1	1	0	1	1	1	0	1
8	1	0	1	1	1	0	1	1	1

Můžeme vypozorovat, že se v tabulce každé 4 řádky a sloupce opakuje tohle:

1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Dokonce to ani není těžké dokázat: Zda máme nebo nemáme výherní strategii v nějakém stavu je určeno políčky o tři doleva a o tři nahoru. Nejprve dokážeme tvar prvních 4 řádků: Řekněme, že ve sloupcích k až $k+3$ má tamten opakující se tvar. Z toho dopočítámé další 4 sloupce:

	k	k+1	k+2	k+3	k+4	k+5	k+6	k+7
0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
2	1	1	0	1	1	1	0	1
3	1	1	1	0	1	1	1	0

A hele! Vzkutku se to zopakovalo. Tvar prvních čtyřech sloupců se dá dokázat obdobně. Nyní zbytek, pokud už máme dokázaný tvar bloku nad a nalevo. Tak:

	k	k+1	k+2	k+3	k+4	k+5	k+6	k+7
l					1	0	1	1
l+1					0	1	1	1
l+2					1	1	0	1
l+3					1	1	1	0
l+4	1	0	1	1	1	0	1	1
l+5	0	1	1	1	0	1	1	1
l+6	1	1	0	1	1	1	0	1
l+7	1	1	1	0	1	1	1	0

OMG. Ono to zase výjde stejně. Pak už je tvar tabulky dokázaně dán opakováním tamtoho.

První hráč vybírá stav hry, z kterého začíná druhý hráč, takže chceme spočítat všechny proherní stavy. Budeme to počítat po 4 sloupcích, přičemž každý z nich vypadá takto:

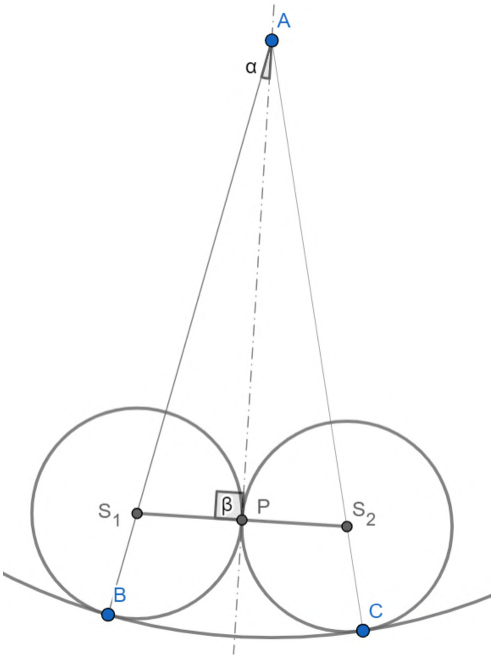
	l	l+1	l+2	l+3
0	1	0	1	1
1	0	1	1	1
2	1	1	0	1
3	1	1	1	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
44 - l	1	0	1	1
45 - l	0	1	1	1
46 - l	1	1	0	1
47 - l	1	1	1	0
48 - l	1	0	1	
49 - l	0	1		
50 - l	1			

Kde l je násobek 4. V každém celém bloku jsou 4 proherní pozice, a ve zbytku jsou 2. Celkem je jich $50 - l$. Celkem je to $50 + 46 + 42 + 38 + \cdots + 10 + 6 + 2 = 338$.

21. **Vítkových 2023 kružnic**

Výsledek: 0.01551

Řešení:



Máme 2023 kružnic, takže $|\measuredangle S_1AS_2| = \frac{2\pi}{2023}$. Průsečík dvou malých kružnic P leží na ose tohoto úhlu, takže $|\measuredangle S_1AP| = \alpha = \frac{\pi}{2023}$. Protože se kružnice dotýkají, tak již zmíněná osa s úsečkou S_1S_2 jsou na sebe kolmé a tedy $|\measuredangle APS_1| = \beta = \frac{\pi}{2}$. Poloměr malé kružnice označíme x a tedy $|AS_1| = |AS_2| = 10 - x$. Nyní použijeme sinovu větu, která nám dá rovnici:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin\alpha}{|S_1P|} &= \frac{\sin\beta}{|S_1A|}\\
\frac{\sin\frac{\pi}{2023}}{x} &= \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{10-x}\\
(10-x)\sin\frac{\pi}{2023} &= x\sin\frac{\pi}{2}\\
10\sin\frac{\pi}{2023} - x\sin\frac{\pi}{2023} &= x\\
10\sin\frac{\pi}{2023} &= x(\sin\frac{\pi}{2023}+1)\\
x &= \frac{10\sin\frac{\pi}{2023}}{\sin\frac{\pi}{2023}+1} \doteq 0.01551cm
\end{aligned}
$$

22. **Domino**

Výsledek: 147

Řešení: Domino kostek je celkem 49, protože na každé polovině kostky máme nezávisle na sobě 7 možností na počet puntíků. Jelikož žádné 2 kostky nejsou shodné, vždy může být pro danou dvojici právě 0 či právě 1 způsob, jakým je k sobě napojit. Pokud bychom si dali podmínku, že napojované číslo je 1, máme $\binom{7}{2}$ možností, jak vybrat vyhovující kostičky. Vzhledem k tomu, že je ale situace symetrická pro všechna čísla $0-6$, celkový počet možností jak můžeme vytáhnout 2 kostky a napojit je je $\binom{7}{2}\cdot 7 = 147$

23. **Poly-poly-polynom**

Výsledek: 149161

Řešení:

Polynom upravíme na vhodnější tvar:

$$
\begin{aligned}
&x^4+2x^3-3x^2-4x+1 = A(x+1)^4+B(x+1)^3+C(x+1)^2+D(x+1)+E =\\
&= Ax^4+(4A+B)x^3+(6A+3B+C)x^2+(4A+3B+2C+D)x+A+B+C+D+E
\end{aligned}
$$

Nyní můžeme porovnat koeficienty obou tvarů polynomu:

$x^4: 1 = A$

$x^3: 2 = 4A+B$

$x^2: -3 = 6A+3B+C$

$x^1: -4 = 4A+3B+2C+D$

$x^0: 1 = A+B+C+D+E$

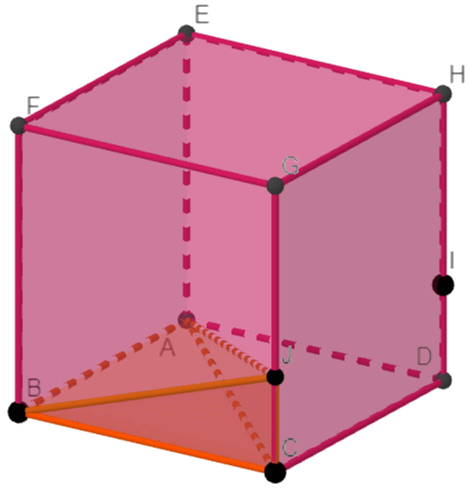
V tuto chvíli už stačí pouze vyřešit soustavu rovnic a dostaneme řešení:

$A=1, B=-2, C=-3, D=4, E=1$ a tedy správnou odpovědí je 149161

24. **Myslím si číslo**

Výsledek: $\frac{1}{18}$

Řešení: Tahle úloha se nejlíp řeší, když si ji představíme v prostoru a použijeme geometrickou pravděpodobnost. Celkově množina všech možných případů je rovna všem bodům krychle o hraně jeden centimetr. Následně v této krychli nalezněme množinu bodů, které vyhovují naší podmínce v zadání.



Body (x, y, z) v krychli, které splňují zadání, jsou ty, co leží v útvaru ohrničeném rovinami, které jsou zadané body ACE, AFD a AIE, kde $I = (0, 1, \frac{1}{3})$. Jsou to roviny zadané rovnicemi $x = y$, $x = z$, $z = \frac{y}{3}$. Když se podíváme, co dostaneme za útvar, všimneme si, že je to jehlan. Jeho obsah spočítáme jako obsah podstavy vynásobený výškou a podělený třemi. V našem případě tedy dostaneme:

$$\frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}.$$

A pravděpodobnost spočítámé jako poměr námi přípustných případů ku všem možným případům. Což je v našem případě objem našeho jehlanu ku objemu celé krychle, což je jedna.

25. **Čtverylka**

Výsledek: 1393459200

Řešení: Každé přirozené číslo n můžeme jednoznačně zapsat ve tvaru $x^2 \cdot y$, kde y není dělitelné druhou mocninou žádného prvočísla. Takové y nazveme „zbytkem“ čísla n. Všimněme si, že součin dvou čísel je druhou mocninou celého čísla, právě pokud mají stejné zbytky.

Číslo na papírku a číslo v hrníčku tak mají stejný zbytek. Naopak, pokud toto platí pro každý hrníček, pak každý součin je druhá mocnina. Počet možných uspořádání proto bude počet všech permutací množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ takových, že zbytek čísla je po permutaci zachován.

Rozdělíme si nyní čísla z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ podle zbytků:

- Zbytek 1 : Druhé mocniny, kterých je právě 7.
- Zbytek 2 : Čísla $2, 8, 18, 32, 50$.
- Zbytek 3 : Čísla $3, 12, 27, 48$.
- Zbtek 5 : Čísla $5, 20, 45$.
- Zbytky $z =$ 6,7,10,11 : Vyhovují právě dvě čísla, z a $4z$. Číslo $9z > 50$ je moc velké.
- Pro zbylé zbytky už je $4z > 50$, proto v dané množině existuje jediné číslo s tímto zbytkem a tak musí papírek v hrníčku s tímto číslem obsahovat rovněž toto číslo.

Hledaný počet permutací je jednoduše součin počtů permutací pro dané zbytky, tj. $7! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot (2!)^4 = 1393459200$.

26. **Rovnice s velkým číslem**

Výsledek: 126868956678131289738288046888

Řešení: Pomocí známého vzorečku si rovnici zjednodušíme na tvar $(x+y)(x-y) = N$. Jak vypadají všichni dělitelé čísla N víme, řešení bude tedy ve tvaru $x-y = a, x+y = \frac{N}{a}$ pro nějaký dělitel a čísla N. Tyto dvě rovnice o dvou neznámých nám už jednoznačně určují hledaná čísla x, y. Musíme si ale ověřit dvě podmínky: x i y musí být totiž jak celá, tak nezáporná. Je například intuitivně jasné, že naše a musí splňovat $a \leq \frac{N}{a}$, jinak by y bylo záporné.

Zformulujme to přesněji: za předpokladu $x - y = a$, kde $a > 0$ dělí N, máme $x + y = \frac{N}{a}$ a systém dvou rovnic o dvou neznámých pro x a y. Tento systém má obecné řešení $x = \frac{N+a^2}{2a}$ a $y = \frac{N-a^2}{2a}$. Chceme, aby tato čísla byla celá a nezáporná. Číslo $x = \frac{N+a^2}{2a}$ bude nezáporné vždy, chceme tedy pouze, aby $y = \frac{N-a^2}{2a} \geq 0$. Tato nerovnost se dá (díky $a > 0$) přepsat na $\sqrt{N} \geq a$. Tato podmínka musí platit. Chceme také, aby $\frac{N \pm a^2}{2a} \in \mathbb{Z}^+$. Ale to platí vždy, neboť jsme si mohli všimnout, že v zadání prvočíselný rozklad čísla N začíná až od druhého prvočísla, a všechna prvočísla po prvním, které je 2, jsou nutně lichá. Tedy i libovolný dělitel čísla N je lichý jakožto součin mocnin lichých prvočísel. Z toho už plyne, že $\frac{N \pm a^2}{2a} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{N}{a} \pm a\right) \in \mathbb{Z}^+$, protože a, $\frac{N}{a}$ jsou lichá.

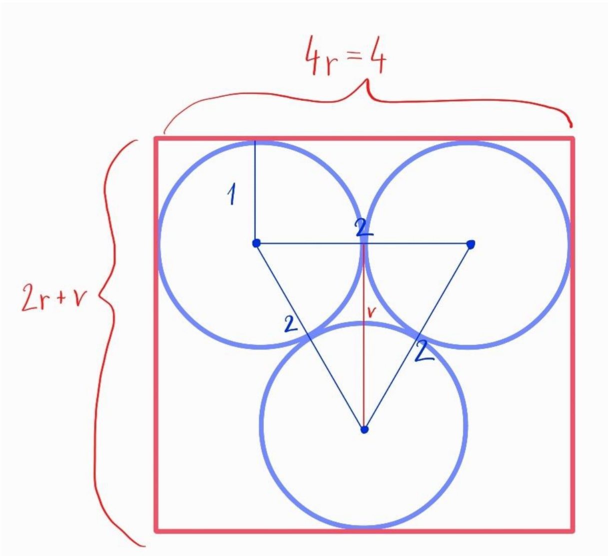
Celkem získáváme, že počet různých řešení původní rovnice takových, že x, y jsou celá nezáporná, přesně odpovídá počtu dělitelů N, kteří nepřevyšují $\sqrt{N}$. Toto číslo už získáme jednoduše, například stačí spočítat počet všech dělitelů čísla N, to uděláme jako součin $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 45$, označme si tento výraz $D(N)$. Od něj odečteme 1 za dělitele $a = \frac{N}{a}$, kteří splývají, vydělíme dvěma a přičteme 1, neboli celkem řešení získáme jako $\frac{D(N)+1}{2}$.

27. **Tři kružnice v obdélníku**

Výsledek: 14.92820

Řešení: Základem je uvědomit si, čemu odpovídají délky jednotlivých stran obdélníku. Jedna z hran má délku přesně 4 poloměry kružnic, tedy 4, a druhá má délku 2 poloměrů kružnic (tedy 2) plus délku výšky trojúhelníku s vrcholy ve středech zadaných kružnic (viz obrázek).

Výška trojúhelníku má velikost $v = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Po dosazení získáme výsledný objem $S = 4 \times (2 + \sqrt{3}) = 14.92820$

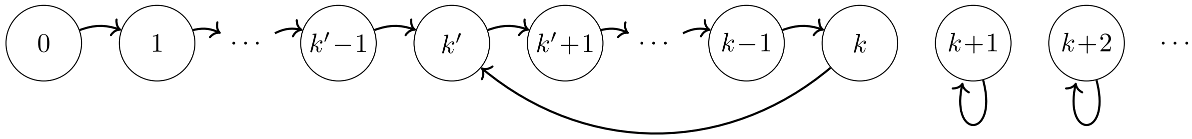


28. **Záhadná funkce**

Výsledek: 155

Řešení:

Když si nakreslíme, kam funkce f posílá různá čísla z $\mathbb{N}_0$ podle první věty ze zadání, dostaneme takovýhle nějaký obrázek:



Jde vidět, že každá funkce f splňující tyto podmínky je definovaná dvojicí (k', k), neboť zbytek definice f je již pevně dán zadáním. Nyní potřebujeme najít všechny takové funkce, které splňují $f^4(n) = f^{2314}(n)$, pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

Z této podmínky plyne, že všechna čísla, která jde zapsat jako $f^4(n)$ pro nějaké n jde po několikanásobné aplikaci funkce f musí objevit znova, což podle obrázku vypadá, že by nemuselo platit, pokud by bylo $f^4(n) < k'$, Pokud by nastalo, že $k' > 4$, tak nám nemůže platit $f^4(0) = f^{2314}(0)$: Jelikož $k > k' > 4$, tak $f^4(0) = 4$. Pro každé $x > 0$ ale už je $f^x(4) > 4$, protože f s čísly větší než 4, dělá jednu ze dvou věcí: Zvětší je o jedna, nebo jej zmenší na k'. V obou případech bude výsledné číslo větší než 4. Takže $f^4(0) < f^{2314}(0)$, a potřebnou podmínku nemůžeme splnit.

Musíme tedy mít $k' \leq 4$. Dále, aby se $f^4(n)$ mohlo opakovat, musí dopadnout buď ve velkém cyklu od k' do k, nebo v jednom z malých cyklů. Pro čísla z malých cyklů (tedy $n > k$) platí $f^4(n) < f^{2314}(n)$ triviálně, jelikož $f(n) = n$. Omezme se tedy na čísla z velkého cyklu: Mějme libovolné číslo x z velkého cyklu mezi k' a k. Víme, že když z x uděláme 4 kroky pozpátku po velkém cyklu, dostaneme číslo y, takové, že $f^4(y) = x$, a aby platilo $f^4(y) = f^{2314}(y)$, musí platit $x = f^{2310}(x)$. Jediný způsob, jak mít $f^u(x) = x$ pro nějaké u, je obejít celý velký cyklus. Nechť $p = k - k' + 1$ je délka velkého cyklu. Musí platit, že p dělí u. Pro splnění naši podmínky potřebujeme, aby p dělilo 2310. Dále kvůli podmínce $k' < k = p + k' - 1$ máme $1 < p$.

Nyní můžeme dokázat, že tyto podmínky jsou už dostačující pro vhodnou funkci f: Mějme dvojici (k', k) splňující $k' \leq 4, k = k' + p - 1, p > 1, p \mid 2310$. Mějme libovolné $x \in \mathbb{N}_0$. Pokusíme se dokázat $f^4(x) = f^{2314}(x)$: Pokud je $x > k$, tak to platí evidentně. Jinak $x \leq k$. Jelikož každá aplikace f na číslo menší k' jej zvětší o jedno, a pro každé číslo větší nebo rovno k' už nikdy nebude menší, a $k' \leq 4$, tak $f^4(x) \geq k'$, takže $f^4(x)$ je vždy ve velkém cyklu. Nechť $y = f^4(x)$. Potřebujeme $y = f^{2310}(y)$. Z $p \mid 2310$ máme u takové, že $up = 2310$. Pak $f^{up}(y) = f^p(f^p(\dots f^p(y)\dots)) = y$, což jsme chtěli.

Máme 5 možností, jak vybrat $k' \leq 4$, a 31 možností, jak vybrat $p > 1$ takové, které dělí 2310. Tyto volby jsou na sobě nezávislé, takže celkem máme $5 \cdot 31 = 155$ možných záhadných funkcí.

29. **Mafie**

    Výsledek: 6.33806

    Řešení: Trik je uvědomit si, že jakmile vypadne první člověk, musí po něm vypadnout ten, kdo prvního vyřadil. Toto musí platit, aby každý kromě prvního vyřazeného ulovil právě jednoho hráče. Kdyby ve druhém kole vypadl někdo jiný, než první vrah, vypadl by člověk, který nikoho nevyřadil a podmínka ze zadání by byla porušena. Takto to indukčně musí pokračovat až do posledního hráče - v n-tém kole musí vypadnout ten hráč, který v $n-1$-vém kole hráče vyřadil. Protože je situace symetrická, vypadnuvšího v prvním kole můžeme zanedbat a pravděpodobnost, že po něm vypadnou v přesném pořadí právě ti lidé, které potřebujeme ke splnění podmínky je postupně $\frac{1}{2022} \cdot \frac{1}{2021} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} = \prod_{i=2}^{2022} \frac{1}{i}$, což po dosazení do Wolframu dává výsledek.

30. **Hranolky**

    Výsledek: 382

    Řešení: Uvažujme barvy 1,0. Nejprve si úlohu zkusme vyřešit na 6-úhelníku. Kdybychom všechna obarvení považovali za různá, měli bychom $2^6 = 64$ řešení. Při uvážení otočení vyjde 14 řešení, ke kterým připíšeme, kolik ze 64 řešení pokrývají:

000000 . . . 1
000001 . . . 6
000011 . . . 6
000101 . . . 6
001001 . . . 3
000111 . . . 6
001011 . . . 6
001101 . . . 6
010101 . . . 2
011011 . . . 3
011101 . . . 6
001111 . . . 6
011111 . . . 6
111111 . . . 1

Řešení se nám rozdělila na 1,2,3,6-násobná. Nyní vždy vezmeme dvě (ne nutně ruzná) řešení, jedno dáme do spodní podstavy hranolky a druhé do horní podstavy. Zkusíme otáčet jednou z podstav a počítáme, kolik různých řešení vzhledem k otočení vznikne. Zjistíme, že počet vzniklých řešení závisí na tom, kolikanásobná byla dvě řešení podstav. Také si všimneme, že je jedno, které řešení dáme do horní podstavy a které do dolní, neboť hranolku lze otočit tak, aby si řešení vyměnila místa.

Stačí tedy vyzkoušet, kolik různých hranolek vznikne pro všechny kombinace násobnosti podstav:

$1 \times 1 \longrightarrow 1$
$1 \times 2 \longrightarrow 1$
$1 \times 3 \longrightarrow 1$
$1 \times 6 \longrightarrow 1$
$2 \times 2 \longrightarrow 2$
$2 \times 3 \longrightarrow 1$
$2 \times 6 \longrightarrow 2$
$3 \times 3 \longrightarrow 3$
$3 \times 6 \longrightarrow 3$
$6 \times 6 \longrightarrow 6$

Vzniká operace, která podstavám dle jejich násobnosti přiřadí počet vzniklých řešení celé úlohy. Tuto operaci provedeme pro všech 105 dvojic řešení z 6-úhelníku, výsledky sečteme a vyjde 382 řešení.

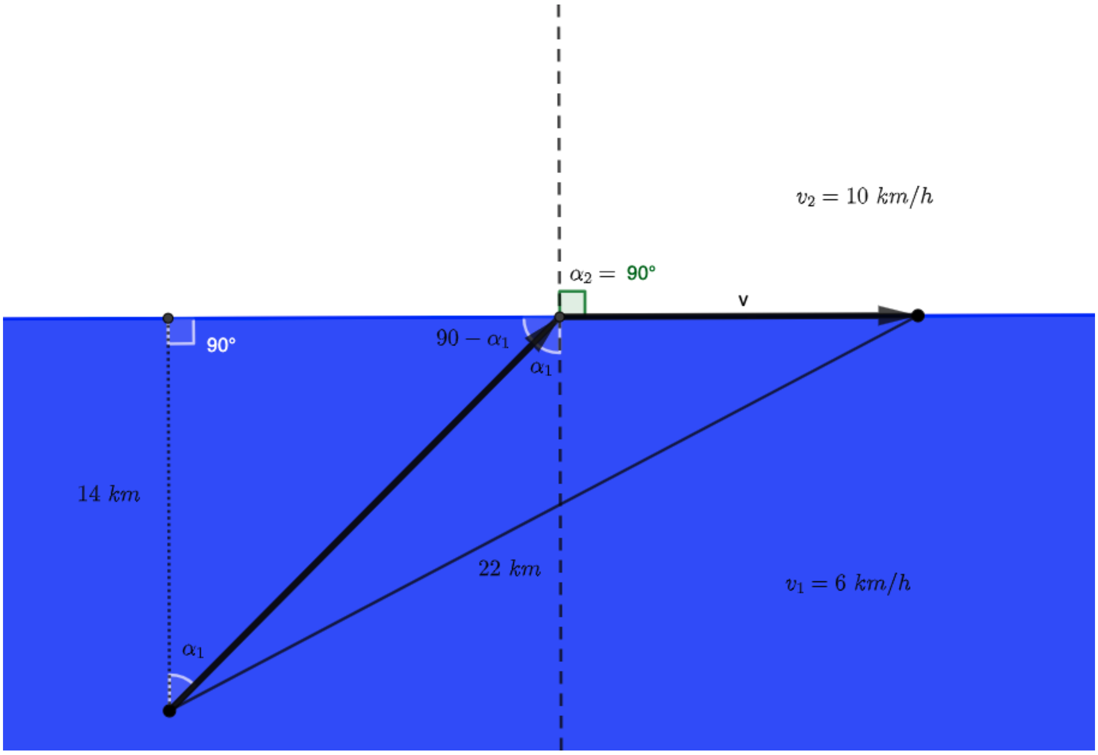
Další způsob jak tuto úlohu vyřešit vyžaduje nějaké základní znalosti z algebry. Označme M množinu všech obarvení hranolu, poznamenejme, že hranolka má 12 vrcholů, tedy množina M má 2^{12} prvků. Dále označme G grupu všech rotací hranolky. Když uvážíme (levou) akci grupy G na množinu M, počet orbit bude právě hledané řešení. Na zjištění počtu orbit můžeme využít Burnsideovo lemma. Projděme tedy prvky grupy G a spočítejme fixní body množiny M pro každý z těchto prvků. Grupa G obsahuje identitu, rotace a) podle osy procházející středy podstav o $60, 120, 180, -120, -60$, 3 rotace b) podle os procházejících středy protějších stěn o 180 a 3 rotace c) podle os procházejících středy protějších hran o 180. Identita má zřejmě každý prvek množiny M jako fixní, tedy $2^1 2$ prvků. Rotace a) o $60, -60$ má 2^2 fixních prvků, celkem tedy $2 \cdot 2^2 = 2^3$. Rotace a) o $120, -120$ má 2^4, celkem tedy 2^5 fixních prvků. Rotace a) o 180 má 2^6 fixních prvků. Rotace b) má každá 2^6 fixních prvků, celkem tedy $3 \cdot 2^6$. Rotace c) má každá 2^6 fixních prvků, celkem tedy $3 \cdot 2^6$. Celkový počet orbit bude tedy aritmetický průměr fixních prvků, tedy $\frac{2^1 2+2^3+2^5+7\cdot 2^6}{12} = 382$, což je hledané řešení.

31. **Kanoistika**

Výsledek: 6,47

Řešení: Úloha by byla krásným příkladem na derivace pro zkušené matematiky, ukažme si ale nyní i velice pěkné řešení s pomocí tzv. *Snellova zákona*. Snellův zákon se využívá hlavně ve fyzice, popisuje totiž šíření vlnění ve dvou různých prostředích, s jinou rychlostí. Přemýšlejme o Tobiasovi jako o vlnění, které přechází z prostředí vody (kde se šíří rychlostí 6 km/h) do prostředí pobřeží (kde se šíří rychlostí 10 km/h). Analogie se světlem se nám bude hodit, protože světlo se z bodu do bodu šíří po nejrychlejší možné cestě, stejně jako to chce udělat Tobias.

Označme si $v_1 = 6\,\mathrm{km/h}$, $v_2 = 10\,\mathrm{km/h}$, a také úhly α_1 a α_2, což jsou úhly mezi trajektoriemi Tobiase a kolmicí na rozhraní prostředí (v našem případě pobřeží). Nutně pak $\alpha_2 = 90°$, protože se potřebuje dostat do bodu na pobřeží, což je v našem případě rozhraní prostředí.

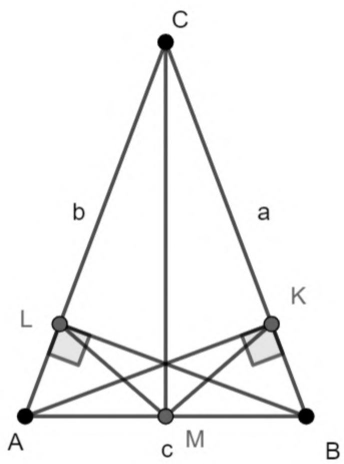


Snellův zákon nám pak udává vztah mezi rychlostmi prostředí a úhly od kolmice, tj.

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$$
$$\sin \alpha_1 = \frac{\sin \alpha_2 \cdot v_1}{v_2} = \frac{\sin 90^\circ \cdot 6}{10}$$
$$\alpha_1 = 36,8699^\circ$$

Z pravoúhlých trojúhelníků v obrázku pak jednoduše spočítáme, že musí Tobias kanoí dojet na místo vzdálené 6,47 km od místa určení.

32. **Dětský obvoďák**
Výsledek: 22/25
Řešení:



Z obrázku vídime, že body K a L leží na Thaletově kružnici se středem v M a poloměrem AB, tudíž $|KM| = |LM| = \frac{c}{2}$.

Z toho dostaneme, že

$$\frac{|KM|+|KL|}{|AB|+|AC|+|BC|} = \frac{c}{c+2b} = \frac{11}{36}$$
$$36c = 11c + 22b$$
$$25c = 22b$$
$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{c}{b} = \frac{22}{25}$$

33. **Platónská postupka**

Výsledek: $0,00208$

Řešení:

Platónská tělesa jsou čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn, n tedy pro jednotlivá tělesa po řadě nabývá maximálních hodnot $4, 6, 8, 12$ a 20.

Celkově tedy můžeme těmito hracími kostkami hodit $4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 20 = 46080$ kombinací.

Nyní spočítejme počet kombinací, při kterých padne požadovaná postupka. Pro čtyřstěn máme 4 možnosti, jaké číslo může padnout. Nezávisle na tom mohou následně na krychli padnout 4 čísla (čísla 1 až 5, kromě toho, které padlo na čtyřstěnu). Obdobně máme 3 možnosti pro osmistěn, 2 pro dvanáctistěn a 1 pro dvacetistěn. Celkem tak máme $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ možností, jak může postupka padnout. Pravděpodobnost zadané postupky je tedy $\frac{96}{46080} = \frac{1}{480} \doteq 0,00208$.

34. **Pegas**

Výsledek: 40

Řešení: Prvním krokem je si uvědomit, že pro libovolné $n \leq 4$ pegas nemůže udělat ani jeden skok. To nám dává $0+3+8+15 = 26$ začerněných polí (začerněna budou všechna pole, až na to, na kterém pegas stojí na začátku). Pro $n = 5$ lze jednoduše ukázat, že se dostane na libovolné z obvodových polí; na středových 9 se ale nedostane ze stejných důvodů, jako pro $n \leq 4$. Pro $n = 6$ se takto dostane na všechna pole do dvou od okraje (a blíže do středu ne) a pro $n = 7$ se dostane na všechna až na středové. Pro všechna $n > 7$, se už pegas dostane na libovolné pole.

To nám dává dohromady $26 + 9 + 4 + 1 = 40$ začerněných polí.

35. **Digitální hodiny**

Výsledek: 48

Řešení: Označme si jednotlivé segmenty od vrchního po směru hodinových ručiček čísly $1-7$ tak, že prostřední segment bude mít číslo 7.

Počet segmentů v číslech splňujících zadané podmínky musí být zřejmě dělitelný 7 a nabývá hodnot 0˘28. Počet segmentů tedy může nabývat hodnot $7, 14, 21, 24$. Rozdělme si úlohu na tyto případy. Zatím nebudeme vůbec zohledňovat pořadí cifer.

a) Číslo má 24 segmentů:

Každý segment každé cifry musí být rozsvícen, podmínku tedy splňuje pouze číslo **8888**

b) Číslo má 7 segmentů:

Číslo zřejmě musí být maximálně trojmístné. Pokud by mělo 3 cifry, musely by být alespoň 2 jedničky a poslední by musela být sedmička. Toto číslo zřejmě nesplňuje podmínky. Hledáme tedy pouze jednomístná a dvoumístná čísla, která mají součet segmentů roven 7, což jsou:

$8, 12, 13, 15, 47$, z nichž evidentně splňuje podmínky jen **8, 13**.

c) Číslo má 21 segmentů:

Jedním řešením je **888** a vzhledem k tomu, že je rozsvícen maximání počet segmentů pro trojmístné číslo, můžeme nyní hledat pouze čísla čtyřmístná. Hledat budeme vylučovací metodou na principu faktu, že pokud nějaká cifra nemá rozsvíceny některé pozice segmentů, musí je mít rozsvícené všechny ostatní cifry.

Cifra 3 lze doplnit pouze ciframi $0, 1, 8$, přičemž pouze cifra 1 neobsahuje segmenty $2, 3$, tedy se v čísle musí nutně vyskytovat. Do součtu 21 zbývá stále 14 segmentů, nutně tedy musíme na poslední dvě pozice doplnit dvě čísla 8. Nacházíme tak řešení **1388**.

Obdobně k cifře 7 můžeme doplnit pouze cifry $6, 8$, ale všechny zmíněné cifry mají segment 3, tedy nemohou splnit podmínky.

Obdobně k cifře 1 můžeme doplnit pouze cifry $8, 9$ (variantu s 3 jsme již vyřešili) a ty všechny obsahují segment 6.

Zajímavější bude situace u cifry 4, ke které můžeme doplnit pouze cifry $0, 2, 6, 8$, kde pouze cifra 2 neobsahuje segment 3 a pouze cifra 6 neobsahuje segment 2. Cifry doplníme cifrou 0 a dostáváme řešení **2046**. Všechny zbývající nevyřazené cifry obsahují segment 1 a tedy další čtyřciferné řešení jistě nevznikne.

d) Číslo má 14 segmentů:

Z předchozích poznatků snadno nalezneme řešení **88, 138 a 1133**. Snadno také určíme, že 88 je jediné dvouciferné řešení a případ si rozdělíme na hledání trojciferných a čtyřciferných řešení.

Vzhledem k požadovanému součtu musí být u čtyřciferných řešení alespoň jedna cifra 1 či alespoň dvě cifry 7. Druhou variantu snadno vyřadíme a zaměříme se na situaci, kdy je v řešení právě jedna cifra 1.

Pokud by se cifra 1 vyskytla dvakrát, nemůže mít na pozici segmentů $5, 6$ segment již žádné jiné číslo. To splňuje pouze cifra 7 a řešení 1177 můžeme hned vyloučit.

Vzhledem k součtu můžeme k cifře 1 doplnit již jen cifry $4, 7$ a pro daný součet tak vznikají na doplnění posledních dvou cifer pouze možnosti $24, 34, 45, 37, 57, 44$, kde všechny můžeme vyloučit. Pro čtyřciferná čísla tedy řešení se součtem 14 segmentů neexistuje.

Poslední situace, která může nastat je, že má číslo 14 segmentů a 3 cifry. Při obdobném postupu jako u čtyřciferných při součtu 21 vyloučíme všechny varianty.

Nalezli jsme tedy tato řešení: **8, 88, 888, 8888, 13, 138, 1388, 1133, 2046**. Nyní ale musíme uvažovat veškeré permutace těchto čísel (kromě varianty, kde je nula na první pozici). Ze základních kombinatorických pravidel tedy dostáváme, že počet řešení je:

$1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3! + \frac{4!}{2} + 3! + 4! - 3! = 48$.

36. **Myš v domě**

Výsledek: $\frac{9}{256}$

Řešení: Myš žije nekonečně dlouho a my se snažíme najít, jakou část (nekonečného) života stráví v jaké místnosti. Ať už je tedy na začátku v jakékoli z místností, hledáme, kde bude s jakou pravděpodobností po n krocích, kde n jde do nekonečna.

Pro představu, řekněme, že začíná v místnosti A. S pravděpodobností $\frac{2}{3}$ z ní přejde do B a s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ do C. Po dalším zazvonění zvonku se bude přesouvat s pravděpodobností $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ do místnosti A, s pravděpodobností $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$ do místnosti C a s pravděpodobností $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ do místnosti B a tak dále. Hledáme tedy limitu této posloupnosti, kdy je nám jedno v jaké místnosti myš začíná.

Celkově tedy v každém kroku násobíme pravděpodobnost, s jakou je myš v dané místnosti s pravděpodobnostmi přechodů do jiných místností. Z toho získáme v limitě

$$\begin{aligned} p_A &= p_B \cdot \frac{2}{3} + p_C \cdot \frac{1}{2} \\ p_B &= p_A \cdot \frac{2}{3} + p_C \cdot \frac{1}{2} \\ p_C &= p_A \cdot \frac{1}{3} + p_B \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$p_A + p_B + p_C = 1$$

Řešením soustavy rovnic je $p_A = \frac{3}{8}$, $p_B = \frac{3}{8}$ a $p_C = \frac{1}{4}$.

37. **Rozdíly**

Výsledek: -2277

Řešení: Zaveďme novou funkci $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Podmínka ze zadání pak diktuje

$$g(x+1) - g(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = x + 1$$

pro každé $x \in \mathbb{Z}$. Funkci g určíme snadno, pišme pro libovolné kladné n (chování na záporných číslech nevyužijeme):

$$g(n) = n + g(n-1) = n + (n-1) + g(n-2) = \cdots = n + (n-1) + \cdots + 1 + g(0) = \frac{n(n+1)}{2} + g(0).$$

Máme dáno $f(11) = 111$, $f(111) = 11$, jejich rozdíl si zapíšeme v řeči funkci g, kterou již máme na kladných číslech určenou:

$$\begin{aligned} -100 = f(111) - f(11) &= (f(111) - f(110)) + (f(110) - f(109)) + \cdots + (f(13) - f(12)) + (f(12) - f(11)) \\ &= g(110) + g(109) + \cdots + g(12) + g(11) \\ &= 100 \cdot g(0) + \frac{110 \cdot 111}{2} + \frac{109 \cdot 110}{2} + \cdots + \frac{12 \cdot 13}{2} + \frac{11 \cdot 12}{2} \\ &= 100 \cdot g(0) + 227700. \end{aligned}$$

Je tedy $g(0) = -2278$. Dokončíme pak $f(2) - f(1) = g(1) = g(0) + 1 = -2277$.

38. **Přechody přes přechod**

Výsledek: 40

Řešení: Označme m počet našich hledaných dní. Pokud je m počet dní, při kterém nepoznáme, kolik lidí přešlo přes přechod, znamená to, že existují dvě čísla x a y mezi 30 a 60, $x < y$, tak, že čísla mx a my jsou od sebe vzdáleny o celočíselný násobek 1000. Předpokládejme nejprve, že jejich rozdíl je přesně 1000, potom platí pro nějaké přirozené číslo z:

$$\begin{aligned} mx &= z \\ my &= z + 1000 \\ m(y-x) &= 1000 \end{aligned}$$

Rozdíl $y - x$ je v rozmezí 1 až 30, a jde o dělitel 1000. Zjevně také m je dělitel 1000. Hledáme tedy co nejmenší přirozené m takové, že $1000/m$ je celé číslo v rozmezí 1 a 30. Takovým m je 40, odpovídající čísla x a y jsou například 30 a 55: $30 \cdot 40 = 1200$, $55 \cdot 40 = 2200$.

Kdyby rozdíl $my - mx$ byl celočíslený násobek 1000 větší než 1, pak by m muselo být větší než 40, protože rozdíl $60 \cdot 40 - 30 \cdot 40 = 1200 < 2000$, tudíž během 40 dnů nejsme schopni dosáhnout rozdílu 2000, natož vyššího násobku 1000.

39. **Devítky**

Výsledek: 41

Řešení: Nejprve ukážeme, že úlohu lze přeformulovat tak, abychom používali *nejvýše* pět čísel. Pokud totiž existuje řešení s 1,2 nebo 3 čísly, lze na konec přidat nějaký výraz, který jej "prodlouží"na pět čísel. Jako příklad vezměme číslo 4 - to lze vyjádřit jako $3 + 9 : 9$, tedy s pomocí tří čísel, odsud však lze snadno vytvořit pětičíselné řešení $3 + 9 : 9 \cdot 9 : 9$. Tím máme ošetřena řešení o délce 1-3. Zbývají řešení o délce 4, ty prodloužíme tak, že jednu z devítek rozepíšeme jako $3 \cdot 3$ nebo naopak trojku rozepíšeme jako $9 : 3$.
Nyní řešíme postupně od délky jedna po délku pět, vždy se snažíme najít všechna čísla, pro které je daná délka nejkratším možným řešením.

(a) zde máme pouze 2 čísla: $3, 9$.

(b) zde je 5 čísel: $1, 6, 12, 18, 27$

(c) počet takovýchto řešení narůstá na 9: $2, 4, 8, 10, 15, 21, 24, 30, 36$

(d) tato řešení lze generovat jednak prodloužením řešení o délce 3, druhak kombinováním dvou řešení o délce 2. Vyjde 11 čísel: $5, 7, 11, 13, 17, 19, 26, 28, 33, 39, 45$

(e) zde buďto prodlužujeme řešení délky 4, kombinujeme řešení o délce 3 a 2, nebo přímo vytvoříme řešení délky 5 pomocí zlomků. Vyjde 14 čísel: $14, 16, 20, 22, 23, 25, 29, 31, 32, 35, 37, 40, 42, 48$

Celkem dostáváme, že řešení délky 5 lze najít pro $2 + 5 + 9 + 11 + 14 = 41$ čísel.

40. **Škaredá čísla, hezký polynom**

Výsledek: 552,56922...

Řešení: Označme si naše číslo $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2}}$. A nyní toto číslo upravujme:

$$\alpha^3 = \sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2}$$

$$\alpha^3 + \sqrt{2} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\alpha^6 + 2\sqrt{2}\alpha^3 + 2 = 2 + \sqrt{2}$$

$$\alpha^6 = \sqrt{2}(1 - 2\alpha^3)$$

$$\alpha^{12} = 2(1 - 4\alpha^3 + 4\alpha^6)$$

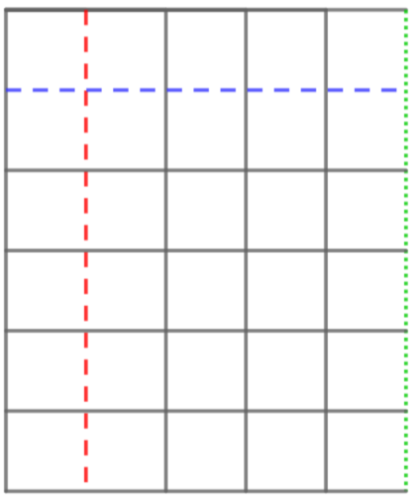
$$\alpha^{12} - 8\alpha^6 + 8\alpha^3 - 2 = 0$$

Takže nyní vidíme, že naše číslo je kořenem polynomu $f(x) = x^{12} - 8x^6 + 8x^3 - 2$, což je polynom dvanáctého stupně. Nyní dosadíme $\sqrt{3}$ a dostaneme $f(\sqrt{3}) = 552,5692193....$ Z výsledků algebry víme, že existuje pouze jediný takovýto polynom dvanáctého stupně, který má racionální koeficienty a vedoucí člen 1.

41. **Kalhoty**

Výsledek: 3461

Řešení: Prvně si vypočítáme, kolik čtverečků dohromady bude Lea potřebovat. Na každou nohavici to je $5 \times 6 = 30$ a na zbytek kalhot $8 \times 2 = 16$ čtverečků. Dohromady to je tedy $2 \times 30 + 16 = 76$ čtverečků a zabere jí to $40 \times 76 =$ **3040 minut**.



Nyní ta těžší část a sice sešívání čtverečků k sobě. Na obrázku jsou čtverečky, které musíme sešít a vznikne první nohavice. Aby nám vznikl takovýto obdélník, musíme sešít vždy dva sloupce čtverečků k sobě (červená úsečka) a to 4krát zopakovat a následně sešít vždy dva řádky čtverečků k sobě (modrá úsečka) a to 5krát zopakovat. Vzhledem k tomu, že sešití dvou čtverečků trvá 1 minutu, tak sešití dvou sloupců (či řádků) nám bude trvat tolik minut, kolik je sloupec (řádek) dlouhý (kde jako jednotku bereme jeden čtvereček). Konkrétně tedy sešití dvou sloupců trvá 6 minut a dvou řádků 5 minut. K vytvoření tohoto obdélníku budeme tedy potřebovat $4 \times 6 + 5 \times 5 = 49$ minut. Nohavice ale není oblélník, takže musíme sešít ještě dvě delší strany k sobě a vznikne nám válec bez podstav, který chceme. Musíme tedy přičíst ještě 6 minut. Vytvoření obou nohavic z již hotových čtverečků nám bude tedy trvat $2 \times (49 + 6) =$ **110 minut**.

Zbývá nám tedy 16 čtverečků, které sešijeme do obdélníku 2×8 a následně opět do válce (tentokrát sešijeme kratší strany k sobě). Stejným způsobem vypočítáme, že nám to zabere $8 + 2 \times 7 + 2 =$ **24 minut**.

Máme tedy tři válce a ty přišijeme podle zadání. Spojení nohavic v rozkroku nám bude trvat 1 minutu a potom po obvodu širokého válce nám bude přišití nohavic trvat 8 minut. Dohromady máme tedy **9 minut**. Nakonec přidáme pas, který trvá uháčkovat **270 minut**, ale následně ho musíme ještě přišít zvrchu kalhot, kde je obvod 8 čtverečků, takže to jí bude trvat dalších **8 minut**. Kalhoty máme hotové a stačí nám teď vše jen sečíst:

$$3040 + 110 + 24 + 9 + 270 + 8 = 3461$$

42. **Osamělý hráč**

Výsledek: 22

Řešení:

První krok k řešení je uvědomit si, že všechny hody Karlových mincí jsou nezávislé. Kolikrát Karel háže první mincí, než padne orel, neovlivní jeho počet hodů druhou mincí, než padne orel, apod. Stačí nám tedy zjistit, jaký je očekávaný počet hodů jednou mincí, než mu padne orel. Intuitivně asi nějak tušíme, že to bude 2, ale pokusme se to zjistit pořádněji.

Namodelujeme si situaci. Máme jednu konkrétní zafixovanou minci. Každému přirozenému číslu $n \in \mathbb{N}$ přiřadíme pravděpodobnost, že Karel touto mincí hodí právě n-krát. Kdyby hodil právě jednou, musel by hodit na první pokus orla, což nastane s pravděpodobností $p(1) = \frac{1}{2}$. Kdyby hodil dvakrát, musel by hodit nejprve pannu a potom orla, což nastane s pravděpodobností $p(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, a tak dále. Celkem intuitivně získáváme, že pravděpodobnost, že Karel s jednou mincí hodí právě n-krát, bude $p(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Nás ale celkem zajímá, jaký je očekávaný počet hodů jednou mincí. Toho dosáhneme jistou obdobou "váženého průměru". Víme-li totiž, že pravděpodobnost, že mincí hodíme právě n-krát je $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, můžeme každé přirozené číslo n vynásobit příslušnou pravděpodobností, tato čísla sečíst a získáme tím hledaný výsledek. (Pokud vám tento krok není jasný, rozmyslete si nejprve, jak by vypadalo například hledání očekávaného počtu vstřelených gólů za zápas pro útočníka, který vstřelí jeden gól za zápas s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ a vstřelí dva góly za zápas s pravděpodobností $\frac{2}{3}$. Celkem intuitivně nás tento příklad táhne k váženému průměru, tedy spočítání výsledku jako $\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{5}{3}$. S mincí je to úplně stejné, pouze máme nekonečně mnoho možných výsledků.)

Celkem tedy získáváme výsledek jako $\sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Vyhodnocení tohoto součtu vyjde jako 2, buď za pomocí Wolframu nebo se znalostí trochy teorie nekonečných řad. Výsledek celé úlohy je potom $2 \cdot 11 = 22$, díky nezávislosti mincí, jak jsme zmiňovali.

43. **O nosičích rýže**

Výsledek: 25

Řešení:

Nejprve zjistíme všechny možné hodnoty n. Ze zadání existují nezáporná celá čísla a, b, c taková, že $n = 17a + 9 = 12b + 3 = 7c + 5$. Zabývejme se jejich vzájemným vztahem.

Z rovnosti $17a + 9 = 12b + 3$ plyne, že číslo $12b - 6$ je dělitelné sedmnácti. Zjistěme, pro jaké hodnoty b toto platí. Snadno se ověří, že to závisí jen na tom, jaký zbytek po dělení 17 číslo b má.

$b = 17b_2 +$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$12b - 6$	11	6	1	13	8	3	15	10	5	0	12	7	2	14	9	4	16

Vidíme, že $b = 17b_2 + 9$. Dosazením do třetí rovnosti dostaneme $12(17b_2 + 9) + 3 = 7c + 5$. Toto upravme na $204b_2 + 106 = 7c$; nutně levá část je dělitelná sedmi. Protože $204 = 29 \cdot 7 + 1$ a $106 = 15 \cdot 7 + 1$, nastane to jen v případě, kdy $b_2 + 1$ je dělitelné sedmi, tedy $b_2 = 7b_3 - 1$.

Opětným dosazením dostáváme vztah $n = 12(17(7b_3 - 1) + 9) + 3$, neboli $n = 1428b_3 - 93$ pro nějaké přirozené b_3. Ačkoli toto je z našeho postupu pouze nutná podmínka pro to, aby n vyhovovalo zadání, dá se snadno ukázat, že je i postačující – stačí tento výraz vydělit se zbytkem.

Vraťme se nyní k omezení n počtem rýžonošů. Ten označme R. Celkové množství rýže v pytlích je

$$1 + 1,3 + 1,3^2 + ... + 1,3^{R-1} = \sum_{k=0}^{R-1} 1,3^k = \frac{1 - 1,3^R}{1 - 1,3},$$

z čehož určitá část je kulatozrnná. Aby n bylo jednoznačně zadáno, nutně je celkový počet pytlů menší, než $1428 \cdot 2 - 93$, tedy $2763 > \frac{1-1,3^R}{1-1,3}$. Největší vyhovující R je 25.

44. **Proces**

Výsledek: 409

Řešení:

Zkoumejme situaci po právě n proběhlých procesech. Jistě $x-$ová souřadnice polohy Koumy s Ňoumou je součtem n nezávislých hodů kostkou; stejně tak $y-$ová. Označme tyto souřadnice X a Y. Přesným pravděpodobnostním rozdělením součtu n hodů kostkou se nebudeme zabývat; postačí nám známý fakt, že nejpravděpodobnější sumou je $\frac{7}{2} \cdot n$ pro sudé n a dvě hodnoty k této nejbližší pro liché n, a dále, že pravděpodobnosti sum stejně vzdálených od $\frac{7}{2} \cdot n$ jsou totožné – dostaneme-li určitým hodem jeden součet, pak druhý vznikne prohozením jedniček za šestky, dvojek za pětky a trojek za čtyřky.

Po n procesech se nachází Kouma s Ňoumou ve vzdálenosti $L = \sqrt{X^2 + Y^2}$ od počátku. Z výše uvedeného vidíme, že pravděpodobnosti, že $L < \sqrt{\left(\frac{7}{2} \cdot n\right)^2 + \left(\frac{7}{2} \cdot n\right)^2} = \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot n$ a $L > \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot n$ jsou stejné. Aby tedy byla alespoň poloviční pravděpodobnost, že jsou ve vzdálenosti 2023, musí $2023 < \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot n$. Nejmenší takové n je 409.

45. **Krycí jména**

Výsledek: 52586176500

Řešení:

Při řešení úlohy budeme postupovat následovně. Nejprve určíme počet způsobů vybrání 8 modrých z celkových 25 políček. Poté ze zbylých 17 vybereme 7 červených a na závěr ze zbývajících 10 vybereme unikátní černé políčko. Nezávisle na předchozích výběrech můžeme toto provést pro libovolnou barevnou kombinaci, tedy celkový počet různých rozmístnění barev je roven součinu kombinačních čísel jednotlivých výběrů.

Nesmíme ovšem zapomenout na to, že hledáme neorientovaná pole 5×5, tedy žádná dvě barevná rozmístnění nesmíme dostat nějakou rotací. Nyní bychom hledali počet rozmístění pro orientované pole. Čtverec můžeme (bez zrcadlení) rotovat do 4 různých poloh, výsledné číslo tedy ještě musíme vydělit 4.

Toto by ale ovšem platilo pouze pro pole, která nejsou po nějaké rotaci symetrická. Ukažme si tedy, že pro zadanou barevnou kombinaci nelze vytvořit takto symetrické pole. Černé políčko musí určitě ležet uprostřed (jinak nám samo o sobě vždy vytvoří rotací unikátní pole). Nyní ať už umístíme červené políčko kamkoliv, musí být políčko symetrické podle středu také červené. To je ale v rozporu s faktem, že máme lichý počet červených políček. Tedy neexistují žádná pole s tímto zadáním, která by byla pro nějakou rotaci symetrická.

$$\frac{\binom{25}{8} \cdot \binom{17}{7} \cdot \binom{10}{1}}{4} = 52586176500$$