Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.00

Pokud je řešením počet nějakých objektů a správná odpověď je nekonečno, napište „inf“. Pokud je řešením racionální necelé číslo, napište jej jako zlomek v základním tvaru (např. 5/7*, ale ne* 4/6*). Pokud je řešením iracionální číslo, napište jej v desetinném zápisu s tečkou zaokrouhleno na 5 desetinných míst (např.* 5.55579846 . . . *jako* 5.55580*).*

1. **Cesty do Říma:** Do Říma vede 2022 cest, které jsou nějak (ne nutně různě) dlouhé. Když je očíslujeme přirozenými čísly od 1 do 2022, nastane právě jedna z následujících situací:

   - Právě jedna z cest je delší než druhá (tj. s číslem 2)
   - Právě jedenáct cest je delších než druhá
   - Právě sto jedenáct cest je delších než druhá
   - Právě tisíc sto jedenáct cest je delších než druhá
   - Žádná cesta není delší než druhá

   Navíc každá ze situací určitě nastane v alespoň jednom očíslování. Vybereme očíslování rovnoměrně náhodně. Určete pravděpodobnost druhé nejpravděpodobnější situace.

   Výsledek: 911/2022

   Řešení: Uvědomme si, že cesty můžeme rozdělit do pěti tříd podle délky, od nejdelších po páté nejdelší. Podle toho, v jaké třídě leží zkoumaná druhá cesta, pak nastane jedna z pěti možností počtu delších; pokud by tříd bylo více nebo méně, nebylo by situací právě pět. Současně v situacích, kdy je méně cest delších než druhá, je druhá cesta delší, než v situacích, kdy jich je více.

   Druhá cesta může tedy patřit mezi cesty...

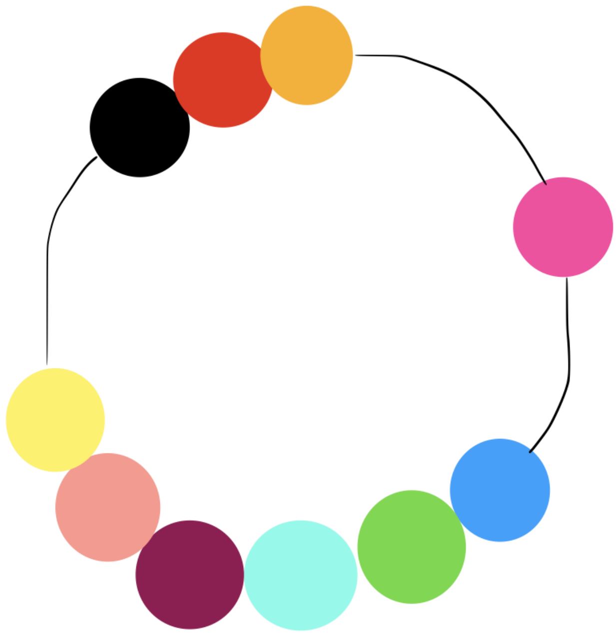
   - Nejdelší: Odpovídá tu zjevně možnosti E).
   - Druhé nejdelší: Odpovídá A); nejdelší cesta je tedy jediná.
   - Třetí nejdelší: Odpovídá B); druhých nejdelších je $11 - 1 = 10$.
   - Čtvrté nejdelší: Odpovídá C); třetích nejdelších je $111 - (1 + 10) = 100$.
   - Páté nejdelší: Odpovídá D); čtvrtých nejdelších je $1111-(1+10+100) = 1000$, pátých nejdelších $2022 - 1111 = 911$.

   Pravděpodobnosti, že nastane daná situace, jsou tedy v pořadí $\frac{1}{2022}, \frac{10}{2022}, \frac{100}{2022}, \frac{1000}{2022}, \frac{911}{2022}$. Druhá největší z nich je $\frac{911}{2022}$.

2. **Korálky:** Ernesto má k dispozici 10 barevných korálků, kde každé 2 korálky mají jinou barvu. Těchto 10 korálků si navlékl na provázek a ten zavázal, čímž si vytvořil náramek. Sousední korálky poté různě poslepoval k sobě tak, jak je vyznačeno na obrázku. Vznikly mu tak na náramku skupiny slepených korálků - skupina může čítat 1 až 10 korálků. Měl dlouhý provázek, tedy ať slepil korálky libovolně (klidně všech 10 za sebe do řetízku), vždy zůstaly nějaké dva sousední korálky neslepené. Kolik různých náramků takto mohl získat? Dva náramky považujeme za stejné, pokud pomocí otočení nebo nasazení na ruku opačným směrem zjistíme, že mají korálky nasazené ve stejném pořadí a zároveň mají korálky poslepovány stejným způsobem.

   Výsledek: 185613120

   Řešení: Nejprve zjistíme, kolika různými způsoby mohl Ernesto navléct korálky na náramek. Poté toto číslo vynásobíme počtem možností, jak mohl korálky poslepovat, a získáme výsledek. Pokud budou totiž pořadí korálků různá, budou i náramky s poslepovanými korálky různé, ať je poslepujeme jakkoliv. Víme, že se dva náramky považují za stejné, pokud lze jeden z druhého získat otočením nebo nasazením na ruku opačným směrem. Začněme s horním odhadem 10!. Tolika způsoby by se dalo totiž navléct 10 korálků na rovný provázek bez zavázání. Když ale provázek zavážeme, ztrácíme najednou schopnost rozlišit, který z korálků byl v řetězci první - mohl by to být kterýkoliv z nich.



Tedy pro ztotožnění všech "rotačně shodných" pořadí korálků musíme 10! vydělit 10 a získáváme 9!. Dále ještě musíme ztotožnit ta pořadí, která jsou "osově shodná". Uvědomme si, že když korálky navlečeme na provázek v nějakém pořadí z jednoho konce provázku a poté ve stejném pořadí z druhého konce provázku, získáme tím dva náramky, které sice nejsou rotačně shodné, ale jsou osově shodné - jeden z druhého můžeme získat osovou souměrností neboli nasazením opačným směrem. Počet rotačně shodných náramků musíme tedy ještě vydělit 2, čímž se ocitáme na hodnotě $\frac{9!}{2}$.

Spočítali jsme tedy celkový počet různých způsobů, jak můžeme korálky na náramek navléct. Teď už pro slepování korálků postačí následující úvaha: Představme si, že mezi každými dvěma korálky se ze začátku nachází drážka, která každou dvojici vedlejších korálků odděluje. Těchto drážek je celkem 10. U každé z nich máme dvě možnosti - buď drážku ponecháme a tedy danou dvojici korálků necháme oddělenou, a nebo drážku vyndáme a tuto dvojici vedlejších korálků slepíme. Celkem tedy existuje 2^{10} možností, jak se pro daný náramek rozhodnout, jak jeho korálky poslepovat. Musíme si ale dát pozor - jedna tato možnost zadání nevyhovuje, a to případ, kdybychom chtěli vyndat všech 10 drážek a slepit všechny dvojice sousedících korálků. Víme totiž ze zadání, že vždy musíme alespoň jednu drážku ponechat, jelikož vždy bude existovat alespoň jedna dvojice sousedních korálků, která nebude slepená. Celkem tak získáváme číslo $\frac{9!}{2} \cdot (2^{10} - 1) = 185613120$.

3. **Kruté zvolání:** Dalík se procházel parkem, když najednou zakopl o kámen. Při tom zvolal: "Mám funkci splňující $f(1) = f(2) = 1$ a $f(n+2) = 2^{f(n+1)} + 2^{f(n)}$ pro každé přirozené $n \geq 1$." Určete zbytek, který dává číslo $f(23)$ po dělení číslem 42.

   Výsledek: 8

   Řešení: Podle Čínské zbytkové věty nám stačí určit zbytek $f(23)$ po dělení čísly 2,3,7 ($2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$).

   Nejprve jistě pro $n \geq 3$ je $f(n)$ sudé. Pro sudé číslo $2x$ ale platí $2^{2x} = 4^x \equiv 1^x = 1 \pmod 3$. Pro $n \geq 5$ je každé $f(n)$ rovno součtu dvou mocnin dvojky se sudým exponentem, tedy $f(n) \equiv 2 \pmod 3$, a tak $f(n) \equiv 2 \pmod 6$.

   Konečně, podle Malé Fermatovy věty platí $2^6 \equiv 1 \pmod 7$. Pro každé $n \geq 7$ je tak

$$f(n) = 2^{f(n-1)} + 2^{f(n-2)} \equiv 2^{f(n-1) \pmod 6} + 2^{f(n-2) \pmod 6} = 2^2 + 2^2 = 8 \equiv 1 \pmod 7.$$

   Hledané $f(23)$ tak splňuje $f(23) \equiv 2 \pmod 6$ a $f(23) \equiv 1 \pmod 7$, neboli $f(23) \equiv 8 \pmod{42}$.

4. **Mašinka Tomáš:** Mašinka Tomáš projíždí trasu, která má devět zastávek, začíná v první z nich a končí v poslední, celkem tedy projede osm úseků. Pokud na každé zastávce nastoupí stejný počet

lidí a každý cestující si po nástupu na vlak náhodně zvolí zastávku (před ním), na které vystoupí, v kolikátém úseku bude vlak průměrně nejplnější?

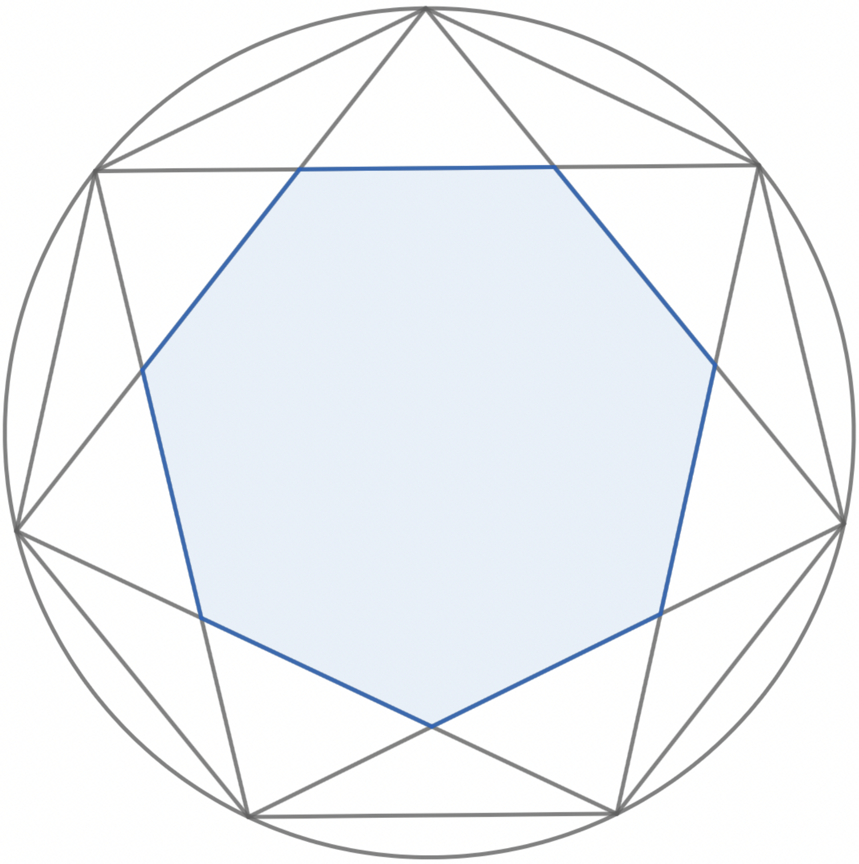
Výsledek: 6

Řešení: Označme si počet lidí nastupujících na každé zastávce x. V prvním úseku (mezi první a druhou zastávkou) tedy cestuje x cestujících, z nichž $\frac{1}{8}$ chce vytoupit na druhé zastávce, $\frac{1}{8}$ na třetí atd. V druhém úseku tedy cestuje x nově nastoupených lidí, z nichž $\frac{1}{7}$ chce vystoupit na třetí zastávce a $\frac{7}{8}x$ cestujících, kteří nastoupili na první zastávce a nevystoupili na druhé, celkem tedy $x + \frac{7}{8}x = x \cdot (1 + \frac{7}{8})$. Ve třetím úseku cestuje x nově nastoupených lidí, z nichž opět $\frac{1}{6}$ vystoupí na další zastávce, dále $\frac{6}{7}x$, cestujících z druhé zastávky a $\frac{6}{8}x$ cestujících z první zastávky, celkem tedy $x \cdot (1 + \frac{6}{7} + \frac{6}{8})$.

Stejnou argumentací můžeme pokračovat pro další zastávky a zjistíme, že v n-tém úseku cestuje $x \cdot (\frac{9-n}{8} + \frac{9-n}{7} + ... + \frac{9-n}{9-n}) = x \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{9-n}{9-i}$. Zajímá nás, pro jaké n nabývá tato funkce maxima. Protože je x kladné, můžeme ho vynechat, protože jen škáluje celou funkci, čímž neovlivní pozici maxima.

Vyčíslíme funkci a zjistíme, že její hodnoty pro $n \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ jsou postupně $1, 1.875, 2.607, 3.173, 3.538, 3.654, 3.436, 2.718$, z nichž největší je 3.654 pro $n = 6$.

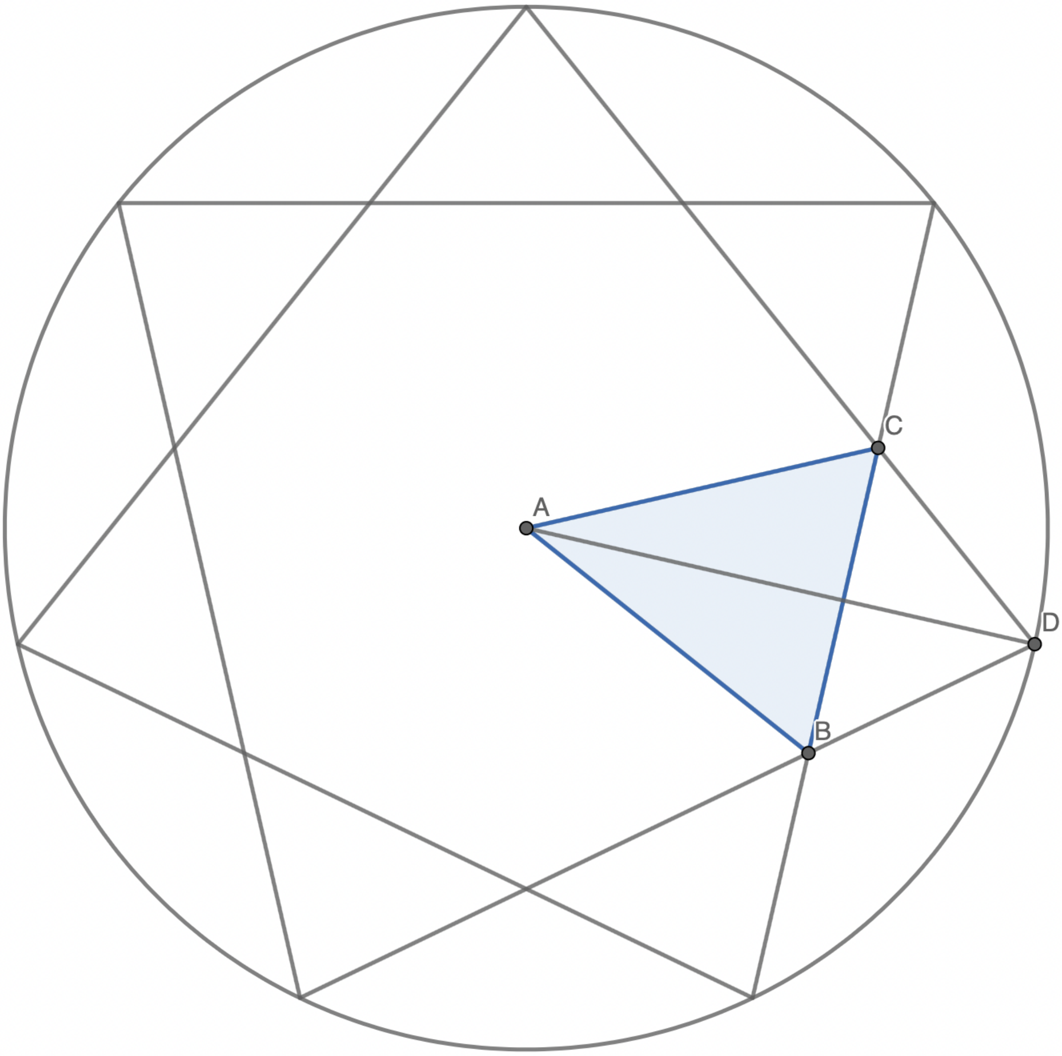
5. **Pekelný obsah:** Bubla si nakreslila pravidelný 2023-úhelník a opsala mu kružnici, nazvěme ji k. Z 2023-úhelníka pak vytvořila 2023-gram tak, že spojila všechny dvojice vrcholů 2023-úhelníka, které měly stejného souseda. Zjistila, že z těchto nových čar se jí vytvořil druhý, menší pravidelný 2023-úhelník s obsahem 10^6 uvnitř původního 2023-úhelníka. Jaký byl obsah původní kružnice k? Na obrázku je analogická situace pro heptagram, modře je vyznačen nově vzniklý pravidelný sedmiúhelník.



Výsledek: 1000008.84264

Řešení: Zkusíme úlohu vyřešit pro případ, kdy obsah nově vzniklého 2023-úhelníka položíme roven 1. Když v tomto případě spočítáme obsah původní kružnice, postačí nám výsledek vynásobit 1000000.

Když si nově vzniklý 2023-úhelník rozkouskujeme na 2023 stejně velkých trojúhelníků tak, že spojíme všechny vrcholy se středem, bude každý z těchto trojúhelníků mít obsah $S = \frac{1}{2023}$. Na obrázku máme situaci analogickou pro sedmiúhelník. V tomto případě je modře vybarvená část analogie



trojúhelníka s obsahem $S = \frac{1}{2023}$. Abychom mohli zjistit, jaký je obsah celé kružnice, musíme zjistit délku jejího poloměru. Tu můžeme zjistit jako součet dvou délek - výšky modře vybarveného trojúhelníka a výšky bílého trojúhelníka. K tomu nám postačí znalost obsahu modrého trojúhelníka, úhlu $|\sphericalangle CAB| = \left(\frac{2\pi}{2023}\right)^\circ$ a úhlu $|\sphericalangle CDB| = \left(\frac{2019\pi}{2023}\right)^\circ$. Velikost úhlu CDB vypočítáme tak, že si všimneme, že když protneme polopřímky DC a DB s kružnicí k, získáme tětivu kružnice, jejíž obvodovým úhlem je právě úhel CDB. Tato tětiva rozděluje obvod kružnice k na dvě části s délkami 4 a 2019, z čehož už jednoduše dopočítáme velikost úhlu $|\sphericalangle CDB| = \left(\frac{2019\pi}{2023}\right)^\circ$. Označme si $S = \frac{1}{2023}$, $|\sphericalangle BAC| = \alpha, |\sphericalangle CDB| = \beta$. Nyní už můžeme dopočítat délku poloměru kružnice pomocí goniometrických vztahů v trojúhelnících například jako

$$r = \sqrt{\frac{2S}{\sin(\alpha)}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\tan(\frac{\beta}{2})}\right)$$

Obsah kružnice vypočítáme jako πr^2, po dosazení do Wolframu obdržíme hodnotu 1.00000884264. Vynásobíme 10^6, tedy posuneme desetinnou čárku o šest míst doprava a získáváme výsledek úlohy.

6. **Hloupý, ale funkční robot:** Čtvercový stůl je rozdělený na čtyři stejně velké čtvercové části. Na každé z těchto částí je nakreslena šipka směřující k nějaké straně stolu. Hloupý robot se po stole pohybuje tak, že když přijde na nové políčko, pokračuje po směru šipky. Může se ovšem stát, že

přejde přes hranu stolu a spadne na zem. Určete, kolik existuje rozmístění šipek na stole takových, že můžeme robota postavit na stůl tak, aby nikdy nespadl.

Výsledek: 64

Řešení: Pro každé políčko na čtvercovém stole platí, že dvě možné pozice šipky směřují směrem ze stolu a dvě směřují do stolu. Rozeberme tedy několik možností směrů všech šipek:

(a) *Všechny šipky směřují jedním ze směrů „do stolu“* – v tomto případě libovolné umístění šipek povede k tomu, že robot nikdy nespadne. Máme tedy pro každé políčko dvě možné pozice šipky, čtyři políčka, dohromady $2^4 = 16$ příznivých možností.

(b) *Právě jedna ze šipek směřuje „ven“* – tato šipka se může nacházet na jednom z 4 míst, máme na výběr ze dvou směrů. Zbylé musejí směřovat směrem do stolu, přičemž vždy musejí dvě z nich ukazovat "na sebe navzájem"($\rightarrow\leftarrow$) – jinak by nastala situace, že robot dojde na šipku směřující ven – a třetí je natočená směrem do stolu (jedním ze dvou možných). Pro každou z osmi voleb ven směřující šipky máme dvě možnosti dvojic na sebe ukazujících šipek, pro každou z nich může poslední šipka ukazovat jedním ze dvou vnitřních směrů; dohromady $8 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

(c) *Právě dvě šipky ukazují směrem ven* – to zejména znamená, že dvě ukazují dovnitř. Tyto dvě ukazující vnitřním směrem musejí ukazovat na sebe navzájem – jinak totiž směřují buď ven, nebo na políčko s ven směřující šipkou. Tato dvojice může mít jednu ze čtyř možných pozic, zbylá dvě políčka mají na sobě šipky směřující ven (každá z nich má dvě možné pozice), dohromady $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

(d) *Právě tři šipky ukazují ven* – pak jistě nevytvoříme vhodnou kombinaci – vždy šipka směřuje buď ven, nebo na políčko s šipkou směřující ven.

Dohromady tedy máme $16 + 32 + 16 = 64$ možností.

7. **Cifry šifry:** Kolik existuje devíticiferných čísel s ciferným součinem 72 a ciferným součtem 20?

Výsledek: 1008

Řešení: První důležitou myšlenkou je, že abychom dostali ciferný součin 72, nesmí se v daném čísle vyskytovat cifra 0. Platí $72 = 2^3 \cdot 3^2$, jediné povolené cifry budou děliteli 72, tedy $9, 8, 6, 4, 3, 2, 1$. Máme právě devět možností, jak získat devět cifer takových, že jejich součin dává 72, přičemž pouze tři z nich dávají součet cifer 20, a to $\{9, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1\}$, $\{8, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$, $\{6, 6, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$. První kombinaci můžeme seřadit $\frac{9!}{5!3!1!} = 504$ možnostmi, druhou $\frac{9!}{6!2!1!} = 252$ možnostmi a třetí také $\frac{9!}{6!2!1!} = 252$ možnostmi, což dává dohromady 1008 různých devíticiferných čísel splňujících zadání.

8. **Kouzelná operace:** Na přirozených číslech bez nuly je definována operace $\ominus : a \ominus b = |a - b| + 1$. Kolik různých čísel je možné vytvořit pomocí čísel 102299, 84099, 3606 a operace $\ominus$?

Výsledek: 14615

Řešení: Můžeme si všimnout, že všechna zadaná čísla jsou ve tvaru $7 \cdot k + 1$. Jejich rozdíl tedy vždy bude dělitelný sedmi a po přičtení jedničky opět dostaneme číslo v tomto tvaru. Počet řešení se nám takto omezuje pouze na čísla ve tvaru $7 \cdot k + 1$. Pokud by se nám podařilo vytvořit číslo 8, mohli bychom tak i postupným odečítáním od čísla 102299 vytvořit všechna čísla tvaru $7 \cdot k + 1 \leq 102299$. To můžeme provést pomocí kouzelné operace následovně:

$84099 - ((3606 - 1) \cdot 23) = 1184$

$84099 - ((1184 - 1) \cdot 71) = 106$

$1184 - ((106 - 1) \cdot 11) = 29$

$106 - ((29 - 1) \cdot 3) = 22$

$29 - (22 - 1) = 8$

Řešením jsou tedy všechna čísla tvaru $7 \cdot k + 1 \leq 102299$, kterých je $(102299 - 1)/7 + 1 = 14615$.

9. **Mírumilovná míra:** Mějme krychli o délce strany 1. Označme její vrcholy podle konvence jako A, B, C, D, E, F, G, H. Dále označme střed hrany AE jako A', střed hrany BF jako B', střed hrany CG jako C' a střed hrany DH jako H'. Uvnitř každé z úseček $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ a $D'A'$ vyberme bod rovnoměrně náhodně. Uvnitř stěn krychle $ABCD$ a $EFGH$ vybereme opět bod rovnoměrně

náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že všech těchto šest náhodně vybraných bodů tvoří těleso v prostoru s objemem $V < \frac{1}{6}$?

Výsledek: $\frac{1}{2}$

Řešení: Těleso tvořené šesti náhodnými body je složeno ze dvou na sebe "přilepených"čtyřstěnů, které mají oba jednu shodnou stěnu. Objem tohoto tělesa bude tedy součet objemů obou přilepených čtyřstěnů. Připomeňme si vzorec pro výpočet objemu čtyřstěnu: $V = \frac{1}{3}Sv$, kde S značí obsah podstavy a v délku výšky spuštěné do podstavy z protějšího vrcholu. Lehce se rozmyslí, že ať vybereme bod na stěně krychle $ABCD$ jakkoliv, vždy bude mít výška spuštěná z tohoto bodu do podstavy délku $\frac{1}{2}$, přičemž to stejné bude platit i pro bod náhodně zvolený na stěně $EFGH$. Tedy ve vzorci pro objem obou čtyřstěnů můžeme v nahradit $\frac{1}{2}$ a objem výsledného šestivrcholového tělesa bude $V = 2 \cdot \frac{1}{3}S\frac{1}{2} = \frac{1}{3}S$. Chceme zjistit, jaká je pravděpodobnost, že $V < \frac{1}{6}$, neboli $\frac{1}{3}S < \frac{1}{6}$, tedy $S < \frac{1}{2}$.

Původní úloha je tedy ekvivalentní s otázkou, jaká je pravděpodobnost, že čtyři náhodně zvolené body na jednotkovém čtverci $A'B'C'D'$, každý uvnitř jiné strany tohoto čtverce, tvoří čtyřúhelník s obsahem $S < \frac{1}{2}$. Začněme označením vzdálenosti bodu A' od náhodně zvoleného bodu uvnitř strany $A'B'$ jako a, dále označme vzdálenost bodu B' od náhodně zvoleného bodu uvnitř strany $B'C'$ jako b a stejně tak vzdálenosti c, d. Platí $a, b, c, d \in (0, 1)$ jsou uniformně náhodně vybraná čísla z tohoto intervalu. Pomocí těchto vzdáleností můžeme vyjádřit obsah čtyřúhelníka tvořeného náhodnými body jako $S = 1 - \frac{a\cdot(1-d)}{2} - \frac{b\cdot(1-a)}{2} - \frac{c\cdot(1-b)}{2} - \frac{d\cdot(1-c)}{2}$. Tuto hodnotu dosadíme do nerovnosti $S < \frac{1}{2}$, upravíme a získáváme nerovnost $1 < a+b+c+d-ad-ba-cb-dc$. Vytknutím $a+c$ dostáváme $1 < (a+c)(1-b-d)+b+d$ neboli $1-b-d < (a+c)(1-b-d)$. Nyní už jsme skoro u cíle - stačí rozlišit dva případy, kdy je $b+d$ větší nebo menší než jedna, jelikož nám to změní směr nerovnosti. Proměnné a, b, c, d jsou nezávislé a z intervalu $(0, 1)$, tedy případ $b+d > 1$ nastane s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, a za této situace se ptáme na pravděpodobnost, že $a+c > 1$, což je očividně opět $\frac{1}{2}$. Podobně případ $b+d < 1$ nastane s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ a za tohoto předpokladu bude pravděpodobnost jevu $a+c < 1$ opět $\frac{1}{2}$. Výsledná pravděpodobnost toho, že $S < \frac{1}{2}$ bude tedy $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Pozn.: Situace, kdy $a+c = 0$ nebo $b+d = 0$ nám výslednou pravděpodobnost nezmění, neboť tyto body tvoří množinu míry 0.

10. **Součin mnoha polynomů:** Uvažujme polynom $p(x) = \prod_{n=2}^{2022}(x^{t(n)} - n)$, kde $t(n)$ je největší k takové, že k-tá odmocnina z n je celé číslo. Určete počet různých normovaných polynomů prvního stupně s celočíselnými koeficienty, které dělí p.

Výsledek: 2001

Řešení: Rozebereme jednotlivé případy podle toho, jaké hodnoty nabývá číslo $t(n)$. Pokud $t(n) = 1$, dostáváme $x^{t(n)} - n = x - n$, tedy za toto n přispějeme právě jedním dělitelem stupně 1 do celkového součtu. Pokud $t(n) = 2$, a tedy $n = k^2$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, dostaneme $x^{t(n)} - n = x^2 - k^2 = (x-k)(x+k)$. Jelikož dělitele $x - k$ jsme již započítali dříve, do celkového součtu přispějeme jedním novým dělitelem, a to polynomem $x + k$.

Pokud $t(n) = a$, kde $a > 2$, přesvědčíme se, že polynom $x^{t(n)} - n = x^a - k^a$ nepřispěje žádným novým dělitelem. Pokud bude a liché, je to zřejmé: napíšeme-li si $n = k^a$ jako výše, lze ukázat, že jediný normovaný dělitel stupně 1 s celočíselnými koeficienty polynomu $x^{t(n)} - n = x^a - k^a$ je polynom $x - k$. To např. proto, že takový dělitel je tvaru $x - z$, kde z je kořen polynomu $x^a - k^a$, ale kořeny tohoto polynomu jsou jsou komplexní čísla tvaru $k(\cos(\frac{2\pi j}{k}) + i\sin(\frac{2\pi j}{k}))$ pro $j = 1, 2, ..., k$; tedy mají nenulovou imaginární část pro $j < k$.

Bude-li $t(n) = a > 2$ sudé, pak označme $a = 2l$. Polynom $x^{t(n)} - n = x^a - k^a = x^{2l} - k^{2l}$ můžeme rozložit na součin jako $(x^l + k^l)(x^l - k^l)$. Polynom $x^l - k^l$ jistě nic nepřispěje, neboť se v součinu nacházel už dříve, a lehce se rozmyslí, že pokud by nějaký (nanejvýš jeden) normovaný lineární polynom dělil $x^l + k^l$, už by byl opět obsažen dříve v součinu.

Tedy hledaný počet dělitelů odpovídá počtu čísel od 2 do 2022, pro něž platí $t(n) = 1$ nebo $t(n) = 2$. Označme P_k počet čísel od 2 do 2022 takových, že $t(n) = k$. Platí následující rovnost:

$$P_1 + P_2 = 2021 - P_3 - P_4 - P_5 - P_6 - P_7 - P_8 - P_9 - P_{10}.$$

Výpočet pravé strany si můžeme ulehčit tím, že spočítáme, kolik se mezi čísly $\{2, 3, \ldots, 2022\}$ nachází třetích, čtvrtých, pátých a sedmých mocnin. To proto, že například šesté mocniny už započítáme jako třetí a nestalo by se tedy, že bychom nějaké dělitele odečetli dvakrát. Jelikož $2^{11} > 2022$, vyšší mocniny už odčítat nemusíme. Třetích mocnin je mezi těmito čísly 11, čtvrtých 5, pátých 3 a sedmých 1.

Nyní tedy snadno spočítáme $P_1 + P_2 = 2021 - 11 - 5 - 3 - 1 = 2001$.

11. **Sociální úzkost:** Šest studentů matematiky, označme je A, B, C, D, E, F, se snaží vejít do dveří s pořadím první, druhý až šestý. Mají ale ke vstupu určité podmínky spojené s pořadím, ve kterém vejdou.

- C chce vejít na prvočíselné pozici
- Jestli B vejde před D, pak A vejde po E
- F určitě nevejde hned po C
- A vejde hned po B právě tehdy, když F vejde jako poslední
- Součet pořadí vstupu A a B musí být 7
- E vejde po A
- A vejde před B právě tehdy, když 4 dělí součet pořadí E a D

Najděte všechna možná pořadí, ve kterých můžou vstoupit. Sečtěte pořadí A ve všech řešeních, totéž pro B, C, D, E, F a výsledek zadejte jako součin těchto šesti čísel.

Výsledek: 5896935

Řešení: Nejprve si všimneme, že ze 2. a 6. podmínky vyplývá, že D musí jít vždy před B. Následně nalezneme všechna řešení vzhledem k pozicím A a B.
1) B-3., A-4.: jediné vhodné uspořádání je DCBAEF
2) B-2., A-5.: po splnění 1., 2. a 6. podmínky dostáváme DBCFAE, což však nedovoluje 3. podmínka.
3) B-1., A-6.: D musí jít před B -> nemá řešení
4) A-3., B-4.: jediné vhodné řešení je FDABCE
5) A-2., B-5.: součet E+D bude dělitelný 4 pouze, když budou na pozicích 1, 3; 3 je však jediné vyhovující místo pro C -> nelze
6) A-1., B-6.: máme 2 řešení: ACEFDB, ACDFEB
Celkem dostáváme, že součty pořadí pro jednotlivé studenty ve 4 naleznutých řešeních budou A=9, B=19, C=11, D=11, E=19 a F=15, což po vynásobení dává výsledek 5896935.

12. **Protivná funkce:** Pro každé přirozené číslo s prvočíselným rozkladem $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, kde $a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1$, definujme funkci splňující $\hat{\text{lôg}}(n) = p_1 a_1 p_2 a_2 \dots p_k a_k$ a $\text{lôg}(1) = 1$. Určete nejvyšší prvočíslo, které dělí

$$\sum_{d|N} \text{lôg}(d)$$

pro $N = 2^{69} 3^{69} 11^{420} 7^{1492}$.

Výsledek: 268843

Řešení: Uvažujme libovolné přirozené číslo n s prvočíselným rozkladem $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$. Libovolný dělitel čísla n je tvaru $d = p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}$, $0 \leq b_i \leq a_i$, tedy $\text{lôg}(d) = p_1 b_1 \cdots p_k b_k$. Proto dostaneme následující vzorec:

$$\begin{aligned} \sum_{d|N} \text{lôg}(d) &= \prod_{i=1}^{k} (1 + p_i + 2p_i + \cdots + a_i p_i) \\ &= \prod_{i=1}^{k} \left(1 + p_i \cdot \frac{a_i(a_i+1)}{2}\right). \end{aligned}$$

Pro naše číslo $N = 2^{69} \cdot 3^{69} \cdot 11^{420} \cdot 7^{1492}$ tedy dostáváme:

$$\begin{aligned} \sum_{d|N} \text{lôg}(d) &= (1 + 2 + 2 \cdot 2 + \cdots + 69 \cdot 2)(1 + 3 + \cdots + 69 \cdot 3)(1 + \cdots + 420 \cdot 11)(1 + \cdots + 1492 \cdot 7) \\ &= \left(1 + 2 \cdot \frac{69 \cdot 70}{2}\right)\left(1 + 3 \cdot \frac{69 \cdot 70}{2}\right)\left(1 + 11 \cdot \frac{420 \cdot 421}{2}\right)\left(1 + 7 \cdot \frac{1492 \cdot 1493}{2}\right) \end{aligned}$$

Pak už snadno zjistíme, že největší prvočíslo dělí poslední závorku, a je to 268843.

13. **Lidobodi:** Jenda a Čenda jsou lidobodi a nejlepší kamarádi. Oba dva žijí na stejném jednotkovém čtverci, tedy se můžou pohybovat jen po stranách tohoto čtverce, a oba dva mají na tomto čtverci svůj dům, přičemž jejich domy jsou také body. Jenda zjistil, že když se k Čendovi vydá ze svého domu jedním směrem, bude cesta mít $\frac{2}{3}$ délky cesty, která vede z jeho domu k Čendovi druhým směrem. Jaká je největší přímá vzdálenost, ve které se domy kamarádů mohou nacházet?

    Výsledek: $\frac{\sqrt{34}}{5} \approx 1.16619$

    Řešení: Obvod čtverce: $o = 4$ musí být rozdělen na 5 stejně dlouhých částí ($\frac{4}{5}$), které potom rozdělíme v poměru $2 : 3$ ($\frac{8}{5} = \frac{12}{5} \cdot \frac{2}{3}$).
    Nejdelší možná vzdálenost bude, když se bude jeden dům nacházet na vrcholu čtverce. Už jsme určili délku cest po čtverci. Výsledná délka bude ve tvaru $\sqrt{x^2 + y^2}$, kdy $x + y = \frac{8}{5}$. Největší výsledek bychom dostali, kdyby např. $y = 0$ a domy by ležely na jedné straně čtverce. Avšak $\frac{8}{5} > 1$, proto to není možné. Postupně, když budeme x zmenšovat a bude se nám y zvětšovat, přímá vzdálenost se bude zmenšovat (do chvíle, než $x = y$). Největší možná vzdálenost bude tedy v případě $x = 1, y = \frac{3}{5}$ a to: $\sqrt{1^2 + (\frac{3}{5})^2} = \frac{\sqrt{34}}{5}$.

14. **Přelidněný ostrov:** Na ostrově žije 200 100 050 025 domorodců, každý z nich buď mluví pravdu, nebo lže. Milan každému z nich přiřadil číslo: prvnímu jedničku, druhému dvojku atd. Každý domorodec pak řekl: „Všichni, kdo mají menší číslo než já, lžou, kromě k z nich, kde k je počet nul v desítkovém zápisu mého čísla.“ Kolik z nich mluví pravdu?

    Výsledek: 12

    Řešení: První domorodec mluví pravdu, protože neexistuje nikdo s menším číslem, a tedy všichni kromě 0 z nich (tedy všichni) lžou. Tím pádem druhý lže, protože říká, že domorodec 1 lže, což není pravda. Další, který mluví pravdu, je až domorodec číslo 10, který má ve svém desítkovém zápisu jednu nulu, a tedy říká, že právě jeden s menším číslem mluví pravdu, což je pravda (jedna se o domorodce čísla 1). Zobecněním této úvahy dojdeme k závěru, že pravdu mluví domorodci 1, 10, 100, 1000 atd., kterých je na ostrově celkem 12.

15. **Vtipný trojúhelníčky:** Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s celými délkami stran $|AB| > |AC| > |BC|$ a obsahem nejvýše 100, pro které lze číslo $\tan(|\sphericalangle BAC|)$ vyjádřit jako podíl dvou přirozených čísel lišících se o 7. Jako řešení zadejte součet všech obvodů těchto trojúhelníků.

    Výsledek: 190

    Řešení: Tangens úhlu u vrcholu A můžeme také zapsat jako $\frac{|BC|}{|AC|}$. Hledáme tedy takové Pythagorejské trojice, pro které existuje vyjádření $\frac{k \cdot |BC|}{k \cdot |AC|}, k \in (\mathbb{N})$ takové, že $k \cdot |BC| - k \cdot |AC| = 7$.

    Existují pouze 3 základní Pythagorejské trojice (takové, že každé dvě čísla z této trojice jsou nesoudělná), pro které platí $\frac{|AC| \cdot |BC|}{2} \leq 100$. Jsou to trojice: $\{3, 4, 5\}; \{5, 12, 13\}; \{8, 15, 17\}$.

    V první trojici se čísla liší o 1 (stačí zlomek rozšířit číslem 7), v druhé a třetí je jejich rozdíl rovnou 7, všechny tři tedy budou řešením zadané úlohy.

    Nesmíme ovšem zapomenout na násobky těchto trojic, pro které jistě také zadaný podílový tvar nalezneme (jejich podíl je jen rozšířením zlomků podílů pro základní trojice). Zde jsou všechny, jež vytvoří pravoúhlý trojúhelník s obsahem menším než 100: $\{6, 8, 10\}; \{9, 12, 15\}; \{12, 16, 20\}$.

    Nyní nám stačí všechny hodnoty z vypsaných Pythagorejských trojic sečíst a dostáváme výslednou hodnotu 190.

16. **Zrádný poměr:** V kartézské souřadné soustavě je dán trojúhelník s vrcholem A v bodě $[0,0]$, vrcholem B v bodě $[1,0]$ a vrcholem C v bodě $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$. Nalezněte vnitřní bod X tohoto trojúhelníka takový, že obsahy trojúhelníků ACX, ABX a BCX budou v poměru $1:2:3$. Jako výsledek zadejte součin x-ové a y-ové souřadnice bodu X.

Výsledek: $\frac{\sqrt{3}}{18} \approx 0.09623$

Řešení: Platí

$$3 \cdot S_{\triangle AXC} = 2 \cdot S_{\triangle ABX} = 1 \cdot S_{\triangle BCX}.$$

Trojúhelník ABC je rovnostranný – to snadno ověříme výpočtem vzdálenosti všech dvojic vrcholů, všechny nám vyjdou rovny 1. Každý z trojúhelníků ACX, ABX, BCX má tedy jednu stranu délky jedna; v každém z nich se jedná o stranu protější bodu X. Jejich výšky příslušící vrcholu X tedy musejí být v zadaném poměru $1:2:3$, to plyne přímo z toho, že jsou v tomto poměru jejich obsahy a mají jednu stranu stejné délky.

$S_{\triangle ABX} = \frac{1}{2} \cdot (|AB| \cdot y) = \frac{y}{2}$, kde y značí výšku příslušnou straně AB (tato výška odpovídá y-ové souřadnici bodu X).

$$S_{\triangle ACX} = \frac{1}{2} \cdot (|AC| \cdot v_{AC}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{y}{2} = \frac{y}{4}$$
$$S_{\triangle BCX} = \frac{1}{2} \cdot (|BC| \cdot v_{BC}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} y = \frac{3y}{4}.$$

Sečtením obsahů všech tří menších trojúhelníků získáme hodnotu rovnou obsahu celého trojúhelníku, tedy:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ACX} + S_{\triangle ABX} + S_{\triangle BCX} &= S_{\triangle ABC} \\ \frac{y}{4} + \frac{y}{2} + \frac{3y}{4} &= \frac{1}{2} \cdot (|AB| \cdot v_{AB}) \\ \frac{3y}{2} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

Nechť χ je rovnoběžka s AB procházející bodem X, X_a a X_b jsou průniky χ se stranou AC, resp. BC, a A_x a B_x jsou paty kolmic na stranu AB vedené body X_a, resp. X_b.

Pomocí Pythagorovy věty a znalosti y snadno dopočítáme, že výška $\triangle CX_aX_b$ je délky $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, a tedy délka strany $\triangle CX_aX_b$ je $\frac{2}{3}$. $|X_aX|$ a $|X_bX|$ jsou v poměru $1:3$, jelikož jsou v tomto poměru i délky výšek spuštěných z X do AC, BC. Tedy $|X_aX| = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$. Z rovnostrannosti trojúhelníka platí $|AA_x| = |BB_x|$; dále $|A_xB_x| = |X_aX_b|$, tedy $|AB| = 1 = 2|AA_x| + \frac{2}{3}$, proto $|AA_x| = \frac{1}{6}$. Dohromady $x = |AA_x| + |X_aX| = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Výsledný součin je tedy $x \cdot y = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{18}$.

17. **Posloupnosti k nakousnutí:** Definujme posloupnosti $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ tak, že $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}$, $b_1 = 1, b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pro každé $n \geq 1$ platí

$$a_{n+2} = a_{n+1} b_n + b_{n+1} a_n, \qquad b_{n+2} = b_{n+1} b_n - a_{n+1} a_n.$$

Pro $N = 3^{58} \cdot 10$ určete $a_N + 2b_N$.

Výsledek: $\frac{1}{2} + \sqrt{3} \approx 2.23205$

Řešení: Z hodnot pro a_1, a_2, b_1, b_2 nás napadne, že by se mohlo jednat o sinus a kosinus. Když se podíváme na rovnosti, které mají posloupnosti splňovat, zjistíme, že se jedná vlastně o součtový vzorec pro $\sin(x+y)$ a $\cos(x+y)$.

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

Můžeme si všimnout, že $a_1 = \sin(0)$, $a_2 = \sin(\frac{\pi}{6})$, $b_1 = \cos(0)$ a $b_2 = \cos(\frac{\pi}{6})$.

Obě posloupnosti začínají se stejnými argumenty, budou tedy mít i nadále stejné argumenty. Ze součtových vzorců plyne, že a_n bude rovno sinu součtu argumentů předchozích dvou členů. Stejně tak b_n je rovno kosinu součtu argumentů předchozích dvou členů. Povšimněme si podobnosti s Fibonacciho posloupností, kde každý člen je součtem dvou předchozích.

Vzhledem k tomu, jak máme zadaná a_1, a_2, b_1, b_2, tak dostaneme, že $a_n = \sin(\frac{\pi}{6} \cdot F_{n-1})$, kde F_n je n-tý člen Fibonacciho posloupnosti. Člen, který potřebujeme, má pořadí $n-1$, protože naše posloupnost argumentů začíná: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \ldots$, ale Fibonacci začíná: 1, 1, 2, 3, 5 ....

Nyní potřebujeme najít nejmenší periodu t, se kterou se hodnoty posloupností opakují, tedy $F_n \cdot \frac{\pi}{6} = F_{n+t} \cdot \frac{\pi}{6}$ modulo 2π. Hledáme tedy nejmenší Fibonacciho číslo F_n, které bude dělitelné 12, abychom dostali argument $2\pi \cdot k$ pro nějaké celé k. Další člen F_{n+1} by měl dávat zbytek 1 po dělení 6, aby dalším argumentem bylo $k \cdot \frac{\pi}{6}$. Zjistíme, že nejmenším takovým číslem je F_{24}. Tedy 24 je nejmenší perioda, a proto chceme zjistit, jaký dává zbytek po dělení 24 číslo $3^{58} \cdot 10$. Například pomocí Wolframu určíme, že je to 18, a proto argument u a_N a b_N bude $F_{17} \cdot \frac{\pi}{6}$, což je $\frac{\pi}{6}$ modulo 2π. Výsledek tedy bude

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

.

18. **Pravděpodobná přátelství:** Na Přírodovědecké fakultě se koná zahradní párty od 14:00 do 18:00. David by rád potkal svých 5 kamarádek: Anetu, Bereniku, Cecílii, Danielu a Emmu. Bohužel ale může na párty být pouze od 16:00 do 17:00. Každá dívka si rovnoměrně náhodně zvolila časy t_1 a t_2 z intervalu 14:00 a 18:00, přišla v dřívějším z těchto náhodně zvolených časů a odešla v pozdějším. Jaká je pravděpodobnost, že David potkal alespoň jednu z nich?

Výsledek: $\frac{1045451}{1048576}$

Řešení: Prvně si vyřešíme pravděpodobnost, že David NEpotká jednu z žen. Ona tedy musí přijít i odejít dřív než David - pravděpodobnost $\frac{1}{4}$ - nebo přijít a odejít později než David - pravděpodobnost $\frac{1}{16}$. To zjistíme tak, že si nakreslíme čtverec všech možných příchodů a odchodů, omezíme se pouze na jeho vrchní část a spočítáme obsah množin, které značí požadovaný jev. Celkově tedy dostáváme $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$, což je pravděpodobnost, že nepotká jednu z žen. Pravděpodobnost, že nepotká žádnou z žen tedy bude $(\frac{5}{16})^5$. Pro pravděpodobnost, že potká alespoň jednu ženu, tedy dostáváme:

$$1 - \left(\frac{5}{16}\right)^5 = \frac{1045451}{1048576}$$

.

19. **Desetimístné číslo:** Představme si desetimístné číslo, kde první číslice udává počet nul v čísle, druhá počet jedniček apod. Najděte nejmenší takové číslo.

Výsledek: 6210001000

Řešení: Snadno určíme, že na 8. až 10. pozici nemůže být žádné nenulové číslo. Postup této úvahy předvedeme na 9. pozici (zbytek je obdobný). Zřejmě nemůže být 2 a více osmiček v celém čísle, jelikož by takto musely být alespoň dvě různé cifry na osmi pozicích. Pokud by byla na 9. pozici cifra 1, musela by se někde v čísle vyskytovat cifra 8. Jediný vhodný kandidát na pozici této cifry je 1. pozice, v čísle by tedy muselo být 8 nul. To ale není možné, jelikož by byla nula i na 2. pozici, ačkoliv počet cifer 1 v čísle je již nenulový. Obdobnými úvahami dojdeme k jedinému řešení a to je číslo 6210001000.

20. **Zábava se soustavami:** V osmnáctkové soustavě řešte následující rovnici pro cifry $a, b, c, d \in \{0, 1, \ldots, 17\}$:

$$\overline{ab}_{18} \cdot \overline{ba}_{18} = \overline{cdcd}_{18}.$$

Jako odpověď zadejte součet všech možných různých hodnot $\overline{cdcd}_{18}$ v desítkové soustavě.

Výsledek: 93600

Řešení: Nejjednodušší způsob, jak vyřešit tuto úlohu, je zapsat si rovnici ve tvaru

$$(18a + b) \cdot (18b + a) = 18^3c + 18^2d + 18c + d$$

Rovnici poupravíme a získáme $(18^2 + 1)ab + 18(a^2 + b^2) = (18^2 + 1)(18c + d)$. Jednoduchou úvahou o dělitelnosti pak získáváme podmíku, že $18^2 + 1$ musí dělit číslo $a^2 + b^2$. Protože a, b jsou číslice v osmnáctkové soustavě, musí platit $a^2 < 18^2$, tedy z předchozích dvou podmínek nutně plyne $a^2 + b^2 = 18^2 + 1$. Z tohoto lehce získáme jediná dvě řešení pro $\overline{cdcd}_{18}$, v desítkové soustavě to jsou čísla 39000 a 54600, jejichž součet 93600 je řešením úlohy.

21. **Součiničetitel:** Vojta má množinu $M = \{a, b, c\}$ tří přirozených čísel. Rozhodl se, že spočítá její součiničetitel jako $S = abc(a + b)(a + c)(b + c)(a + b + c)$. Když to Marťa uviděl, tak zakřičel: "HAHAHA, je ti ale jasný, že každej ví, že součiničetitel tvý množiny je dělitelnej přirozeným číslem k?" Jaké největší k mohl Marťa zakřičet, aby jeho tvrzení bylo pravdivé pro každou M?

Výsledek: 24

Řešení: Tuto úlohu vyřešíme pomocí zbytkových tříd. Začneme u nejmenšího prvočísla a budeme zkoumat, zda a popřípadě v jaké mocnině dělí součiničetitel. Poté prozkoumáme větší prvočísla. Projetím všech relevantních možností zbytků po dělení 2 čísel a, b, c (díky symetrii nemusíme počítat všechny možnosti) zjistíme, že nejvyšší mocnina dvojky, která součiničetitel dělí vždy, je 8. Projetím všech možností pro zbytky po dělení 3 zjistíme, že nejvyšší mocnina trojky, která součiničetitel dělí vždy, je 3. Kdybychom si vzali libovolné prvočíslo p větší než 3, mohli bychom vzít tři čísla a, b, c tak, aby každé z nich dávalo zbytek 1 po dělení p. Díky tomu, že $p > 3$ je nyní jasné, že součiničetitel čísel a, b, c v tomto případě určitě nebude dělitelný prvočíslem p. Tedy nejvyšší číslo, pro které s jistotou můžeme říct, že dělí součiničetitel tří libovolných přirozených čísel, je $8 \cdot 3 = 24$.

22. **Závodník:** Závodník běží na okruhu délky 290 metrů první kolo, když tu uvidí lišáka a zeptá se ho, na kolikátém metru se nachází (jedná se o celé číslo). Lišák odpoví: „Až uběhneš od místa, kde se momentálně nacházíš, šestkrát tolik, kolik jsi zatím uběhl, budeš na 50. metru.“ Na kolikátém metru se závodník nachází?

Výsledek: 90

Řešení: Lišák potká závodníka na x. metru. Protože je závodník v prvním kole, uběhl zatím x metrů. Když uběhne ještě šestkrát tolik, uběhne celkem $7x$ metrů. Bude na 50. metru, tedy uběhl $290k + 50$ metrů, kde k je celočíselné. Dostaneme tedy rovnici, na kterou se podíváme $mod(7)$:

$$\begin{aligned} 7x &= 290k + 50 \\ 0 &= 3k + 1 \\ 6 &= 3k \\ k &= 2 \end{aligned}$$

Tedy víme, že $7x = 630$ a závodník je na 90. metru.

23. **Komplexní rovnice:** Přirozené číslo n nazveme "husťácké a drsné", pokud existuje komplexní číslo x s absolutní hodnotou 1 splňující

$$x^n + 2x^{n-1} + 3x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Kolik existuje husťáckých a drsných čísel, která jsou nejvýše 2022?

Výsledek: 674

Řešení: Připomeňme, že pro komplexní číslo $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ máme definované číslo *komplexně sdružené* $\bar{z} := a - bi$. *Absolutní hodnota* komplexního čísla je definovaná jako $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.

Máme-li polynom $p(x)$ s reálnými koeficienty, tak platí, že pokud má komplexní kořen z, je kořenem i komplexně sdružené číslo $\bar{z}$. Pokud je přirozené číslo n hustácké a drsné, znamená to, že polynom $p(x) = x^n + 2x^{n-1} + 3x^2 + 2x + 1$ má kořen z s absolutní hodnotou jedna, tzn. $z\bar{z} = 1$. To ovšem na základě výše uvedeného znamená, že kořenem tohoto polynomu je i číslo $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Jestliže tedy platí $p(z) = p(\frac{1}{z}) = 0$, musí být z rovněž kořenem polynomu $x^n p(\frac{1}{x}) = x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + 2x + 1$. Celkem tedy můžeme říci: **je-li číslo n husťácké a drsné, existuje komplexní řešení následující soustavy, které má absolutní hodnotu rovnu jedné:**

$$x^n + 2x^{n-1} + 3x^2 + 2x + 1 = 0, \tag{1}$$

$$x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + 2x + 1 = 0. \tag{2}$$

Odečtením prvního řádku od druhého a drobnou úpravou dostáváme jedinou rovnici $x^{n-4} = 1$. Tedy oním řešením je komplexní číslo ω, které splňuje $\omega^{n-4} = 1$ (takové číslo má jistě absolutní hodnotu rovnu jedné). Potom ale dostáváme $\omega^n = \omega^4$, $\omega^{n-1} = \omega^3$, tedy jelikož ω je kořenem polynomu $x^n + 2x^{n-1} + 3x^2 + 2x + 1$, je i kořenem polynomu $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2$. Tedy $\omega = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Důležitější ale je, že jelikož $(x^2 + x + 1)(x - 1) = x^3 - 1$, máme $\omega^3 = 1$ a navíc 3 je nejmenší k takové, že $\omega^k = 1$. Ovšem nezapomeňme, že rovněž $\omega^{n-4} = 1$! Z toho jednoduše plyne následují poznatek: **číslo n je husťácké a drsné, právě když 3 dělí $n - 4$.** V opačném případě bychom dostali spor s existencí čísla ω výše, naopak pro n splňující tyto podmínky si snadno ověříme, že libovolné z čísel $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ splňuje podmínky definice v zadání.

Chceme-li tedy určit všechna husťácká a drsná čísla od 1 do 2022, stačí určit, která čísla v tomto rozmezí splňují podmínku $3|(n - 1)$, která je jistě ekvivalentní s podmínkou $3|(n - 4)$. Zřejmě pro libovolné k platí, že mezi čísly $3k - 2, 3k - 1, 3k$ je takové právě jedno, a to číslo $3k - 2$. Jelikož $2022 = 3 \cdot 674$, dostáváme, že takových čísel je 674 (jelikož $\{1, ..., 2022\} = \bigcup_{k=1}^{674} \{3k - 2, 3k - 1, 3k\}$).

24. **O čtyřech vrcholech:** Mějme v rovině čtyři body A, B, C, D, které tvoří tětivový čtyřúhelník takový, že polopřímky AD, BC mají průnik. Platí $|AB| = 1, |\sphericalangle CAB| = \left(\frac{1}{2022}\right)^\circ$ a $|\sphericalangle DBA| = \left(\frac{20219}{2022}\right)^\circ$. Dále označme průsečík polopřímek AD a BC jako E. Nechť $|\sphericalangle AEB| = 10°$. Určete velikost poloměru kružnice opsané bodům A, B, C, D.

    Výsledek: $\frac{1}{2}$

    Řešení:

    (a) Označme F průsečík úseček AC a BD, $\gamma = |\sphericalangle BAC|$, $\delta = |\sphericalangle ABD|$. Pak $|\sphericalangle BFA| = 170°$, neboť součet úhlů v trojúhelníku je $180°$ a $\gamma + \delta = 10°$.

    (b) $|\sphericalangle BFA| + |\sphericalangle AFD| = 180° \implies |\sphericalangle AFD| = \gamma + \delta$

    (c) $|\sphericalangle BFA| = |\sphericalangle CFD| = 170°$ – vrcholové úhly

    (d) Označme $\alpha := |\sphericalangle DAF|$, $\beta := |\sphericalangle ADF|$, pak $\alpha + \beta = 170°$ (ze součtu úhlů v $\triangle AFD$)

    (e) $|\sphericalangle ADF| + |\sphericalangle FDE| = 180°$; $|\sphericalangle ADF| = \beta$, tedy $|\sphericalangle FDE| = \alpha + 10°$

    (f) $\sphericalangle ADB$ a $\sphericalangle ACB$ jsou obvodové úhly příslušné tětivě AB, tedy $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| = \beta$

    (g) $\sphericalangle DAC$ a $\sphericalangle DBC$ jsou obvodové úhly příslušné tětivě CD, tedy $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DBC| = \alpha$

    (h) $|\sphericalangle BCF| + |\sphericalangle FCE| = 180°$; $|\sphericalangle BCF| = \beta$, tedy $|\sphericalangle FCE| = \alpha + 10°$

    (i) Součet vnitřních úhlů čtyřúhelníku je $360°$, $|\sphericalangle DEC| + |\sphericalangle DFC| = 10° + 170° = 180°$, tedy $|\sphericalangle FDE| + |\sphericalangle FCE| = 2\alpha + 20° = 180°$; $\alpha = 80°$

    (j) $\beta = 180° - (\alpha + 10°) = 90°$

    (k) Obvodový úhel příslušící tětivě AB je *pravý*, tedy kružnice opsaná A, B, C, D je Thaletova kružice zkonstruovaná nad AB, tedy její poloměr je $\frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{1}{2}$

25. **Gloglogloglo:** Určete hodnotu výrazu

$$(2022^{2022})! \cdot \log_2(\sqrt{2022}) \cdot \prod_{n=3}^{2022^{2022}} \prod_{k=n}^{n^n} \log_k(k - 1)$$

Výsledek: $\frac{1}{2022}$

Řešení: Vyhodnoťme nejprve výraz $\prod_{k=n}^{2022^{2022}} \log_k(k-1)$. Platí pravidlo $\log_a(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)}$, tedy

$$\prod_{k=n}^{n^n} \log_k(k-1) = \prod_{k=n}^{n^n} \frac{\log(k-1)}{\log(k)}$$

Součin zlomků si můžeme přepsat jako součin čitatelů jednotlivých zlomků vydělený součinem jmenovatelů:

$$\prod_{k=n}^{n^n} \frac{\log(k-1)}{\log(k)} = \frac{\prod_{k=n}^{n^n} \log(k-1)}{\prod_{k=n}^{n^n} \log(k)}$$

Upravme čitatel „posunutím indexu“:

$$\prod_{k=n}^{n^n} \log(k-1) = \prod_{k=n-1}^{n^n-1} \log(k)$$

Takto přepsaný jmenovatel nám pomůže při úpravách výsledného výrazu, dostáváme:

$$\frac{\prod_{k=n-1}^{n^n-1} \log(k)}{\prod_{k=n}^{n^n} \log(k)} = \frac{\log(n-1) \cdot \prod_{k=n}^{n^n-1} \log(k)}{\log(n^n) \prod_{k=n}^{n^n-1} \log(k)} = \frac{\log(n-1)}{\log(n^n)} = \frac{\log(n-1)}{n \cdot \log(n)}$$

Celkem tedy dostaneme:

$$(2022^{2022})! \cdot \log_2(\sqrt{2022}) \cdot \prod_{n=3}^{2022^{2022}} \frac{\log(n-1)}{n \cdot \log(n)}$$

$$(2022^{2022})! \cdot \prod_{n=3}^{2022^{2022}} \frac{\log(n-1)}{n \cdot \log(n)} = (2022^{2022})! \cdot \prod_{n=3}^{2022^{2022}} \frac{1}{n} \cdot \prod_{n=3}^{2022^{2022}} \frac{\log(n-1)}{\log(n)} =$$

$$= (2022^{2022})! \cdot \frac{2}{(2022^{2022})!} \cdot \prod_{n=3}^{2022^{2022}} \frac{\log(n-1)}{\log(n)} = 2 \cdot \prod_{n=3}^{2022^{2022}} \frac{\log(n-1)}{\log(n)}$$

Zcela analogicky, jako jsme $\prod_{k=n}^{n^n} \log_k(k-1)$ upravili na $\frac{\log(n-1)}{n \cdot \log(n)}$, odvodíme z $\prod_{n=3}^{2022^{2022}} \frac{\log(n-1)}{\log(n)}$ výraz $\frac{\log(2)}{\log(2022^{2022})}$. Postupně tedy jsme získali:

$$(2022^{2022})! \cdot \log_2(\sqrt{2022}) \cdot 2 \cdot \prod_{n=3}^{2022^{2022}} \left(\prod_{k=n}^{n^n} \log_k(k-1) \right) = \log_2(\sqrt{2022}) \cdot 2 \cdot \frac{\log(2)}{\log(2022^{2022})}$$

Ze základních vlastností exponentů a logaritmů pak získáme výsledek:

$$\log_2(\sqrt{2022}) \cdot 2 \cdot \frac{\log(2)}{\log(2022^{2022})} = \frac{\log(\sqrt{2022})}{\log(2)} \cdot 2 \cdot \frac{\log(2)}{\log(2022^{2022})} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \log(2022)}{2022 \cdot \log(2022)} = \frac{1}{2022}$$

26. **Osud:** Luke napsal na tabuli čísla $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2023}$. Mia pak provádí následující proces: V každém kroku vybere dvě z čísel a, b právě na tabuli, smaže je a místo nich napíše číslo $ab + a + b$. Takto postupuje, až dokud na tabuli nezbyde jediné číslo. Ať $\frac{p}{q}$ je v základním tvaru nejvyšší možná hodnota, kterou může Mia na tabuli napsat. Jaká je hodnota $p + q$?

Výsledek: 2024

Řešení: Všimněme si, že $ab + a + b = (a + 1)(b + 1) - 1$. To nás navádí na následující úvahu. Dejme tomu, že v nějaký moment je na tabuli k členů $a_1, \dots, a_k$. Ukážeme, že veličina

$$S = (a_1 + 1) \cdots (a_k + 1)$$

je invariantní. (Poznamenejme, že počet činitelů v S klesá)

Smažme dvě čísla, BÚNO a_1, a_2 a nahraďme je číslem $a_1a_2 + a_1 + a_2$. Poté v S všechny činitele mimo první dva zachovají, z těmi prvními se stane následující

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \longmapsto (a_1a_2 + a_1 + a_2) + 1 = (a_1 + 1)(a_2 + 1).$$

Součin S je tak zachován. Speciálně poslední číslo na tabuli je vždy rovno

$$S - 1 = (1 + 1)\left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2023} + 1\right) - 1 = 2023 = \frac{2023}{1}.$$

Odpověď je tedy 2024.

27. **Prvočíselné sudoku:** Do mřížky 5x5 jsou rozmístěna čísla 2, 3, 5, 7, 11 tak, že v každém řádku i sloupci je každé právě jednou. Dále platí, že čtverec 2x2 v levém horním rohu má součet 10, čtverec 2x2 v pravém horním rohu má součet 28, čtverec 2x2 v pravém dolním rohu má součet 19 a čtverec 3x3 přímo uprostřed (tj. nedotýká se okraje mřížky) obsahuje číslo 11 tolikrát, kolik je číslo v jeho středu. Určete spodní řádek mřížky; zapište jej jako šesticiferné číslo, podle jeho obsahu čteného zleva doprava.

    Výsledek: 117532

    Řešení: Čtverec vlevo nahoře má součet 10; jediný způsob, jak tento součet dostat podle pravidel, je $2 + 2 + 3 + 3$. Čtverec vpravo nahoře tedy nemůže obsahovat ani dvojky, ani trojky, a je tedy tvořen čísly $5 + 5 + 7 + 11$. Konečně čtverec vpravo dole, který neobsahuje pětky a nanejvýše jednu sedmičku a jednu jedenáctku, musel vzniknout jako $2 + 3 + 3 + 11$. Jediné možné místo, kam umístit poslední zbývající trojku, je přímo doprostřed mřížky.

    Je vidět, že na dvou zatím neomezených polích mezi čtverci na prvních dvou řádcích jsou právě čísla 5 a 11. V prostředním sloupci jinde být jedenáctka tedy nemůže; současně ve čtverci 3×3 uprostřed mřížky jsou tři jedenáctky, čili v tomto sloupci je jedenáctka v prostředních třech buňkách. To ji jednoznačně umisťuje. Obdobně, v prostředním řádku je jedenáctka v levých dvou polích, a je stejným způsobem jednoznačně umístěna. Poslední jedenáctka je nutně v pravém dolním rohu zmíněného čtverce 3×3; po jejím zapsání je úloha dořešena triviálně. (Pozn.: existují dvě možnosti vyplnění čísel do mřížky tak, aby bylo zadání splněno; liší se rozmístěním dvojek a trojek v levém horním čtverci. Na řešení úlohy nemá vliv, která je zvolena, je-li vůbec nějaká.)

28. **Hromada polynomů:** Polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, lze napsat jako součet 1012 normovaných polynomů s koeficienty z $\mathbb{R}$ a kořeny právě $1, 2, ..., 2022$ (každé z těchto čísel je kořenem právě jednou). Určete největší možný součet $a + b + c$.

    Výsledek: 1376796651

    Řešení: Všechny polynomy jsou normované, tedy mohou být nanejvýš druhého stupně (kdyby byl nějaký normovaný polynom vyššího stupně, nebyl by polynom $p(x)$ ze zadání kvadratický). Z tohoto důvodu můžou být nanejvýš 2 ze sčítaných 1012 polynomů lineární (jinak by nám zbylo nějaké číslo z množiny $\{1, 2, \dots, 2022\}$, které by nebylo kořenem žádného polynomu). Dále je evidentní, že každý lineární polynom bude do výsledného součtu $a + b + c$ přičítat vždy nekladné číslo, protože bude tvaru $x - k$, kde $k \in \{1, 2, \dots, 2022\}$. Proto chceme v našem součtu co nejvíce polynomů druhého stupně. Každý polynom 2. stupně má dva kořeny, v našem případě jsou to dva různé kořeny. Nejvíc polynomů druhého stupně můžeme vzít 1011, protože pak budou mít celkem požadovaných 2022 kořenů. Zbyde nám jeden polynom, který je normovaný a nemá kořen, tedy konstantní polynom 1.

    Chceme dostat co největší součet $a+b+c$, tedy do něj chceme dostat co největší součiny z absolutních koeficientů polynomů 2. stupně. Proto budou tyto polynomy vypadat takto: $(x-2022)\cdot(x-2021), (x-2020) \cdot (x - 2019), (x - 2018) \cdot (x - 2017), \dots$ Že je toto rozložení kořenů optimální, bychom mohli dokázat i například pomocí permutační nerovnosti.

Dostaneme, že a je $1011 \cdot 1$, jelikož přičteme jedničku za každý normovaný polynom 2. stupně. Z Viètových vztahů dále získáváme, že b je součet všech čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 2022\}$ s opačným znaménkem, a že c je součet součinů dvou po sobě jdoucích čísel od 1 do 2022, plus 1 za konstantní polynom. Celkem získáváme řešení úlohy

$$1011 - \left(\sum_{n=1}^{2022} n\right) + \left(\sum_{n=1}^{1011} (2n-1) \cdot (2n)\right) + 1 = 1376796651$$

.

29. **Vzdálenosti:** Kouma dal Ňoumovi k narozeninám čtyřrozměrnou krychli s délkou strany 1. Jaká je průměrná vzdálenost dvou jejích různých vrcholů?

Výsledek: 1.42757

Řešení: Kdybychom chtěli zjistit, jaká je průměrná vzdálenost dvou vrcholů klasické trojrozměrné krychle, mohli bychom sečíst vzdálenosti všech dvojic vrcholů a vydělit počtem těchto dvojic. Stačí si ale uvědomit, že situace je symetrická, a proto si můžeme zafixovat jeden vrchol a spočítat průměrnou vzdálenost tohoto vrcholu od všech ostatních. Stejně tak můžeme postupovat u čtyřrozměrné krychle. Nyní je jen potřeba vytvořit si nějaký mentální obrázek. Úsečka (jednorozměrná "krychle") má 2 krajní body, čtverec (dvojrozměrná "krychle") má 4, trojrozměrná krychle 8 a čtyřrozměrná tento vzor dodrží, tedy bude mít 16 vrcholů. Krychle ze zadání je jednotková, a tedy můžeme její vrcholy reprezentovat právě jako čtveřice nul a jedniček (stejně tak, jako vrcholy jednotkového čtverce můžeme jednoznačně reprezentovat jako dvojice nul a jedniček a vrcholy jednotkové krychle můžeme jednoznačně reprezentovat jako trojice nul a jedniček). Zafixujeme-li si nyní například bod reprezentovaný čtveřicí $[0, 0, 0, 0]$, stačí nám pomocí Pythagorovy věty spočítat jeho vzdálenost od všech ostatních 15 bodů, tyto vzdálenosti sečíst a vydělit 15, čímž získáme výsledek, který je $\frac{4+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2}{15} \approx 1.427565$, po zaokrouhlení dostaneme 1.42757.

30. **Ovčáci čtveráci:** Čtyři bratři našli kouzelnou studnu. Když se do ní hodí k zlatých mincí, dostanou jich zpátky k^4. Má to ale háček: ze získaných mincí je potřeba vrátit právě jednu zpět do studny a zbytek rozdělit rovným dílem mezi všechny lidi, kteří se u studny zrovna nachází, jinak všechny mince zmizí. Studnu nelze použít opakovaně.

Bratři se začali dohadovat, s kým vším se rozdělí - každý chtěl mezi ně přibrat jiný nenulový počet lidí. Shodli se ovšem na tom, že pro návrh každého bratra platí: Nechť a je počet dílů, na které nabyté jmění rozdělí (tedy nechť se u studny nachází a lidí, kde $a > 4$). Pak existují právě čtyři přirozená čísla menší než a, která jsou s a nesoudělná.

Určete největší počet mincí, které mohli do studny hodit, aby se mohli řídit návrhem libovolného bratra a mince nezmizely. Bratři mají k dispozici 66 zlatých mincí.

Výsledek: 61

Řešení: Připomeňme (zesílenou) Eulerovu větu: pro přirozená čísla a, m platí $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ právě tehdy, když a, m jsou nesoudělná. ($\varphi(n)$ je Eulerova funkce. Udává počet přirozených čísel menších než n, která s ním jsou nesoudělná.)

Povšimněme si, že možné počty lidí $m_1, \ldots, m_4$, mezi které chtějí bratři rozdělit mince, splňují ze zadání $\varphi(m_i) = 4$. Snadno pak najdeme, že jde o čísla $5, 8, 10, 12$.

Hledáme nyní největší přirozené $k \leq 66$ takové, že $k^4 \equiv 1 \pmod{m_i}$ pro $m_i \in \{5, 8, 10, 12\}$. Na to tedy musí být podle Eulerovy věty k nesoudělné se všemi čtyřmi těmito čísly. Největší takové je právě 61.

31. **Super součet:** Označme $\mathcal{A}_n$ množinu všech konečných posloupností $a_1, a_2, \dots, a_n$ délky právě n, kde $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Pro posloupnost $A : (a_i)_{i=1}^n \in \mathcal{A}_n$ označme její "super součet"jako

$$s(A) = 1 + a_1 + a_1a_2 + \ldots + a_1a_2 \cdots a_n.$$

Kuba si zvolí $n \in \mathbb{N}$ a poté náhodně vybere posloupnost $A \in \mathcal{A}_n$. Označme $P_n(A)$ pravděpodobnost, že super součet posloupnosti A je sudý. Ke kterému číslu se bude $P_n(A)$ přibližovat, pokud bude Kuba volit větší a větší n?

Výsledek: $\frac{1}{3}$

Řešení: Evidentně platí, že je-li v posloupnosti $A : (a_i)_{i=1}^n \in \mathcal{A}_n$ první sudé číslo na k-té pozici (tedy nejmenší index takový, že a_i je sudé, je k), pak budou všechny sčítance v super součtu od $a_1a_2 \cdots a_k$ počínaje sudé a všechny předešlé sčítance v super součtu bude liché. Záleží nám tedy výhradně na pořadí prvního sudého čísla v posloupnosti $(a_i)_{i=1}^n$. Pokud bude první sudé číslo na sudé pozici, pak bude super součet sudý. Pokud bude první sudé číslo na liché pozici, bude super součet naopak lichý. Hledáme tedy, jaká je pravděpodobnost, že v nějaké konečné posloupnosti z množiny $\mathcal{A}_n$ bude první sudé číslo na sudé pozici. To bude součet všech pravděpodobností, že se první sudé číslo nachází na nějaké konkrétní sudé pozici. Kdyby mělo být například druhé, bude tak s pravděpodobností $\frac{1}{4}$, jelikož první musí být liché a druhé sudé. Kdyby mělo být čtvrté, bude tak s pravděpodobností $\frac{1}{16}$, atd. Protože Kuba ale volí stále větší a větší n, můžeme tuto úvahu zobecnit na součet pravděpodobností, že se první sudé číslo bude nacházet na libovolné sudé pozici. Získáváme tak geometrickou řadu s kvocientem $\frac{1}{4}$ a počáteční hodnotou $\frac{1}{4}$, jejíž součet je právě $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1}{3}$.

32. **Žijeme sportem:** V databázi "Vše O Fotbale" najdeme u každého týmu mimo jiné údaj "Výhernost", který udává poměr všech dosud vyhraných zápasů ku celkovému počtu odehraných zápasů daného týmu počítáno kumulativně přes všechny odehrané sezóny. Určete nejmenší počet zápasů, které mohl tým během čtrnácti sezón odehrát, jestliže začal hrát v první sezóně a po první sezóně měl výhernost přesně 5%, po druhé 10%, po n-té přesně n·5%, po poslední přesně 70%. Tým může ve dvou sezonách odehrát různý počet zápasů.

Výsledek: 240

Řešení: Hledáme minimální počet zápasů $z(n)$, a tedy taky počet výher v(n), které pro každé $n \in \{1, 2, ..., 14\}$ splňují:
a) $v(n) = z(n) \cdot n \cdot 0,05$ - definice výhernosti
b) $z(n+1) \geq z(n)$ - jedná se o kumulovaný součet přes všechny sezóny
c) $v(n+1) \geq v(n)$ - viz bod b)
d) $z(n) \geq v(n)$ - tým musí celkem odehrát alespoň tolik zápasů jako vyhrát
e) $\Delta z(n) \geq \Delta v(n)$ - tým nemůže v sezóně vyhrát více zápasů než odehrát

Pro $n = 1$, nejmenší možná hodnota pro pětiprocentní výhernost je $z(1) = 20$ (20 zápasů - 1 výhra). A ta také splňuje všechny podmínky. Pro $n = 2$ je nejmenší kandidát, na základě výhernosti, $z(2) = 10$. Ten ovšem nesplňuje hned podmínku b). Dále se nabízí $z(n) = 20$. Tady ovšem není splněna podmínka e) - tým neodehrál v 2. sezóně žádný zápas, ale vyhrál 1. Další možnost splňující podmínku a) je $z(2) = 30$, a ta již splňuje i vše ostatní. Takto postupujeme dále, až najdeme, že nejmenší hodnota $z(14) = 240$.

33. **Zábava s tiskárnou:** Kouma si pořídil 3D tiskárnu. Vytiskl si pravidelný čtyřstěn s délkou hrany 1 cm. Všiml si, že když si vybere nějaký roh čtyřstěnu a na všech třech hranách z něj vedoucích vyznačí čárku ve vzdálenosti $k \cdot 1$ cm, tyto tři nové čárky s původním vrcholem vytvoří nový čtyřstěn s délkou hrany k. Tento nový čtyřstěn označil za rohový a vytiskl si 4 nové rohové čtyřstěny, jeden za každý roh původního čtyřstěnu. Tento proces opakoval do nekonečna pro každý nový čtyřstěn, který si vytiskl, tedy například pro každý rohový čtyřstěn s délkou strany k si vytiskl 4 nové s délkou strany $k \cdot k$ a tak dál. Všiml si, že ho to stálo celkem $\frac{9\sqrt{2}}{106}$ cm^3 materiálu. Jaké si zvolil k?

Výsledek: $\frac{1}{6}$

Řešení: Objem původního čtyřstěnu si vypočítáme pomocí vzorečku $V = \frac{Sv}{3}$, kde S je obsah podstavy a v je výška čtyřstěnu. Dostáváme tedy $V = \frac{\sqrt{2}}{12} cm^2$. Pro další čtyřstěn se stranou k dostáváme objem $V = k^3 \frac{\sqrt{2}}{12} cm^3$, pro další $V = k^6 \frac{\sqrt{2}}{12} cm^3$ atd. Nesmíme ale zapomenout, že nové čtyřstěny vznikají u každého vrcholu, tzn. bude jich 4krát více než těch předchozích. Dostáváme tedy geometrickou posloupnost, kde $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{12}$ a $q = 4k^3$. Ze vzorce pro součet geometrické řady tedy dostáváme rovnici pro celkový objem:

$$V = a_1 \frac{1}{1-q}$$

Dosadíme:

$$\frac{9\sqrt{2}}{106} = \frac{\sqrt{2}}{12(1-4k^3)}$$

a vychází nám, že $k = \frac{1}{6}$.

34. **Zacyklené cyklostezky:** Starosta Brkolandu pověřil Koumu s Ňoumou stavbou moderního systému cyklostezek propojujícího všech 10 měst, které se v Brkolandu nachází. Starosta požaduje, aby se pomocí tohoto systému dalo z libovolného města dostat do libovolného jiného města. Dále chce, aby systém cyklostezek obsahoval právě jednu kružnici, a to délky 5. To znamená, že bude existovat právě jedna pětice měst například A, B, C, D, E, kde existuje cyklostezka mezi A a B, B a C, C a D, D a E, E a A a nebude existovat žádná jiná trojice, čtveřice, pětice, šestice, sedmice, osmice, devítice ani desetice měst s touto vlastností. Kolika způsoby mohli Kouma s Ňoumou tuto síť postavit? Každá cyklostezka je obousměrná.

    Výsledek: 151200000

    Řešení: Toto je pokročilá úloha z teorie grafů. Zadání si můžeme přeformulovat na otázku, kolik existuje souvislých grafů na 10 označených vrcholech, které obsahují právě jednu kružnici délky 5. Máme $\binom{10}{5}$ možností, jak vybrat vrcholy, které tvoří kružnici. Označme je 1 až 5. Vrchol 1 má dva sousedy ze zbylých čtyř, kteří jdou vybrat šesti způsoby. Zbylé dva vrcholy pak mohou být uspořádány dvěma způsoby. Zatím jsme tedy na hodnotě $12 \cdot \binom{10}{5}$.

    Zbylých pět vrcholů je rozděleno do několika stromů, které jsou napojené na kružnici. Z teorie grafů totiž víme, že grafy, které jsou souvislé a neobsahují kružnici, jsou právě stromy (viz https://cs.wikipedia.org/wiki/Strom_(graf)). Každá možnost, jak to udělat, je identifikována nerostoucí posloupností čísel, kde každé číslo říká, kolik vrcholů je v jednom stromě. Možnosti jsou 5, 41, 32, 311, 221, 2111 a 11111. Např. 32 znamená, že jeden strom je tvořen třemi vrcholy a jeden dvěma. Pro každou z těchto možností vynásobíme možná rozdělení vrcholů do stromů, možná napojení stromů na kružnici a možná uspořádání vrcholů v rámci stromů. V poslední položce si můžeme pomoci tím, že zjistíme, že označkovaných stromů na n vrcholech je n^{n-2} (viz https://en.wikipedia.org/wiki/Cayley%27s_formula).

    Např. pro posloupnost 32 je $\binom{5}{2}$ rozdělení vrcholů do stromů, $5 \cdot 4$ možných napojení na kružnici a $16 \cdot 3$ možných uspořádání v rámci stromů.

    Všechny možnosti rozdělení zbylých pěti vrcholů nakonec sečteme, vynásobíme možnostmi uspořádání prvních pěti a získáme odpověď, která činí 151200000.

35. **Zahradní posloupnost:** Terka a Tonda našli na zahradě tři kladná celá čísla a, b a k. S nimi Terka zavedla aritmetickou posloupnost $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ s diferencí k a $a_1 = a$ a Tonda si vytvořil geometrickou posloupnost $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ s kvocientem k a $b_1 = b$. Všimli si, že součet prvních čtyř členů Terčiny posloupnosti je 102 a součet prvních čtyř členů Tondovy posloupnosti je 400. Zadejte součet všech možných součinů $a_5 b_5$.

    Výsledek: 132773

    Řešení: Platí, že n=tý člen Terčiny aritmetické posloupnosti splňuje $a_n = a + (n-1)k$ a n-tý člen Tondovy geometrické posloupnosti splňuje $b_n = b \cdot k^{n-1}$. Tedy:

    $$a + a + k + a + 2k + a + 3k = 102 \implies 4a + 6k = 102$$

    $$b + bk + bk^2 + bk^3 = 400 \implies b(1 + k + k^2 + k^3) = 400$$

    Víme, že a, b, k jsou celá kladná čísla. Proto známe všechny možnosti, jak může vypadat součin b a $1 + k + k^2 + k^3$, protože 400 můžeme vyjádřit jako součin dvou celých kladných čísel pouze jako:

$1 \cdot 400, 2 \cdot 200, 4 \cdot 100, 5 \cdot 80, 8 \cdot 50, 10 \cdot 40, 16 \cdot 25, 20 \cdot 20$. U všech těchto možností vyzkoušíme, zda k bude celé, když se $1+k+k^2+k^3$ bude rovnat jednomu z těchto čísel. Vyjde nám, že k celé dostaneme jenom pro případ $b = 1$, $b = 10$ a $b = 100$, pak dostaneme postupně $k = 7$, $k = 3$, $k = 1$. Když dosadíme jednotlivá k do rovnice pro aritmetickou posloupnost, vyjde nám po řadě $a = 15$, $a = 21$, $a = 24$. Nyní dopočítáme v jednotlivých případech a_5 a b_5:

- $a = 15, k = 7, b = 1 \implies a_5 = 43, b_5 = 2401, a_5b_5 = 103243$
- $a = 21, k = 3, b = 7 \implies a_5 = 33, b_5 = 810, a_5b_5 = 26730$
- $a = 24, k = 1, b = 100 \implies a_5 = 28, b_5 = 100, a_5b_5 = 2800$

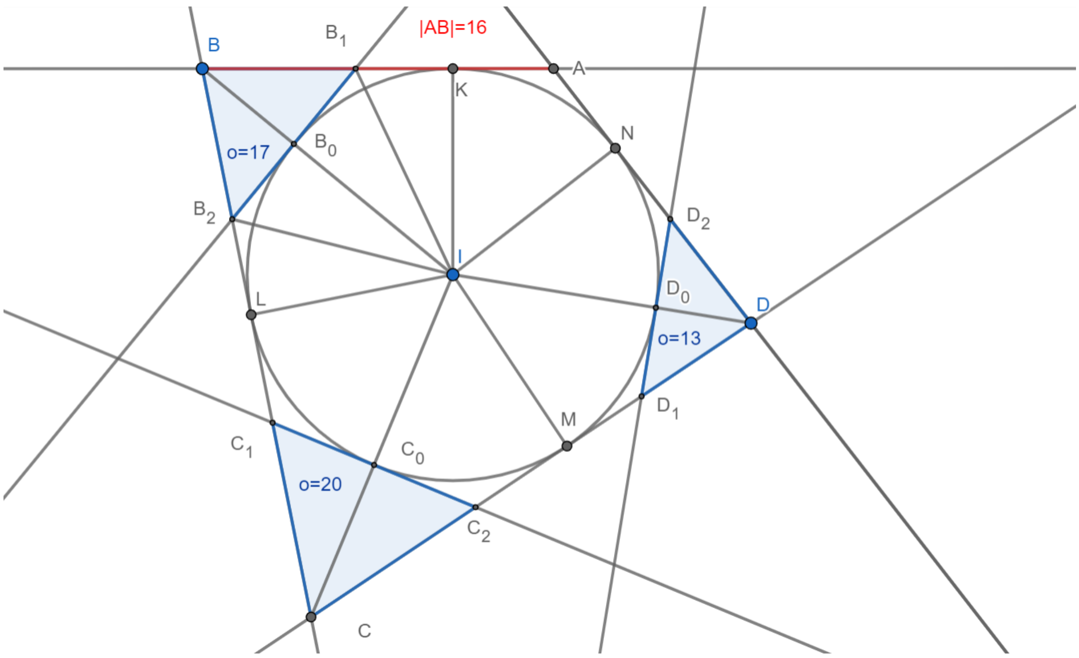
Celkový součet je tedy roven 132773.

36. **Konečně geometrie!** Kuba si nakreslil na zem tečnový čtyřúhelník $ABCD$, jehož strana AB má délku 16 a kružnice vepsaná k má střed I. Pak přišel Kuba a protl úsečky BI,CI,DI s k v bodech po řadě B_0, C_0, D_0.

    Tečna v bodě B_0 ke k protíná strany AB, BC po řadě v bodech B_1, B_2. Obdobně tečna v C_0 protíná strany BC, CD v bodech C_1, C_2 a tečna v D_0 protíná strany CD, DA v bodech D_1, D_2. Kubové si pak všimli, že obvody trojúhelníků BB_1B_2, CC_1C_2 a DD_1D_2 jsou po řadě 17, 20 a 13. Jak dlouhá je strana AD?

    Výsledek: 14

    Řešení: Trojúhelníky B_1BB_2, C_1CC_2, D_1DD_2 jsou rovnoramenné. Z vlastností tečen z bodu B



ke kružnici víme, že $|B_0B_1| = |B_1K|$. Z těchto pozorování plyne, že $\frac{1}{2}o_{B_1BB_2} = \frac{1}{2}(2 \cdot |BB_1| + 2 \cdot |B_1B_0|) = |BB_1| + |B_1B_0| = |BB_1| + |B_1K| = |BK| = \frac{17}{2}$. Stejnými úvahami dále dostáváme $|KA| = |AB| - |BK| = 16 - \frac{17}{2} = \frac{15}{2}$ a $|AN| = |AK| = \frac{15}{2}$.
Stejně jako u $|BK|$ postupujeme i k nalezení $|DN| = \frac{13}{2}$, přičemž výsledek bude $|AD| = |AN| + |ND| = \frac{15}{2} + \frac{13}{2} = 14$.

37. **Rozbitá světýlka:** Viktorka našla v dědově garáži 2022 zhasnutých světýlek, ke kterým je připojeno 2022 vypínačů. Děda Viktorce řekl pouze to, že každý vypínač změní stav nějaké podmnožiny všech světýlek (klidně i prázdné), tedy rozsvítí zhasnutá a zhasne rozsvícená světýlka z této podmnožiny. Na nic dalšího si už nevzpomněl. Určete, jaká je pravděpodobnost, že pomocí těchto vypínačů bude Viktorka schopna rozsvítit jakoukoliv podmnožinu světýlek, kterou si zamane. Předpokládejte, že každý vypínač může rozsvítit libovolnou podmnožinu se stejnou pravděpodobností. **Odpovězte, jako kdyby byl výsledek iracionální číslo.**

    Výsledek: 0.28879

Řešení: První krok k vyřešení této úlohy je přesvědčit se, že na opakovaném mačkání vypínačů nezáleží. U každého vypínače záleží pouze na tom, zda je zapnutý nebo vypnutý. Pokud by Viktorka zmáčkla daný vypínač sudý počet krát, mělo by to stejný dopad, jako kdyby vypínač nezmáčkla ani jednou. Kdyby ho zmáčkla lichý počet krát, mělo by to stejný dopad, jako kdyby ho zmáčkla jednou. Toto uvědomění nám situaci velice ulehčí, protože se budeme moct zabývat pouze tím, zda je nějaký vypínač zapnutý či vypnutý.

Dále si uvědomme, že počet podmnožin všech světýlek je 2^{2022}. Vypínačů je 2022, tedy počet všech různých kombinací, kterými může Viktorka vypínače zmáčknout, je také 2^{2022}, protože pro každý má podle předchozí myšlenky k dispozici jen 2 stavy zapnutý/vypnutý. Aby byla schopna rozsvítit libovolnou podmnožinu světýlek, musely by každé dvě různé kombinace zmáčknutí vypínačů rozsvěcovat různé podmnožiny světýlek.

Zbývá ještě dokázat, že pokud máme k vypínačů, pomocí kterých můžeme rozsvítit 2^k různých podmnožin žárovek, pak s $k+1$ vypínači složenými z k původních a jednoho nového vypínače můžeme rozsvítit 2^{k+1} různých podmnožin žárovek právě tehdy, když podmnožina měněná vypínačem s číslem $k+1$ není jednou z původních 2^k podmnožin. Jeden směr je jasný. Kdyby podmnožina měněná vypínačem s číslem $k+1$ byla jednou z původních 2^k podmnožin žárovek, určitě bychom nerozsvítili 2^{k+1} různých podmnožin žárovek. Dokažme opačný směr sporem. Předpokládejme, že podmnožina měněná vypínačem $k+1$ není jednou z původních 2^k podmnožin žárovek, a že dvě různé kombinace $k+1$ vypínačů mění stejnou podmnožinu. V alespoň jedné z těchto kombinací musí být zapnutý vypínač s číslem $k+1$, protože kdyby nebyl, byl by to spor s předpokladem, že původních k vypínačů generuje 2^k podmnožin. Pokud by byl v obou kombinacích, můžeme ho v obou vypnout a získat opět stejný spor. Nakonec kdyby se nacházel pouze v jedné z těchto kombinací a množiny světýlek měněny oběma kombinacemi vypínačů by byly stejné, pak bychom mohli získat pomocí kombinace původních k vypínačů podmnožinu měněnou vypínačem s číslem $k+1$, spor.

Nyní už jsme vybaveni vším, co potřebujeme, a můžeme se pustit do výpočtu. Každý vypínač může změnit stav jedné z 2^{2022} podmnožin žárovek. Vypínačů je 2022 a jsou na sobě nezávislé, tedy celkem existuje $2^{(2022^2)}$ možností, jak můžou měnit stav podmnožin žárovek. Zkusme vypočítat počet všech konfigurací, které budou vyhovovat zadání. Označme si BÚNO vypínače čísly od 1 do 2022. První vypínač má celkem $2^{2022}-1$ možností, kterou podmnožinu světýlek může rozsvítit. Jediná podmnožina, kterou má zakázanou, je prázdná, protože kdyby rozsvěcoval prázdnou podmnožinu, už by dvě různé konfigurace zapnutí vypínačů (všechny vypínače vypnuté a nebo první zapnutý a všechny ostatní vypnuté) rozsvěcovaly stejnou podmnožinu žárovek, a to prázdnou. Druhý vypínač bude mít ze stejného důvodu na výběr ze všech podmnožin, které ještě nejdou rozsvítit pomocí prvního - těch bude $2^{2022}-2$. Třetí vypínač bude mít na výběr ze všech podmnožin, které ještě nejdou rozsvítit pomocí prvního a druhého vypínače. Těch bude $2^{2022}-4$. Obecně bude mít k-tý vypínač na výběr ze všech podmnožin, které ještě nejdou rozsvítit pomocí prvních $k-1$ vypínačů, a těch bude $2^{2022}-2^{k-1}$. Nyní už nám k nalezení pravděpodobnosti stačí vynásobit všechny možnosti pro všechny vypínače, tím dostaneme počet všech konfigurací, které vyhovují zadání, a ten podělit počtem všech možných konfigurací. Dostáváme

$$\frac{(2^{2022}-1)\cdot(2^{2022}-2)\cdot(2^{2022}-4)\cdots(2^{2022}-2^{2021})}{2^{(2022^2)}}$$

Z každého členu v čitateli vytkneme 2^{2022} a upravíme na

$$\frac{2^{2022}(1-\frac{1}{2^{2022}})\cdot 2^{2022}(1-\frac{1}{2^{2021}})\cdot 2^{2022}(1-\frac{1}{2^{2020}})\cdots 2^{2022}(1-\frac{1}{2})}{2^{(2022^2)}}$$

Všechny 2^{2022} přetáhneme dopředu a získáváme

$$\frac{2^{(2022^2)}(1-\frac{1}{2^{2022}})\cdot(1-\frac{1}{2^{2021}})\cdot(1-\frac{1}{2^{2020}})\cdots(1-\frac{1}{2})}{2^{(2022^2)}}$$

Nyní už můžeme lehce zkrátit a získáváme součin, jehož hodnota bude výsledkem:

$$\left(1-\frac{1}{2^{2022}}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2^{2021}}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2^{2020}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

Po zadání do Wolframu a zaokrouhlení získáváme hodnotu 0.28879.

38. **Zoufalé rozvody:** 300 ženatých kamarádů se chce co nejrychleji rozvést. Jsou čtyři možnosti, jak se dá rozvést: u soudu, dopisem, přes portál občana a u notáře.

   - Napsání dopisu je náročné, a tak s tím každý muž potřebuje pomoc jednoho dalšího kamaráda a dohromady jim to zabere jeden den. Pošta je navíc pomalá, a tak může být odesláno jen deset dopisů denně.
   - Jedno zasedání soudu trvá týden a může rozvést až 4 páry: každý rozváděný muž ale potřebuje dva svědky (všichni tři musí u soudu strávit celý týden, nikdo nemůže být svědkem dvou rozvodů najednou). Může zasedat až 10 soudů najednou (zasedání může začít kdykoli, ale pokud zasedání začne s méně než čtyřmi páry, nemůže se k němu další pár přidat).
   - Rozvést se přes portál občana zabere 1 den a není k tomu potřeba pomoc, ale ovládat ho umí pouze 130 mužů (každý musí rozvést sám sebe).
   - Notář může rozvést 9 mužů denně, ale pouze tehdy, když probíhá 40 rozvodů u soudů.
   - Nikdo nemůže dělat více činností najednou (činnosti jsou: psaní dopisu (svého i výpomoc), přítomnost u soudu (i jako svědek), práce s portálem občana, setkání s notářem).

   Kolik nejméně potřebují kamarádi dnů, aby se všichni rozvedli?

   Výsledek: 8

   Řešení: Ukažme nejdříve, že rozvody nelze dokončit za sedm dní či méně. Soud trvá týden a zabere čas svědkům, kteří potřebují alespoň jeden další den na rozvedení; pokud chceme dokončit všechny rozvody do týdne, tak soud nemůžeme použít, a tedy ani notář nebude pracovat. Muži, kteří neovládají portál občana (kterých je $300 - 130 = 170$), se pak můžou rozvést jedině dopisem, a těch lze během sedmi dní odeslat pouhých 70.

   Co osm dní? Najdeme způsob, jakým lze všechny za tuto dobu rozvést. U soudu se během prvních sedmi dní rozvede maximální možný počet párů – 40; notář za tutéž dobu rozvede dalších $7 \cdot 9 = 63$ mužů, a 70 napíše dopis. To je dohromady 173 mužů - zpracujeme takto tedy všechny ty, kteří neovládají portál občana. Budou potřebovat 80 svědků k soudu a 10 ke psaní dopisů; tuto roli bez problémů zvládnou ti, kteří pak poslední, osmý den provedou rozvod online.

39. **Miluju kružnice:** V rovině jsou dány 3 kružnice s poloměry r, s, t, které se všechny navzájem dotýkají, tedy každé dvě této kružnice mají právě jeden společný bod. Naleznete úhel v radiánech, který svírá střed kružnice s poloměrem t se středy zbylých dvou kružnic, jestliže platí $r+s+t = \frac{2rs}{t}$.

   Výsledek: 1.23096

   Řešení: Označme si středy kružnic s poloměry r, s, t jako R, S, T. Tyto středy vytvoří trojúhelník s délkami stran $r+s, s+t, t+r$. Nyní můžeme zkusit vypočítat úhel u vrcholu T tohoto trojúhelníka pomocí kosinové věty jako $cos(\alpha) = \frac{(s+t)^2+(r+t)^2-(r+s)^2}{2(s+t)(r+t)}$. Po roznásobení a úpravě získáváme $cos(\alpha) = \frac{t^2+st+rt-rs}{(s+t)(r+t)} = \frac{t(t+s+r)-rs}{t(t+s+r)+rs}$. Dosadíme $t+s+r = \frac{2rs}{t}$ a dostáváme $cos(\alpha) = \frac{2rs-rs}{2rs+rs} = \frac{rs}{3rs} = \frac{1}{3}$, tedy hledaný úhel má velikost $\alpha = arccos(\frac{1}{3}) \approx 1.23096$.

40. **Dělitelé:** Definujme zobrazení $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ následovně: Nechť m, n jsou přirozená čísla. Poté je $f(m,n)$ rovno nule, pokud jsou m, n nesoudělná, v opačném případě je $f(m,n) = \frac{1}{nsd(m,n)}$. Určete hodnotu výrazu

$$\left\lfloor \sum_{i=1}^{2^{32}-1} f(i, 2^{32}) \right\rfloor$$

   Výsledek: 715827882

   Řešení: Je evidentní, že do výsledného součtu přispějí právě sudá čísla, musíme ale zjistit, jakou hodnotu a dát si pozor, abychom nějaké sudé číslo číslo nezapočítali dvakrát. Začněme od čísel dělitelnými největšími mocninami dvojky z této posloupnosti a postupujme směrem k menším. číslo 2^{31} přispěje $\frac{1}{2^{31}}$. Čísla obsahující 2^{30} jako nejvyšší mocninu dvojky jsou v této posloupnosti dvě, a to 2^{30} a $3 \cdot 2^{30}$, které do výsledného součtu přidají $2 \cdot \frac{1}{2^{30}} = \frac{1}{2^{29}}$. Čísla obsahující 2^{29} jako nejvyšší mocninu dvojky jsou v této posloupnosti čtyři, a to $2^{29}, 3 \cdot 2^{29}, 5 \cdot 2^{29}, 7 \cdot 2^{29}$, které do výsledného součtu přidají $4 \cdot \frac{1}{2^{29}} = \frac{1}{2^{27}}$. Lehce se ověří, že tento vzor se opakuje. Do výsledného součtu tedy postupně přidáváme mocniny dvojky, jejichž exponenty se liší o 2, tedy získáváme konečnou geometrickou řadu $\frac{1}{2^{31}} + \frac{1}{2^{29}} + \frac{1}{2^{27}} + \cdots + 2^{29}$, kterou můžeme sečíst pomocí vzorce pro součet prvních n členů geometrické řady, čímž nám vyjde číslo $\frac{2^{31}-\frac{1}{2^{31}}}{3}$, a dolní celá část z něj je 715827882.

41. **Schody:** Vítek má před sebou 10 schodů. Jelikož má dlouhé nohy, může udělat krok o jeden, dva nebo dokonce tři schody. Kolika způsoby může Vítek zdolat schody?

    Výsledek: 274

    Řešení: Uvážíme, že bychom místo 10 schodů chtěli zdolat n schodů, potom označíme a_n jako počet způsobů, jak to schody zdolat. Pokud se rozhodneme nejprve udělat krok o 1 schod, zbylých $n-1$ schodů můžeme zdolat a_{n-1} způsoby. Obdobně pro první krok o délce 2, respektive 3, máme a_{n-2} respektive a_{n-3}způsobů jak zdolat zbývající schody. Jelikož se při zdolávání n schodů vždy můžeme rozhodnout, jak dlouhý bude náš první krok, můžeme a_n vyjádřit rekurentně jako součet všech možností, které budeme mít podle toho, jak dlouhý první krok uděláme. Tzn. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, kde snadno nahlédneme, že $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, z čehož již pomocí rekurentního vztahu dopočteme $a_{10} = 274$.

42. **Převrácená prvočísla:** Eris hraje následující hru. Na papír píše v libovolném pořadí jedno po druhém racionální čísla z intervalu (0,1), která jsou v základním tvaru a jejich jmenovatel je menší nebo roven číslu N, určenému před začátkem hry. Kdykoliv napíše číslo, které s žádným číslem dosud zapsaným nemá rozdíl tvaru $\left(\frac{1}{\text{prvočíslo}}\right)$, přičte si bod. Určete minimální součet bodů, které Eris získala z her pro $N = 20$ a $N = 22$.

    Výsledek: 27

    Řešení: Představme si všechna zapsaná racionální čísla už na papíře, bez pořadí, v jakém tam byla zapsána. Spojme čarou všechny dvojice, jejichž rozdíl je $\frac{1}{\text{prvočíslo}}$; pokud se mezi dvěma čísly lze dostat po těchto čarách, byť nepřímo, říkejme jim *propojené*. Je vidět, že nejmenší možný počet získatelných bodů je právě počet takto vzniklých samostatně souvislých, vzájemně nepropojených grafů.

    Buď $R = \frac{c}{a^n \cdot b^m}$ některé zapsané číslo, $a^n \cdot b^m$ prvočíselný rozklad jeho jmenovatele (první jmenovatel, který by v rozkladu měl tři různá prvočísla, je $30 > N_{max} = 22$.) Zřejmě je R propojené se všemi čísly tvaru $\frac{c+k(a^n \cdot b^{m-1})}{a^n \cdot b^m}$ přičtením $\frac{k}{b}$ a tvaru $\frac{c+k(a^{n-1} \cdot b^m)}{a^n \cdot b^m}$ přičtením $\frac{k}{a}$ (jsou-li v intervalu $(0,1)$). Obzvlášť, jsou-li $n = m = 1$, snadno ověříme, že všechna čísla s tímto jmenovatelem jsou propojená (a jsou také propojená s čísly, která tento jmenovatel mají po určitém rozšíření).

    Propojené jsou tedy poloviny, třetiny, pětiny, šestiny $(2 \cdot 3)$, sedminy, desetiny $(2 \cdot 5)$, čtrnáctiny $(2 \cdot 7)$, patnáctiny $(3 \cdot 5)$, pro $N = 22$ také jednadvacetiny $(3 \cdot 7)$, jedenáctiny a dvaadvacetiny $(2 \cdot 11)$. Současně je vidět, že devatenáctiny, sedmnáctiny a třináctiny (a jedenáctiny v $N = 20$) nejsou propojeny s žádným číslem s jiným jmenovatelem, než jsou ony samy. Máme nyní pět bodů pro $N = 20$, čtyři pro $N = 22$.

    Zbývají (nezkratitelné) čtvrtiny, osminy, šestnáctiny, devítiny, dvanáctiny, osmnáctiny, dvacetiny. Jejich zkoumáním zjistíme, že devítiny s osmnáctinami tvoří dvě oddělené komponenty, osminy další dvě, šestnáctiny dokonce další čtyři (o dvou prvcích, které se liší o $\frac{1}{2}$). Čtvrtiny, dvanáctiny a dvacetiny tvoří všechny jediný, poslední graf.

    Čísla s jinými jmenovateli nejsou povolena. Pro $N = 20$ získáme vždy nejméně 14 bodů, pro $N = 22$ naopak 13. Hledaný výsledek je tedy $14 + 13 = 27$.

43. **Triangl:** Mějme čtverec s vrcholy A, B, C, D. Zvolme rovnoměrně náhodně jeden bod na straně AB a označme ho X, rovnoměrně náhodně jeden bod na straně CD a označme ho Y. Dále označme střed úsečky BC jako Z. Jaká je pravděpodobnost, že trojúhelník XYZ má tupý úhel u vrcholu Z?

    Výsledek: 0.59657

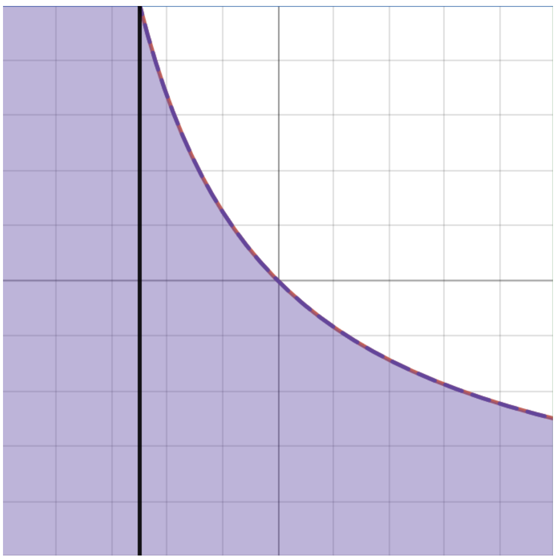
    Řešení: Má-li být úhel u vrcholu Z tupý, musí být součet jeho vedlejších úhlů $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, kde $\alpha := |\sphericalangle YZC|$ a $\beta := |\sphericalangle XZB|$. Tento výraz následně upravíme. (Tangens je na intervalu od $(0, \frac{\pi}{2})$ rostoucí, takže se nedopouštíme nepovolených úprav.)

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &< \frac{\pi}{2} \\ \alpha &< \frac{\pi}{2} - \beta \\ \tan\alpha &< \tan(\frac{\pi}{2} - \beta) \\ \tan\alpha &< \cot\beta\end{aligned}$$

Jelikož na velikosti čtverce nezáleží, předpokládejme, že se jedná o jednotkový čtverec. Dále označme $y := |CY|$ a $x := |BX|$, a pokračujme v úpravách.

$$\begin{aligned}\frac{y}{\frac{1}{2}} &< \frac{\frac{1}{2}}{x} \\ 4xy &< 1 \\ xy &< \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Pomocí úprav jsme úlohou převedli na hledání pravděpodobnosti, že pro x a y, kde $x \in [0,1]$ a $y \in [0,1]$ platí $xy < \frac{1}{4}$. Jelikož na proměnné x, y platí daná omezení, podíváme se pouze na jednotkový čtverec $[0,1] \times [0,1]$ a výslednou pravděpodobnost zjistíme jako poměr obsahu množiny všech bodů, pro které platí $xy < \frac{1}{4}$ ku obsahu celého čtverce. Situace je nastíněna na obrázku. Množina všech bodů, které splňují podmínku $xy < \frac{1}{4}$, je vybarvena fialově.



Obsah množiny všech bodů splňujících $xy < \frac{1}{4}$ spočteme tak, že si tuto množinu rozdělíme na 2 části přímkou $x = \frac{1}{4}$ a sečteme obsahy obou vzniklých částí. Pro $x \in [0, \frac{1}{4}]$, se jedná o obsah obdélníka o stranách 1 a $\frac{1}{4}$, tedy $\frac{1}{4}$. Pro $x \in [\frac{1}{4}, 1]$ je obsahem plocha pod křivkou $y = \frac{1}{4x}$, tedy $\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{4x} dx \approx 0.34657359$, což můžeme zjistit pomocí wolframu. Výsledná pravděpodobnost je tedy po zaokrouhlení $0.25 + 0.34657 = 0.59657$, jelikož obsah celého čtverce je 1.

44. **Šatna:** Patnáct nahých, naprosto identických lidí vejde do šatny, v níž je:

- 5 modrých, 5 zelených a 5 červených triček,
- 4 černé, 7 modrých a 4 růžové kalhoty,
- 2 zelené, 10 černých a 3 žluté klobouky.

Každý si oblékne právě jedno tričko, jedny kalhoty a jeden klobouk (zároveň se nemůže více lidí obléct do téhož kusu oblečení). Následně počítají, kolik různých řad patnácti lidí můžou vytvořit. Kolik napočítají, pokud se oblékli tak, aby tento počet byl co nejmenší?

Výsledek: 37837800

Řešení: Označme si $k_1, \dots, k_n$ velikosti skupinek stejně oblečených lidí, např. dvě skupinky po 7 a 8 lidech by odpovídaly $k_1 = 7, k_2 = 8$. Počet celkových uspořádání všech lidí pak bude $\frac{15!}{\prod_{i=1}^{n} k_i!}$. Ze zadání také víme, že $\sum_{i=1}^{n} k_i = 15$. V čitateli počtu uspořádání je konstanta, tedy zlomek můžeme zmenšit jedině tak, že zvětšíme jmenovatele, hledáme proto maximální hodnotu $\prod_{i=1}^{n} k_i!$ sestavitelnou podle zadání. Lze dokázat, že $n! \geq n_1! \cdot n_2!$ pro libovolné n a $n_1 + n_2 = n$, tedy "větší je jeden velký faktoriál než součin dvou menších", budeme se proto snažit primárně sestavit co největší skupinky stejně oděných lidí.

Barvy triček nám okamžitě dávají omezení $k_1, k_2, k_3 \leq 5$, tedy kdybychom zanedbali kalhoty a klobouky, bylo by maximum $(5!)^3$. Ze sedmi modrých kalhot využijeme pět pro jednu skupinku lidí ve stejném tričku (jeden velký faktoriál...), čímž nám pro zbylých deset lidí zbydou 4 černé, 2 modré a 4 růžové kalhoty. Opět se snažíme vytvořit co největší skupinku, proto dáme čtyřem lidem se stejnými tričky růžové (nebo černé, tyto možnosti jsou teď symetrické) kalhoty. Dalším racionálním krokem by bylo rozdat čtyřem lidem se stejnými kalhotami stejná trika, ale to kvůli požadavkům na klobouky nebude optimální, rozdáme proto zbývající skupince troje černé kalhoty a dvoje modré, zbylému člověkovi z druhé skupinky dáme zbývající černé. Zatím tedy máme konfigurace (triko, kalhoty): (M,M), (M,M), (M,M), (M,M), (M,M), (Č,R), (Č,R), (Č,R), (Č,R), (Č,Č), (Z,Č), (Z,Č), (Z,Č), (Z,M), (Z,M). Dále podobnou úvahou rozdáme prvním deseti lidem z naší konfigurace černé klobouky, dále tři žluté a nakonec dva zelené, což dá výsledné velikosti skupin $k_1 = 5, k_2 = 4, k_3 = 3, k_4 = 2, k_5 = 1$, tedy $\frac{15!}{5!4!3!2!} = 37837800$.

45. **Slavný návrat:** Nechť f je zobrazení z množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ do množiny $\{1, 2\}$ zadané předpisem:

$$f(1) = f(2) = 1,$$

$$f(3) = f(4) = 2.$$

Kolik existuje dvojic (g, h) zobrazení $g\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ a zobrazení $h\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2\}$ takových, že f se dá napsat jako složení $f(x) = h(g(x))$?

Výsledek: 168

Řešení: Možné dvojice (g, h) rozdělíme do čtyř kategorií:

(a) $g(1) = g(2)$ a $g(3) = g(4)$,

(b) $g(1) = g(2)$ a $g(3) \neq g(4)$,

(c) $g(1) \neq g(2)$ a $g(3) = g(4)$,

(d) $g(1) \neq g(2)$ a $g(3) \neq g(4)$.

V případu (a) máme 4 možnosti, kam g může poslat čísla 1 a 2. Dále pak 3 možnosti kam poslat čísla 3 a 4, neboť $f(1) \neq f(3)$ implikuje $g(1) \neq g(3)$. Pro každou z těchto možností pak existují 4 zobrazení h, která g 'dorovnají' do f. Obraz g totiž obsahuje pouze dva prvky a na nich je hodnota zobrazení h vynucená hodnotou f. Čtyři možnosti h jsou dány volbou hodnot h na zbylých dvou prvcích, které v obrazu g nejsou. Dohromady $4 * 3 * 4 = 48$.

V případu (b) máme opět 4 možnosti, kam g může poslat čísla 1 a 2. Dále 3 možnosti kam poslat číslo 3 a 2 možnosti, kam poslat číslo 4. Pro každé g máme dvě možnosti, kam h může poslat zbývající prvek, který neleží v obrazu g. Dohromady $4 * 3 * 2 * 2 = 48$.

Případ (c) je symetrický s případem (b), tedy 48 možností.

V případu (d) máme 4 možnosti, kam g může poslat číslo 1, 3 možnosti kam poslat číslo 2, 2 možnosti kam poslat číslo 3 a jednu možnost kam poslat číslo 3. Jinými slovy g je permutace na 4 prvcích a těch je $4 * 3 * 2 * 1 = 24$. Funkce h je jednoznačně určena jako $h = f(g^{-1}(x))$.

V součtu máme 168 dvojic.