Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.00

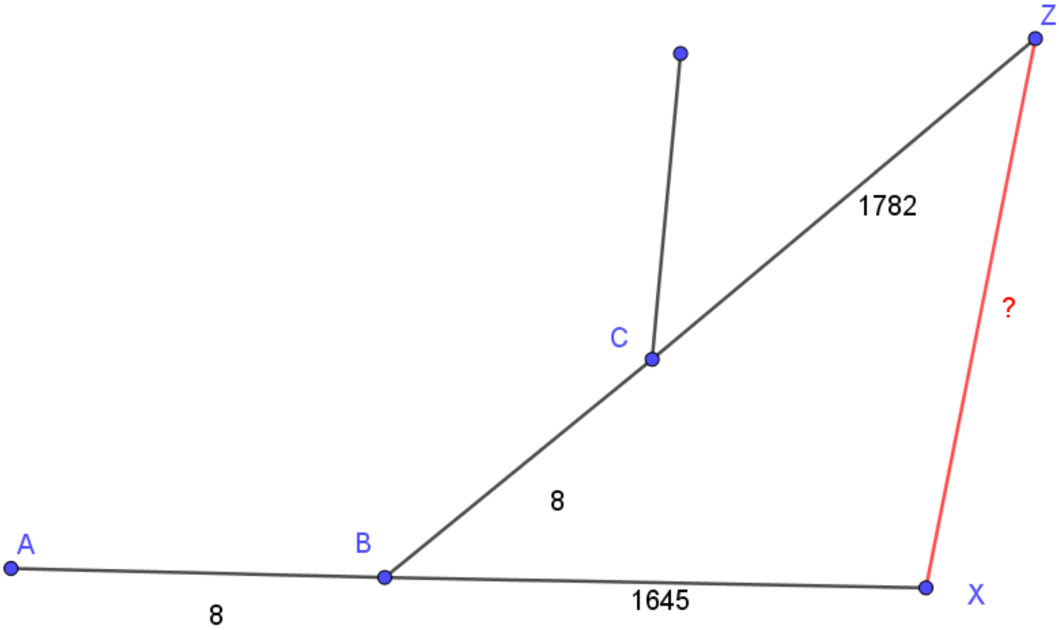
Pokud je řešením počet nějakých objektů a správná odpověď je nekonečno, napište „inf“. Pokud je řešením racionální necelé číslo, napište jej jako zlomek v základním tvaru (např. 5/7*, ale ne* 4/6*). Pokud je řešením iracionální číslo, napište jej v desetinném zápisu s tečkou zaokrouhleno na 5 desetinných míst (např.* 5.55579846 . . . *jako* 5.55580*).*

1. **Brněnské hradby:** V roce 2093 se znovu začaly stavět Brněnské hradby. Extravagantní architekt navrhl stavbu ve tvaru pravidelného 2021-úhelníku s délkou strany 8 metrů. Bylo ovšem navíc potřeba ohradit oblast bývalého Hlavního nádraží, ze které se v té době stalo zvrhlé a divoké území nepřístupné běžným lidem. Proto kolem něj architekt postavil trojúhelník následujícím způsobem: nechť A, B, C jsou tři po sobě jdoucí body pravidelného 2021-úhelníka. Uvažujme body X, Z ležící na polopřímkách opačných k polopřímkám $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}$. Navíc délka $|BX|$ je rovna (v metrech) roku, kdy se Brno za třicetileté války podruhé ubránilo švédskému obléhání, a délka $|CZ|$ je rovna (v metrech) roku, kdy Josef II. trvale přiznal Brnu status hlavního moravského města.

   Jaká je v metrech vzdálenost $|XZ|$?

   Výsledek: 145.09811

   Řešení: Situaci si načrtneme:



   $\sphericalangle XBC$ je vedlejší úhel k vnitřnímu úhlu 2021-úhelníku, délky BX a BZ jsou dány letopočty, na zjištění $|ZX|$ už pouze použijeme kosinovou větu a získáme tím výsledek 145.09811 metrů.

2. **Kolik je Davidovi?** Anně je třikrát tolik co Báře. Za dvacet let bude Anně polovina toho, co tou dobou Čendovi. David je o čtyři roky mladší než Čenda, a je mu desetkrát tolik co Báře. Kolik bude Davidovi za dvacet let?

   Výsledek: 60

   Řešení: Zadání přepíšeme do soustavy rovnic:

$$A = 3B$$
$$2(A + 20) = C + 20$$
$$D = C - 4$$
$$D = 10B$$

Vyřešením soustavy dostaneme $A = 12$, $B = 4$, $C = 44$, $D = 40$.
Výsledek je potom $D + 20 = 40 + 20 = 60$.

3. **Korálky:** Mějme 2021 dětí bydlících v domech s čísly 1 až 2021 (v každém domě bydlí právě jedno). Kolika způsoby můžeme mezi tyto děti rozdělit 2021 nerozlišitelných korálků za podmínky, že pokud dítě v nějakém domě nedostane žádný korálek, tak už žádný korálek nedostane ani žádné dítě v domě s libovolným vyšším číslem. Jako odpověď zadejte poslední dvojčíslí daného čísla.

   Výsledek: 76

   Řešení:

   Stačí si uvědomit, že počet případů rozdělení korálků mezi děti je stejný jako počet způsobů, kolika můžeme zapsat 2021 jako součet přirozených čísel, kde záleží na pořadí v součtu.

   K vyřešení této úlohy už nám postačí následující úvaha: Napišme si 2021 jako součet 2021 jedniček: $2021 = 1+1+1+\ldots+1$. V tomto součtu figuruje znaménko plus celkem 2020-krát. Z tohoto zápisu čísla 2021 můžeme vytvořit libovolný součet dávající 2021 o libovolném počtu (1 až 2021) sčítanců tak, že některá plusová znaménka vypustíme a některá ponecháme.

   Všechny jedničky, mezi kterými jsme znaménko plus vynechali, sečteme, a výsledné součty necháme oddělené netknutými plusovými znaménky, např. $2021 = 3 + 5 + 7 + 2006$. Tudíž nám vznikne číslo 2021 jako součet několika přirozených čísel. Tímto postupem získáme všechny způsoby, jak zapsat 2021 jako součet několika přirozených čísel (kde záleží na pořadí sčítanců), a zároveň každý takový součet dostaneme právě jednou. Celkem je tedy takových zápisů 2^{2020}, jelikož každé plus můžeme buď smazat, nebo ponechat, a takových voleb máme 2020 (jednu pro každou možnou pozici plus). Poslední dvojčíslí tohoto čísla je 76, což se dá zjistit buď za pomoci Wolframu (`2^2021 mod 100`) nebo pomocí modulární aritmetiky následujícím způsobem.

   Číslo 2^{20} dává zbytek 1 po dělení číslem 25, a proto i $2^{2020} = (2^{20})^{101}$ dává po dělení 25 zbytek 1. Proto je 2^{2020} tvaru $25k+1$ pro nějaké celé číso k. Pak je ovšem i poslední dvojčíslí čísla 2^{2020} tvaru $25l + 1, l \in \mathbb{N}$, neboť ho získáme opakovaným odčítáním čísla $100 = 25 \cdot 4$ od $2^{2020} = 25k + 1$. Navíc 2^{2020} je dělitelné 4, a proto i jeho poslední dvočíslí je dělitelné 4. Jediné přirozené číslo menší než 100, které je dělitelné 4 a tvaru $25k + 1$ je 76.

4. **Potká Jan Annu?** Janovi se Anna líbí a on se rozhodl, že ji konečně pozve na rande. Má k tomu ideální příležitost, protože je neděle a on ví, že Anna chodí v neděli ráda do parku. Když svítí sluníčko, vydá se tam s pravděpodobností $3/4$, když je zataženo tak s pravděpodobností $1/2$ a když prší, tak pouze s pravděpodobností $1/10$. O zítřejší předpovědi víte následující: s pravděpodobností 50 % bude svítit slunce, s 30% bude zataženo a s 20% pravděpodobností bude pršet. Pokud půjde Anna do parku, potkají se. S jakou pravděpodobností se Jan s Annou setká?

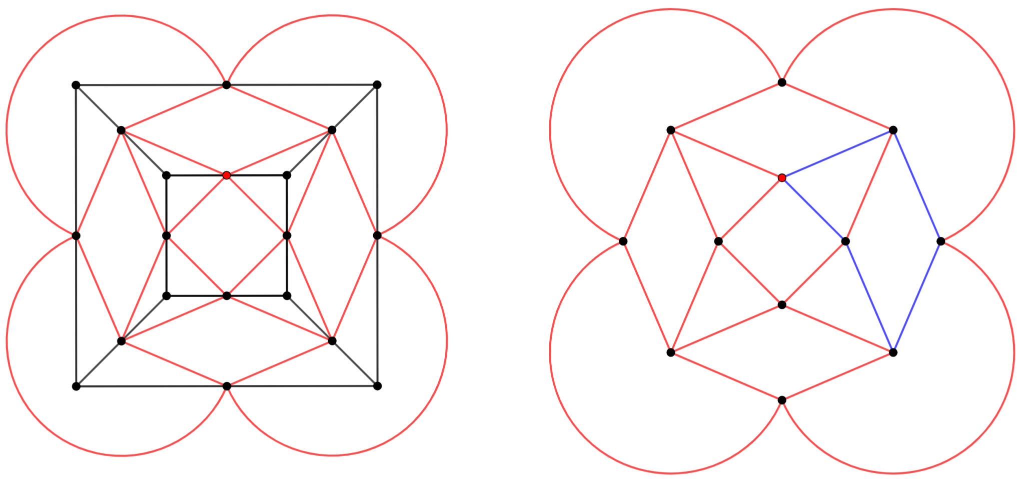
   Výsledek: 109/200

   Řešení: Pravděpodobnost toho, že Anna půjde do parku, je součet pravděpodobností pro jednotlivá počasí; tedy pravděpodobnost, že půjde pokud bude svítit slunce + pokud bude zataženo + pokud bude pršet. Slunce bude svítit s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ a v takovém počasí půjde Anna do parku s pravděpodobností $\frac{3}{4}$. V polovině případů tedy půjde do parku s pravděpodobností $\frac{3}{4}$, což je dohromady $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$. Stejným způsobem spočítáme pravděpodobnosti pro zbylá počasí: $\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{20}$ pro zataženo a $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{50}$ pro to, že bude pršet. Součet pravděpodobností pro jednotlivá počasí nám dá $\frac{3}{8} + \frac{3}{20} + \frac{1}{50} = \frac{109}{200}$.

5. **Na krychli:** Uprostřed jedné hrany krychle se nachází Kouma s Ňoumou. Ňouma se vydal na výlet po hranách krychle. Každé dvě po sobě jdoucí hrany v jeho výletu spolu sdílely vrchol. Celkem udělal pět skoků z hrany na hranu, přičemž žádné dva skoky nekončily na stejné hraně. Kolik takových výletů bylo možných, pokud víme, že skončil opět na hraně, kde stojí Kouma?

   Výsledek: 20

   Řešení: Do rovinného grafu odpovídajícího vrcholům a hranám krychle (černý) si vyneseme nový graf (červený), kde nové vrcholy budou ve středech hran a propojené budou, jestliže dané hrany sdílejí vrchol.



Teď vlastně hledáme uzavřené cesty v červeném grafu délky 5, které procházejí vyznačeným červeným vrcholem (např. modrá). Při takové cestě musíme vždy obejít jeden trojúhelník a jeden čtyřúhelník, kde jeden z těchto útvarů musí obsahovat červený vrchol. Takových kombinací je deset. Pro každou kombinaci můžeme cestu obejít ze dvou stran, tedy celkem 20.

6. **Grill party:** Šest přátel (Adam, Bertík, Cyril, David, Emil a Filip) chce uspořádat Grill party. Mají 6 židlí rovnoměrně rozprostřených kolem stolu (očíslujme je 1-6) a jeden grill. Gril se nachází mezi židlemi s čísly 1 a 2 a dosáhnout se na něj dá jen z těchto dvou židlí. Kouři z grilu jsou vystaveny pouze tyto dvě židle. Kolik je možností, jak si mohou kolem stolu sednout, pokud mají platit následující podmínky?

- Jenom Bertík je expert na grilování, takže musí sedět hned vedle grilu.
- Cyril s Bertíkem chtějí sedět vedle sebe.
- Adam s Emilem chtějí sedět vedle sebe.
- Cyril ani David nechtějí sedět v kouři.
- Bertík nechce sedět ani vedle Emila, ani vedle Filipa.
- Emil nechce sedět naproti Cyrilovi.

Výsledek: 0

Řešení: Nejjednodušší bylo si nakreslit buď plánek míst, kde mohli Adam, Bertík, Cyril, David, Emil a Filip sedět (tedy 6 míst v kruhu a gril mezi 1 a 2), nebo tabulku s řádky pro jména a sloupci pro židle. Do obrázku nebo tabulky pak zaznačujeme postupně informace, které zjišťujeme.

Z první podmínky víme, že Bertík musí sedět na pozicích 1 nebo 2. Z druhé plyne, že Cyril nesedí na 4 ani 5. Ze čtvrté, že Cyril ani David nesedí na 1 ani 2. Bertík nechce sedět vedle Emila ani Filipa, a musí sedět na jedné z pozic 1 nebo 2. Z toho vyplývá, že Emil ani Filip nesedí na 1 ani 2. Židle 1 a 2 tedy patří Adamovi s Bertíkem. Cyrilovi zbývají pozice 3 a 6. Emil nechce sedět naproti němu, proto pro Emila zbývají pozice 4 a 5. Ze třetí podmínky už teď vyplývá, že úloha nemá řešení, proto je výsledek 0.

Pro ty, koho zajímá formální varianta řešení, postup je následující:

(a) Místo jmen budeme používat písmena. a pro Adama, b pro Bertíka atd. Nechť x_i označuje i-tou židli, $x_i(j)$ označuje, že na židli i sedí j.

(b) Vyjádříme všechny podmínky pomocí formule φ výrokové logiky:

$$\varphi = \bigwedge_{i=1}^{6} \bigvee_{j\in\{a,b,c,d,e,f\}} x_i(j)$$

Na každé židli musí někdo sedět.

$$\wedge \bigwedge_{j\in\{a,b,c,d,e,f\}} \bigwedge_{i=1}^{6} \bigwedge_{k=i+1}^{6} \neg(x_i(j) \wedge x_k(j))$$

Nikdo nesedí na dvou židlích najednou.

$$\wedge(x_1(b) \vee x_2(b))$$

Bertík musí sedět u grilu.

$$\wedge \bigvee_{i=1}^{6} \bigvee_{(j,k)\in\{(b,c),(c,b)\}} x_i(j) \wedge x_{i\%6+1}(k)$$

Cyril s Bertíkem sedí vedle sebe.

$$\wedge \bigvee_{i=1}^{6} \bigvee_{(j,k)\in\{(a,e),(e,a)\}} x_i(j) \wedge x_{i\%6+1}(k)$$

Adam s Emilem sedí vedle sebe.

$$\wedge \bigwedge_{j\in\{c,d\}} \bigwedge_{i\in\{1,2\}} \neg x_i(j)$$

Cyril ani David nesedí v kouři.

$$\wedge \bigwedge_{i=1}^{6} \bigwedge_{(j,k)\in\{(b,e),(e,b),(b,f),(f,b)\}} \neg(x_i(j) \wedge x_{i\%6+1}(k))$$

Bertík nesedí vedle Emila ani vedle Filipa.

$$\wedge \bigwedge_{i=1}^{3} \bigwedge_{(j,k)\in\{(c,e),(e,c)\}} \neg(x_i(j) \wedge x_{i+3}(k))$$

Emil a Cyril nesedí naproti sobě.

(c) Formuli φ převedeme do CNF.

(d) Najdeme všechna přiřazení, která splňují formuli φ (enumerací nebo pomocí některého z algoritmů na řešení SAT problémů). V procesu hledání zjistíme, že žádná taková nejsou, a proto je výsledek 0.

7. **Rozdíl:** Pro každé přirozené n označme $V(n)$ následující součet:

$$V(n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor.$$

Najděte nejmenší přirozené x takové, že $V(x+1) - V(x) = 2021$. Jako odpověď zadejte číslo, které vznikne tak, že rozložíte číslo $x+1$ na prvočísla a sečtete všechny exponenty, které se v rozkladu vyskytují.

Výsledek: 88

Řešení: Začněme tak, že se podíváme na hodnotu výrazu $\left\lfloor \frac{n+1}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$. Ta je zřejmě 1 právě tehdy, když $k|n+1$, a 0 jinak. Tím pádem

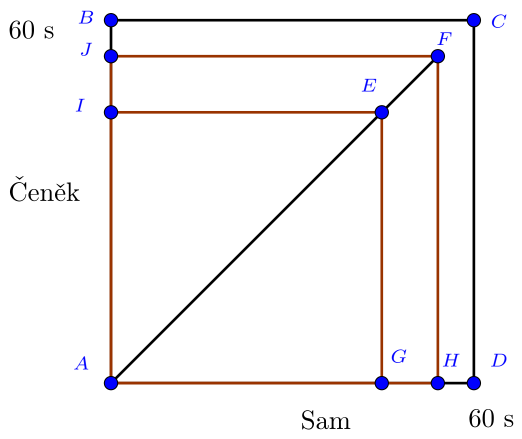
$$V(x+1) - V(x) = \sum_{k=1}^{x+1} \left\lfloor \frac{x+1}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$$

je součet několika jedniček a nul, přičemž za každého dělitele čísla $x+1$ máme právě jednu jedničku. Dohromady tak dostáváme, že $V(x+1) - V(x)$ je počet (kladných) dělitelů čísla $x+1$ (počet dělitelů čísla n budeme značit $\tau(n)$). Hledáme tedy nejmenší číslo takové, že má 2021 dělitelů. Pro $n \in \mathbb{N}$, jehož prvočíselný rozklad je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, platí, že $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$. Jelikož $2021 = 43 \cdot 47$, tak aby přirozené číslo $x + 1$ mělo 2021 dělitelů, tak musí platit, že $x + 1 = p^{2020}$ nebo $x + 1 = p^{42}q^{46}$ (p, q jsou provočísla). Jelikož $3^{42} \cdot 2^{46} < 2^{2020}$, tak $x + 1$ bude určitě druhého tvaru, což znamená, že součet exponentů je 88.

8. **Semafor:** Když k semaforu přijde chodec a je zelená, okamžitě přejde na druhou stranu silnice, a když je červená, tak čeká, dokud se semafor nepřepne na zelenou, a pak přejde. Na semaforu je vždy 55 sekund červená, pak 5 sekund zelená, pak opět 55 sekund červená atd. V každém z těchto minutových cyklů přijdou k semaforu přesně dva chodci, oba v náhodné, na sobě nezávislé okamžiky (pro každý interval délky k sekund je pravděpodobnost, že chodec přijde někdy v tomto intervalu, k/60). Když Sam přišel k semaforu, byla červená a už tam čekal Čeněk. Jaká je pravděpodobnost, že Sam musel čekat víc než 10 sekund?

   Výsledek: 81/121

   Řešení:



   Každý možný příchod Sama a Čeňka je zachycen jako bod ve čtverci $ABCD$. Body H a J odpovídají 55 sekundám (přepnutí z červené na zelenou) a body G a I 45 sekundám. Díky tomu, že Čeněk přišel před Samem a oba přišli na červenou, víme, že příchod je někde v trojúhelníku AHF s pravděpodobností 1. Úloha se ptá, jaká je pravděpodobnost, že bod je v trojúhelníku AGE. Jde nám tedy o poměr velikostí těchto trojúhelníků, který je $\frac{81}{121}$ (výpočet lze zjednodušit, když si uvědomíme, že stačí spočítat poměry velikostí čtverců $AHFJ$ a $AGEI$).

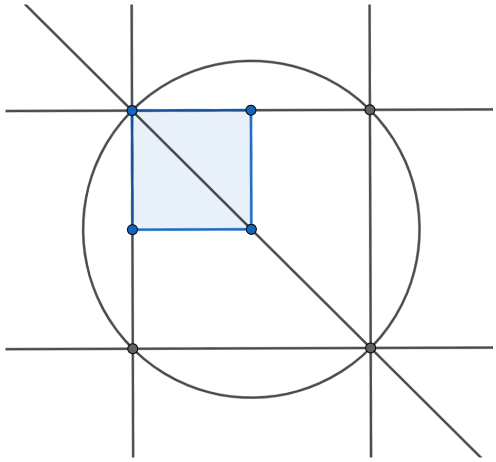
9. **Euclidea:** Hloupětínský mudrc Neuklides se živí prodáváním geometrických operací v rovině.

   - Body rozdává zdarma, avšak je povoleno je umístit pouze na průsečíky již zakoupených objektů.
   - Dva určené body spojí přímkou za 1 Hloupar.
   - Kružnici kolem daného bodu procházející jiným daným bodem sestrojí za 10 Hlouparů.

   Bubla přišla za Neuklidem se čtyřmi body udávající čtverec o straně a (však beze stran) a potřebovala narýsovat čtyři přímky vymezující čtverec o straně $2a$. Kolik nejméně Hlouparů musela utratit? Jiné operace než ty Neuklidovy nejsou povoleny.

   Výsledek: 15

   Řešení: Bez kružnic pouze s přímkami si nevystačíme, byli bychom schopni nalézt už jen jeden další bod, a sice průsečík úhlopříček. Dovolíme-li si udělat kružnici, je nejvýhodnější ji udělat s poloměrem rovným délce úhlopříčky a celý čtverec narýsovat pomocí 5 přímek (viz obrázek). Méně to nejde, protože na čtverec jsou potřeba minimálně 4 přímky a bez pomocné páté přímky není kudy vést strany čtverce.



10. **Divoká funkce:** Neznámá funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ splňuje následující dvě vlastnosti pro každé a a b: $f(ab) = f(a) + f(b)$ a $f(a) < a$. Jaká je nejvyšší možná hodnota $f(8!)$? ($\mathbb{N}_0$ je množina všech přirozených čísel a nuly.)

    Výsledek: 21

    Řešení: Ukažme, že funkce splňující $f(1) = 0$, $f(p) = p - 1$, $f(ab) = f(a) + f(b)$ je řešením funkcionální rovnice. Trvzení $f(x) < x$ ukážeme indukcí vzkledem k x. Pokud x je 1, nebo prvočíslo, pak trzení zřejmě platí. Pokud x je složené číslo, tak existují $a > 1$ a $b > 1$ tak, že $ab = x$. Jelikož $a > 1$ a $b > 1$, pak platí $a + b \leq ab$. Proto $f(ab) < a + b \leq ab$. Zbývá spočítat $f(8!) = 3f(2) + f(7) + (f(3) + f(2)) + f(5)) + (f(2) + f(2)) + f(3) + f(2) + f(1) = 3 + 6 + 2 + 1 + 4 + 1 + 1 + 2 + 1 + 0 = 21$

    Ukážeme maximalitu výrazu $f(8!)$.

$$f(8!) = 3f(2) + f(7) + (f(3) + f(2)) + f(5)) + (f(2) + f(2)) + f(3) + f(2) + f(1) \leq$$

$$\leq 3 + 6 + 2 + 1 + 4 + 1 + 1 + 2 + 1 + 0 = 21.$$

11. **L jako lehké, L jako lichoběžník:** Máme tětivový lichoběžník $ABCD$. Víme, že velikost úhlu ABC je $63°$ a velikost úhlu DAC činí $21°$. Označme si průsečík úhlopříček v našem lichoběžníku jako S. Kolik stupňů měří úhel BSC?

    Výsledek: 84

    Řešení: Důležité je si uvědomit, že má-li být lichoběžník tětivový (tj. vepsaný do kružnice), musí být rovnoramenný. Předpokládejme, že jeho základny jsou úsečky AB, CD: potom máme $|\measuredangle DAB| = |\measuredangle ABC| = 63°$ a $|\measuredangle ADC| = |\measuredangle BCD| = 180° - 63° = 117°$.

    Z osové symetrie platí $|\measuredangle DBC| = |\measuredangle DAC| = 21°$. Tedy $|\measuredangle ABD| = |\measuredangle ABC| - |\measuredangle DBC| = 63° - 21° = 42°$. Potom však také $|\measuredangle ACD| = 42°$ (opět ze symetrie). To znamená, že pro úhly $\measuredangle ACB$ a $\measuredangle ADB$ získáváme $|\measuredangle ACB| = |\measuredangle ADB| = 117° - 42° = 75°$.

    Nyní už můžeme spočítat $|\measuredangle BSC| = 180° - |\measuredangle SCB| - |\measuredangle SBC| = 180° - |\measuredangle ACB| - |\measuredangle DBC| = 180° - 75° - 21° = 84°$.

12. **Šlunce, Žemě a Mněšíc:** Šluneční soustava je podobná té naší, sluneční soustavě – Žemě obíhá kolem Šlunce a Mněšíc kolem Žemě, ale Mněšíc je ve dvakrát větší vzdálenosti od Žemě než Žemě od Šlunce. Mněšíc oběhne celou Žemi za jeden mněšíc, Žemě oběhne Šlunce za dvanáct mněšíců. Mněšíc obíhá Žemi po směru hodinových ručiček, zatímco Žemě obíhá Šlunce proti směru. Kolikrát za dvanáct mněšíců tvoří Žemě, Mněšíc a Šlunce pravoúhlý trojúhelník?

    Výsledek: 52

    Řešení: Tělesa tvoří pravoúhlý trojúhelník za jeden mněšíc (pokud by se pohyboval jen Mněšíc) právě čtyřikrát. Protože se tělesa pohybují v různém směru vůči sobě, stačí si uvědomit, že otočky se díky tomu sečtou, a výsledkem je tedy $(12 + 1) \cdot 4 = 52$.

13. **Injektivní polynom:** Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je prostá funkce daná předpisem $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$. Najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu $\frac{1}{a^2} + b$.

    Výsledek: 1.15470

Řešení: Zkoumejme, kdy kubický polynom f není injektivní. To nastane právě tehdy, když existují $t \neq u$ takové, že $t^3 + at^2 + bt + c = u^3 + au^2 + bu + c$. Upravujme:

$$\begin{aligned} t^3 - u^3 + a(t^2 - u^2) + b(t - u) &= 0 \\ (t - u)(t^2 + tu + u^2) + (t - u)(at + au) + (t - u)b &= 0 \\ (t - u)(t^2 + t(u + a) + u^2 + au + b) &= 0 \\ t^2 + t(u + a) + u^2 + au + b &= 0. \end{aligned}$$

Jelikož $t \neq u$, tak všechny úpravy byly ekvivalentní. Tedy hledané $t \neq u$ existují právě tehdy, když polynom $g(x) = x^2 + x(u + a) + u^2 + au + b$ má reálný kořen různý od u.

- Z Viètových vztahů dostáváme, že u je jediným reálným kořenem právě tehdy, když

$$\begin{aligned} u + a = -2u \wedge u^2 + au + b = u^2 &\iff a = -3u \wedge b = -au \\ &\iff a = -3u \wedge 3b = a^2. \end{aligned}$$

- Reálný kořen má právě tehdy, když jeho diskriminant je větší nebo roven 0.

$$0 \leq D = (u + a)^2 - 4(u^2 + au + b) = -3u^2 - 2ua + a^2 - 4b$$

  Toto nastane právě tehdy, když polynom $-3x^2 - 2xa + a^2 - 4b$ má reálný kořen, což nastane právě tehdy, když jeho diskriminant je větší roven 0:

$$\begin{aligned} 0 \leq D = 4a^2 - 4(-3)(a^2 - 4b) &\iff 0 \leq a^2 + 3a^2 - 12b = 4a^2 - 12b \\ &\iff a^2 \geq 3b. \end{aligned}$$

  Pro $a^2 = 3b$ bude diskriminant polynomu g tvaru

$$-3u^2 - 2ua - \frac{a^2}{3} = -\frac{1}{3}(9u^2 + 6ua + a^2) = -\frac{1}{3}(3u + a)^2,$$

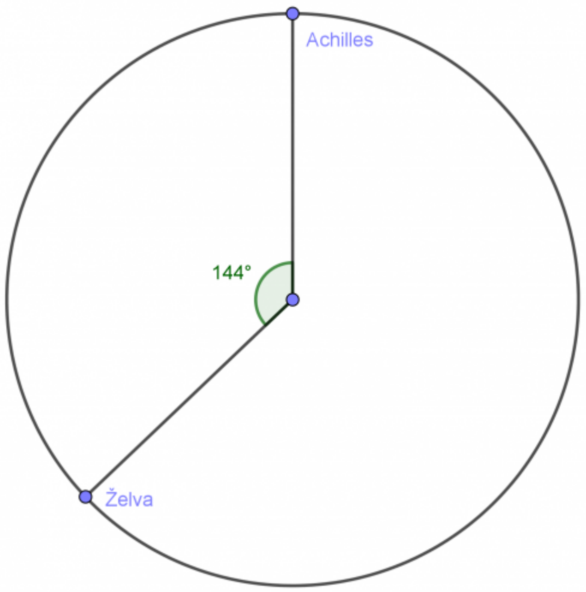
  tedy g bude mít kořen právě tehdy, když bude platit $a = -3u$, což spolu s $a^2 = 3b$ už znamená, že g má jediný kořen a tím je u.

Dohromady tedy dostáváme, že f není injektivní právě tehdy, když $a^2 > 3b$. Tedy f je injektivní právě tehdy, když $a^2 \leq 3b$. Nyní již můžeme konečně zkoumat výraz $\frac{1}{a^2} + b$:

$$\frac{1}{a^2} + b \geq \frac{1}{a^2} + \frac{a^2}{3} \overset{AG}{\geq} 2\sqrt{\frac{a^2}{3a^2}} = 2\sqrt{\frac{1}{3}} \doteq 1.15470.$$

Pro $a = \sqrt[4]{3}$ a $b = \frac{a^2}{3}$ zkoumaný výraz této hodnoty opravdu nabývá.
Poznamenejme ještě, že závěrečný odhad se dal místo AG-nerovnosti provést i pomocí derivací nebo hodit do wolframu. Navíc se pomocí derivací dal snadněji vyřešit i náš předlouhý rozbor toho, kdy je kubický polynom injektivní.

14. **Ach, žel...** Achilles a želva se pohybují po kružnici o poloměru $\frac{1}{2\pi}$ metrů; želva jde stálou rychlostí $\frac{1}{5}$ m/s proti směru hodinových ručiček (pr. h.). Achilles běží zprvu rychlostí $\frac{2}{5}$ m/s pr. h., ale po každé sekundě se jeho rychlost sníží na polovinu, tj. první sekundu běží $\frac{2}{5}$ m/s, druhou sekundu $\frac{1}{5}$ m/s atd. Počáteční poloha Achilla i želvy je vidět na obrázku. Určete čas v sekundách, kdy se Achilles a želva poprvé setkají.



Výsledek: 216/31

Řešení: Pro začátek si zapíšeme do tabulky, jakou rychlostí běží Achilles v prvních několika sekundách.

Sekunda	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Achillova rychlost	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{320}$

Nyní si spočítáme, že obvod kružnice je 1 m, tedy Achilles je na počátku od želvy vzdálený $\frac{2}{5}$ m. Uvědomíme si, že Achilles želvu nikdy nedohoní, naopak želva dostihne Achilla. Označme počáteční pozici Achilla jako 0 a postupujme proti směru hodinových ručiček. Na konci každé sekundy jsou pozice Achilla a želvy následující:

Konec sekundy č.	0	1	2	3	4	5	6	7
Pozice Achilla	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{31}{40}$	$\frac{63}{80}$	$\frac{127}{160}$
Pozice želvy	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{1}{5}=\frac{4}{20}$	$\frac{2}{5}=\frac{16}{40}$	$\frac{3}{5}=\frac{48}{80}$	$\frac{4}{5}=\frac{128}{160}$

Všimneme si, že mezi šestou a sedmou sekundou musela želva Achilla předběhnout. Stačí nám tedy zjistit, v jakém okamžiku to přesně bylo.

Mezi šestou a sedmou sekundou má Achilles rychlost $\frac{1}{160}$, rozdíl vzdáleností Achilla a želvy na konci šesté sekundy je $\frac{15}{80}$ m.

$$\frac{s_a}{v_a} = \frac{s_z}{v_z}$$
$$\frac{s_z - \frac{15}{80}}{\frac{1}{160}} = \frac{s_z}{\frac{1}{5}}$$
$$160s_z - 30 = 5s_z$$
$$s_z = \frac{6}{31}$$

$t = \frac{s_z}{v_z} = \frac{30}{31}$

Celkový čas je tedy $6 + \frac{30}{31} = \frac{216}{31}$

15. **Čtverce z papíru:** Honzík si stříhá čtverce z papíru A4. Vždy odstřihne jediným rovným řezem čtverec, jehož délka strany (a tedy strana samotná) je stejná jako kratší strana papíru. Pokračuje se zbytkem papíru bez odstřiženého čtverce, dokud mu vznikají obdélníky (pokud rozstřižením vzniknou dva čtverce, končí). Kolik čtverců takto získá? Pozn.: papír A4 má rozměry 297 x 210 mm.

    Výsledek: 11

    Řešení: Po prvním odstřižení získáme 1 čtverec o hraně délky 210. Zbyde nám pruh 210×87. Po druhém odstřižení máme dva čtverce o hraně 87 a pruh 87×36. Po třetím zbydou dva čtverce o hraně 36 a pruh 36×15. Po čtvetém máme opět dva čtverce, tentokrát o hraně 15 a pruh 15×6. Z něj získáme dva čtverce o hraně 6 a pruh 6×3. Jeho rozstřihnutím na poloviny získáme dva čtverce 3×3. Stříhání zde končí. Postupně jsme nastříhali dohromady 11 čtverců.

16. **Vzájemná dominance:** 2021 týmu hraje turnaj, v němž se každý s každým utká právě jednou. Řekneme, že trojice týmu A, B, C je ve *vzájemné dominanci*, pokud A porazil B, B porazil C a C porazil A. Předpokládejme, že mezi týmy jsou BRKOSTEAM a aMATHéři. Víme, že počet trojic, které jsou ve vzájemné dominanci a obsahují BRKOSTEAM je maximální možný. Kolik nejvíce může existovat trojic, které jsou ve vzájemné dominanci a obsahují aMATHéry?

    Výsledek: 255530

    Řešení: Nejprve si rozmyslíme, co znamená, že počet vzájemně dominantních trojic obsahujících BRKOSTEAM je maximální možný. BRKOSTEAM odehrál v tomto turnaji právě 2020 zápasů. Kdyby například vyhrál všechny z těchto zápasů, pak by nemohl být obsažen v žádné vzájemně dominantní trojici, jelikož by neexistoval žádný tým, který ho porazil. Označme tedy BRKOSTEAM jako B, aMATHéři jako A, všechny týmy, které B porazil, jako $A, 2, 3, \ldots, n$ a všechny týmy, které porazily B, jako $n+1, n+2, \ldots, 2020$. Z cykličnosti zadání nezáleží na tom, jestli A porazil nebo prohrál s B.

    Pokud budeme předpokládat, že všechny týmy $A, 2, 3, \ldots, n$ porazily všechny týmy $n+1, n+2, \ldots, 2020$, pak počet vzájemně dominantních trojic obsahujících B bude $n \cdot (2020 - n)$. Je jednoduché tento výraz maximalizovat - největší hodnoty dosáhne pro $n = 1010$ a je evidentní, že to je největší možný počet vzájemně dominantních trojic, které obsahují B. Nyní se zaměřme na tým A. Tým A je jistě (z podmínky maximálního počtu dominantních trojic s B) obsažen v 1010 vzájemně dominantních trojicích - a všechny obsahují tým B. Toto je největší možný počet trojic, které jsou vzájemně dominantní a obsahují A i B (jednoduché rozmyslet). Dále víme, že A určitě porazil všechny týmy $1011, 1012, \ldots, 2020$. Tedy nemůže existovat žádná dominantní trojice obsahující A a dva týmy z množiny týmů, které porazil.

    Zároveň nemůže existovat žádná dominantní trojice obsahující A, jeden z týmů $2, 3, \ldots, 1010$ a jeden z týmů $1011, 1012, \ldots, 2020$, jelikož by A i tým z první množiny oba porazily tým z druhé množiny kvůli maximalitě dominantních trojic obsahujících B z předpokladu. Tedy jediný způsob, jak ještě může existovat vzájemně dominantní trojice obsahující A, je ten, když zbylé dva týmy v trojici budou z množiny $2, 3, 4, \ldots, 1010$. Ta není totiž svázaná kritérii pro maximalitu dominantních trojic s B. Stejným argumentem jako na začátku řešení je největší možný počet těchto trojic $504 \cdot 505$, tudíž celkový největší počet dominantních trojic obsahujících tým A je $504 \cdot 505 + 1010 = 255530$.

17. **Hodnota Brkosu:** Na obrázku je daná jednoduchá rovnice: ŠOKY+BRNO=BRKOS. Nahraďte písmena ciframi, kde dvě rozdílná písmena představují různé cifry. Jakou hodnotu má Brkos? (Pozn.: S a Š jsou rozdílná písmena.)

$$\begin{array}{ccccc} & \text{Š} & \text{O} & \text{K} & \text{Y} \\ & \text{B} & \text{R} & \text{N} & \text{O} \\ \hline \text{B} & \text{R} & \text{K} & \text{O} & \text{S} \end{array}$$

    Výsledek: 10652

    Řešení:

    - Součet 2. sloupce zleva je dvouciferný. Víme, že $B = 1$, tudíž součet tohoto sloupce může být maximálně 11. Ze zadání víme, že 2 rozdílná písmena představují různé cifry, tedy $R \neq 1$. Víme tedy, že $R = 0$
    - Protože je $R = 0$, součet v prostředním sloupci nebude větší než 10. (Kdyby bylo $O = 9$ a z předchozího sloupce se přenášela 1, tak by byl dvouciferný, ale K by muselo být 0, to je ale už R). Jedinou možností je tedy Š= 9.

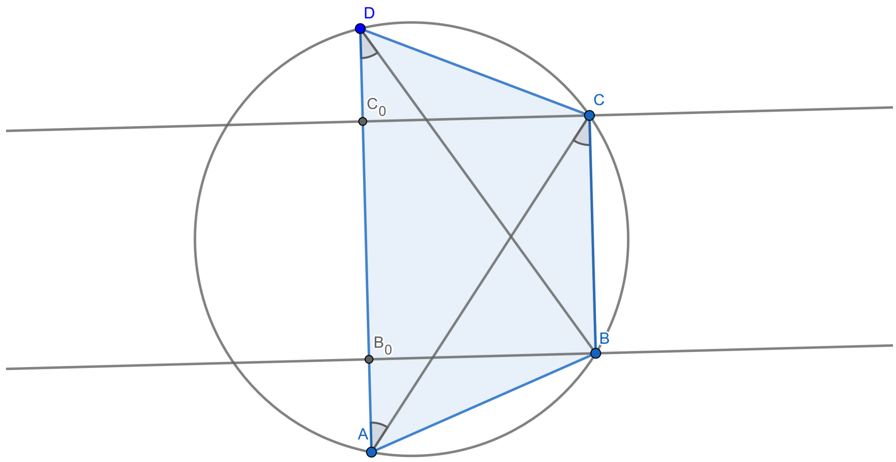
- K je o 1 větší než O (protože $R = 0$). Součet 2. sloupce zprava je proto dvouciferný. Musí tedy být $N = 8$ nebo $N = 9$. Jelikož, Š$= 9$, tak $N \neq 9$. Řešením je tedy $N = 8$.
- Protože je $N = 8$, první sloupec zprava musí být dvouciferný. Zároveň ale nenajdeme takovou kombinaci Y a O, aby $Y + O > 12$. (Y i O mohou být maximálně 7, ale $O < K$, tedy $O \leq 6$. Tedy pro $Y = 7$ máme $O \leq 5$ a pro $O = 6$ máme $Y = 5$, protože $K = O + 1 = 7$.) Protože 0 i 1 už jsou zabrané, $S \geq 2$ a proto $S = 2$, $Y = 7$, $O = 5$ a $K = O + 1 = 6$.

  Jediným možným řešením je tedy rovnice $9567 + 1085 = 10652$.

18. **Tětiváček:** Tětivový čtyřúhelník $ABCD$ splňuje $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle ADB|$, $|AB| = 13$, $|BC| = 4$ a $|AD| = 14$. Určete velikost úsečky AC.

    Výsledek: 15

    Řešení: Úhly ADB a ACB jsou obvodové pro stejný oblouk, mají tedy stejnou velikost. Potom však rovněž $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle ACB|$, tedy se jedná o střídavé úhly dokazující, že strany AD a BC jsou rovnoběžné. Ze symetrie pak plyne, že $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník. Tedy $|AB| = |CD|$.



    Označme C_0 patu kolmice procházející bodem C na přímku AD. Potom $|DC_0| = \frac{|AD|-|BC|}{2} = \frac{14-4}{2} = 5$. Z Pythagorovy věty potom platí $|CC_0|^2 = |CD|^2 - |DC_0|^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2$. Z další Pythagorovy věty dostaneme $|AC|^2 = |AC_0|^2 + |CC_0|^2 = (4 + 5)^2 + 12^2 = 15^2$.

19. **Milionový příklad:** Máme přirozené číslo n, jehož součet dělitelů je menší než třicet milionů. Určete, kolik nejvýše prvočísel může dělit n.

    Výsledek: 7

    Řešení:

    Připomeňme, že je-li prvočíselný rozklad čísla n tvaru

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i},$$

    kde p_i jsou různá prvočísla a $a_i > 0$, potom součet dělitelů čísla n můžeme psát ve tvaru

$$\prod_{i=1}^{k} (1 + p_i + \cdots + p_i^{a_i}).$$

    Tento součin máme shora ohraničený číslem 30 milionů a chceme, aby n mělo co nejvíce prvočíselných dělitelů, tedy aby tento součin měl co nejvíce závorek. Volme $a_i = 1$ pro každé i (tzn. n bude součin různých prvočísel). Potom součet dělitelů čísla n je součin závorek tvaru $(1 + p)$, kde p je prvočíslo dělící n. Jednotlivé závorky chceme mít co nejmenší (abychom jich mohli mít co nejvíce), tj. náš postup bude následující: budeme brát postupně prvočísla od nejmenšího (tj. 2, 3, 5,...) a budeme čekat, kdy součin čísel $(1 + p)$ přesáhne 30 milionů. To se stane pro prvočíslo 19; tedy dojdeme k $n = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 17$, což má 7 prvočíselných dělitelů.

20. **Dívčí válka:** Na nekonečné šachovnici je $m \in \mathbb{N}$ dam tak, že každá z nich ohrožuje alespoň $\lceil \frac{m}{2021} \rceil$ ostatních dam. Najděte největší takové m, pro které tato situace může nastat. Zápis $\lceil x \rceil$ značí horní celou část z čísla x. Dámy se ohrožují, pokud by se ohrožovaly v klasické hře šachu.

    Výsledek: 8084

    Řešení. Je-li na nekonečné šachovnici konečně mnoho dam, můžeme vybrat tu, která je v nejvyšším obsazeném řádku nejvíce napravo. Tato dáma zřejmě nemůže ohrožovat více než 4 dámy. Z toho máme horní odhad na řešení $2021 \cdot 4 = 8084$. Tohoto počtu je možné dosáhnout například tak, že postavíme dáme na okraj čtverce o hraně délky 2023 a vynecháme z něj rohy.

21. **Oboustranná pyramida:** Nechť $n \in \mathbb{N}$. Z kostek (krychlí) o délce hrany 1 stavíme n-pyramidu. Základna n-pyramidy má tvar čtverce a je složená z $n \times n$ kostek. Nad základnou je nadzemní část, která se skládá ze čtvercových pater. Každé další patro má hranu o 1 kratší než to předchozí (první patro má hranu délky $n-1$). Pod základnou je podzemní část, která vypadá stejně, jako ta nadzemní. Výška pyramidy se počítá jako počet pater (nadzemních i podzemních + 1 (základna)). Kolik kostek je potřeba k postavení pyramidy výšky 99?

    Výsledek: 83350

    Řešení: Řešení si rozdělíme na podproblémy. Potřebujeme zjistit počet kostek dvou stejných pyramid o 49 patrech (jedné nad a druhé pod zemí) a základny. Nad základnou je 49 pater, proto má hranu délky 50 a na její stavbu je potřeba (50^2) kostek. Počet kostek potřebných pro jednu z pyramid je součtem čtverců $\sum_{n=1}^{49} n^2$, který odpovídá vzorci $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$ pro $n = 49$. Výsledný počet kostek, které potřebujeme, je tedy $50^2 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{49} n^2 = 50^2 + 2 \cdot \frac{49\cdot(50)\cdot(99)}{6} = 83350$.

22. **Dlouhá suma:** Určete hodnotu $\sum_{n=1}^{20212021!} \cos(\frac{2n\pi}{2\cdot 20212021!+1})$.

    Výsledek: -1/2

    Řešení: Tento příklad je teoreticky trochu náročnější. Jsou dva způsoby, jak tuto úlohu řešit: jeden využívá integrály a druhý komplexní čísla. Ukážeme si ten druhý.

    Podle základní věty algebry má polynom $x^n - 1$ pro každé přirozené číslo n právě n komplexních kořenů, kterým říkáme *n-té odmocniny z jedné*. Ty jsou tvaru $e^{\frac{2\pi ik}{n}} = \cos\frac{2\pi ik}{n} + i\sin\frac{2\pi ik}{n}, k \in \{1, 2, ..., n\}$. Předpokládejme dále, že n je liché, tj. $n = 2m + 1$ pro přirozené číslo m.

    Podívejme se na sumu

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2\pi ik}{n}},$$

    tj. sčítáme všechny n-té odmocniny z jedné kromě jedničky. Jelikož úhly $\frac{2\pi ik}{n}$, $\frac{2\pi i(n-k)}{n}$ mají stejný kosinus a opačný sinus, máme pro všechna k od 1 do m následující vztah:

$$e^{\frac{2\pi ik}{n}} + e^{\frac{2\pi i(n-k)}{n}} = 2\cos\frac{2\pi ik}{n}.$$

    Můžeme si tudíž sumu S přepsat jako

$$S = 2\sum_{k=1}^{m} \cos\frac{2\pi ik}{n}.$$

    Ovšem na druhou stranu, S je součet všech kořenů polynomu

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + \cdots + x^{n-1},$$

    což je z Viètových vztahů rovno koeficientu u x^{n-2} s opačným znaménkem, tj. -1. Tedy

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}S = \sum_{k=1}^{m} \cos\frac{2\pi ik}{n}.$$

    Dosadíme-li $m = 20212021!$, dostáváme řešení naší úlohy.

23. **Fredovy půlkružnice:** Žabák Fred stojí na krajnici silnice široké 4 metry a potřebuje přeskákat na druhou stranu. Trajektorie každého jeho skoku má tvar půlkružnice a vždy skáče pouze směrem dopředu. Nazvěme „pozemskou délku skoku“ jako vzdálenost místa odrazu a místa dopadu; dále pak „délku trajektorie skoku“ jako délku půlkružnice, kterou Fred skáče. Jak velké skoky bude Fred dělat, závisí na různých faktorech.

- První Fredův skok má pozemskou délku 2 metry.
- Pozemská délka každého dalšího skoku je definována takto:
  - pokud Fredův skok je (pozemsky) kratší než 30 centimetrů, jeho další skok bude mít pozemskou délku stejnou, jako třetina délky trajektorie předchozího skoku;
  - jinak má jeho skok pozemskou délku poloviční, než pozemská délka předchozího kroku.
- Pokud by měl Fred přeskočit přes hranici cesty, neudělá to a skočí raději menší skok tak, aby dopadl přímo na hranici cesty.

Jaký je součet (v metrech) délek trajektorií všech Fredových skoků při přeskakování této silnice?

Výsledek: 6.28319

Řešení. Nechť $r_1, r_2, \ldots, r_n$ jsou poloměry délek kružnic, po kterých Fred skáče. Součet délek trajektorií tedy bude $\pi r_1 + \pi r_2 + \ldots + \pi r_n = \pi(r_1 + r_2 + \ldots + r_n) = 2\pi$ metrů, jelikož součet průměrů kružnic musí být 4 metry a tedy součet poloměrů je 2 metry.

24. **Vítek, Tom, Tom a Tom:** Vítek, Tom, Tom a Tom hrají hru. Všichni čtyři stojí v kruhu a střídají se v házení kostkou. Hráč, který je právě na tahu, vždy vyzývá hráče po své levici. Oba hodí šestistennou kostkou. V případě remízy házou znovu a to do té doby, dokud jeden nezvítězí. Pokud vyhrál vyzyvatel, stává se vítezem celé hry a hra končí. V opačném případě se vyzvaný hráč stává novým vyzyvatelem a opět hraje s hráčem po své levici. Prvním vyzyvatelem je Vítek. Jaká je pravděpodobnost, že se stane absolutním výhercem hry?

    Výsledek: 8/15

    Řešení: Zaměřme se nejdříve na jeden souboj. Všimeme si, že hra je symetrická, oba hráči házou stejnou kostkou a mají stejné podmínky pro vítězství. Proto mají oba stejnou šanci na vítězství v souboji. Vítek má tedy pravděpodobnost 1/2, že vyhraje v prvním kole, a 1/2, že hra bude pokračovat dál. Pokud nevyhraje, musí každý z následujících tří vyzyvatelů prohrát, aby měl Vítek druhou šanci. Je tedy pravděpodobost 1/8, že se Vítek opět stane vyzyvatelem. V ten okamžik bude mít Vítek stejnou šanci na vítězství jako na začátku. Pravděpodobnost p toho, že Vítek vyhraje proto splňuje rovnost

    $$p = 1/2 + 1/2 \cdot p/8.$$

    Správná odpověď je proto $p = 8/15$.

25. **Součet kořenů:** Mějme normovaný polynom P(x) stupně 42, který má 42 celočíselných kořenů (každý počítán tolikrát, jaká je jeho násobnost) a platí P(0)=97. Jaké nejmenší kladné hodnoty může nabývat součet všech jeho kořenů?

    Výsledek: 58

    Řešení: Jelikož P je normovaný a má tolik kořenů, kolik je jeho stupeň, máme faktorizaci $P(x) = \prod_{i=1}^{42}(x - \alpha_i)$, kde α_i jsou kořeny. Viètovy vztahy nám tedy dají

    $$97 = P(0) = (-1)^{42} \prod_{i=1}^{42} \alpha_i.$$

    Tedy součin 42 celých čísel je roven 97, což je ale prvočíslo. Tedy jeden kořen je ± 97 a dalších 41 jsou plus minus jedničky – jejich součet je v absolutní hodnotě nejvýše 41. Tedy hledáme-li nejmenší kladnout hodnotu součtu kořenů, budeme chtít, aby jeden z nich byl 97, a poté přičíst co nejvíc minus jedniček. Jelikož součin 41 minus jedniček je záporný, chceme-li, aby jeden kořen byl 97, můžeme mít nejvýše 40 minus jedniček. Hledané minimum tedy bude $97 - 40 + 1 = 58$.

26. **Klobouk:** Petr a Lucka vyvíjejí následující aktivitu. Petr na stůl vyskládal jednokoruny, dvoukoruny, pětikoruny a desetikoruny na hromádky, na každé hromádce je v součtu hodnota 11 korun a každá možná kombinace mincí, která dá v součtu 11, je zastoupena právě jednou. Každou z hromádek pak smete do vlastního pytlíku a tyto pytlíky umístí do klobouku. Lucka pak naslepo vytáhne právě jeden z pytlíků a po jedné postupně mince vytahuje. Jaká je pravděpodobnost, že poslední vytažená mince bude desetikoruna?

    Výsledek: 1/24

    Řešení: Vypíšeme si všechny možné kombinace mincí o zadaných hodnotách, které dají v součtu 11; těchto kombinací je 12. Desetikoruna se nachází pouze v jedné z nich, na hromádce s jedinou desetikorunou je navíc pouze jedna další mince, je tedy pravděpodobnost $\frac{1}{2}$, že desetikorunu z daného pytlíku vytáhne jako poslední, a pravděpodobnost že vytáhne pytlík s desetikorunou je $\frac{1}{12}$. Celkem je tedy pravděpodobnost $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} = \mathbf{\frac{1}{24}}$.

27. **Doodle:** Deset lidí hlasuje o termínu srazu. K dispozici je osm termínů. Každý z hlasujících dal primární hlas třem termínům a sekundární hlas dvěma. Každému termínu smí dát nanejvýš jeden hlas. Zvolen bude ten termín, jenž bude mít nejvíce primárních hlasů, v případě shody rozhodnou hlasy sekundární (v případě trvající shody je vybrán jeden z vítězných termínů). Označme počet primárních hlasů vítězného termínu p, a počet sekundárních hlasů vítězného termínu s. Určete nejmenší možnou hodnotu tohoto výrazu: $17p + 2s$.

    Výsledek: 70

    Řešení: Hlavně chceme, aby vítězný termín dostal co nejméně primárních hlasů (ty mají totiž v minimalizovaném výrazu větší váhu než hlasy sekundární), čehož docílíme tak, že je rozdělíme co nejrovnoměrněji. Bylo uděleno 30 primárních hlasů, což znamená, že při rovnoměrném rozdělení dostaly dva termíny 3 hlasy a šest termínů 4 hlasy. Vítězný termín tedy dostal 4 primární hlasy.

    Aby dostal vítězný termín málo sekundárních hlasů, musely hodně sekundárních hlasů dostat termíny se třemi primárními hlasy. Nejvýše mohl každý z nich dostat 10 hlasů, tedy 7 sekundárních. Celkem bylo uděleno 20 sekundárních hlasů, a tedy pokud zbylých šest sekundárních hlasů rozdělíme rovnoměrně mezi termíny se čtyřmi primárními, dostane každý jeden.

    Celkem tedy dostal vítězný termín 4 primární a jeden sekundární hlas. Ověření, že takové rozdělení hlasů je možné, necháváme na čtenáři (stačí najít konkrétní příklad, jak mohlo k takovému rozdělení hlasů dojít).

28. **Už zase geometrie.** Je dána kružnice k. Body L a M vytnou na kružnici k tětivu délky 28. Kružnice l a m mají vnitřní dotyk s kružnicí k v bodech L a M, přičemž kružnice l a m mají menší poloměr, než k. Na kružnicích l a m jsme zvolili body A a B takové, že existuje Bod C ležící v průniku úseček AB a LM. Jaká je největší možná hodnota $|AC| \cdot |BC|$?

    Výsledek: 196

    Řešení: Pokud je úsečka AB různá od LM, označme průsečíky AB s k jako X, Y. Potom $|AC| \cdot |BC| \leq |XC| \cdot |YC|$. Z mocnosti bodu C ke kružnici k pak máme $|XC| \cdot |YC| = |LC| \cdot |MC|$.

    Maximalizujeme-li součin $|AC| \cdot |BC|$, stačí zvolit $A = L, B = M$. Bod C nyní může být libovolný bod na úsečce LM. AG nerovnost nám dá

    $$28 = |LM| = |LC| + |CM| \geq 2\sqrt{|LC| \cdot |CM|}.$$

    Tedy máme horní odhad $|LC| \cdot |CM| \leq \frac{28^2}{4} = 196$. Můžeme této hodnoty dosáhnout? V AG nerovnosti nastává rovnost, právě když jsou všechny sčítance stejné, tedy stačí najít C tak, aby platilo $|LC| = |CM|$. Takový bod existuje; je to střed úsečky LM.

29. **Šneci na mřížce:** Na šachovnici 2021x2021 (sloupce a řádky jsou indexovány 1-2021) se uprostřed každého pole nachází šnek (uvažujme bod). Každý šnek se pohybuje rovnoměrným pohybem rychlostí jedno pole za minutu jedním ze čtyř základních směrů. Na začátku se šnek začínající na souřadnici $[i, j]$ pohybuje ve směru závislém na zbytku čísla $i + j$ po dělení 4: 0-nahoru, 1-dolů, 2-doleva, 3-doprava. V tomto směru pokračuje, dokud nenarazí do jiného šneka. Pokud se střetnou dva šneci, odrazí se od sebe následujícím způsobem. Pokud směřovali přímo proti sobě, každý z nich se otočí o 180° vzad a pokračuje dál. Pokud se střetnou pod úhlem 90°, každý z nich se otočí o 90° směrem od toho druhého a pokračují dál. Pokud se srazí 4 šneci ze 4 směrů, každý se otočí o 180° vzad a pokračuje. V případě srážky tří šneků se vzad otočí pouze dva šneci, kteří šli proti sobě a třetí pokračuje dál. Po kolika minutách poslední šnek opustí poslední hrací pole šachovnice?

    Výsledek: 4041/2

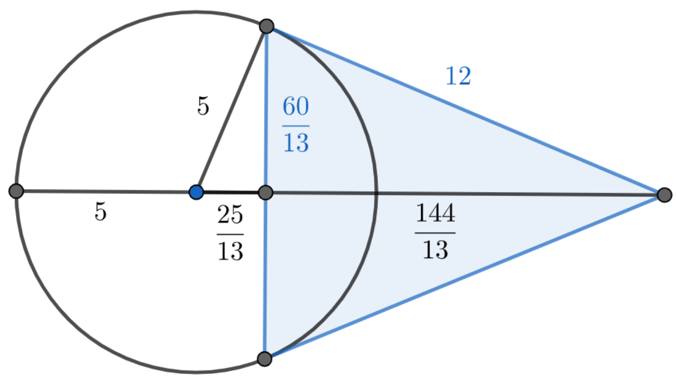
    Řešení: Uvažme dva šneky, kteří se pohybují horizontálním směrem a čelně se srazí. Z bodu srážky vyjdou opět dva šneci; jeden vlevo a druhý vpravo. Všimeme si, že kdyby se v bodě srážky pouze minuli, výsledek by byl stejný. Proto v takovém případě můžeme srážku jednoduše ignorovat. Není těžké si rozmyslet, že srážky šneků můžeme ve skutečnosti ignorovat vždy. Proto nám stačí najít takového šneka, kterému trvá nejdéle opustit šachovnici, pokud by šel stále stejným směrem a ostatní šneky ignoroval. To je zřejmě jeden ze šneků na kraji, který musí přejít celou šachovnici. Takový šnek musí překonat $2020,5 = 4041/2$ políček (začíná uprostřed pole, ale končí až na kraji), což je také počet minut, které mu to bude trvat.

30. **Zmrzlina:** V Hloupětíně je vyhlášený italský zmrzlinář. Jeho zmrzlina se skládá z koule o poloměru 5 cm a kornoutu ve tvaru kužele, který se koule dotýká (tzn. povrchové úsečky kužele jsou tečny ke kouli, které začínají ve vrcholu kužele a končí v bodě dotyku. Základna kužele je pak kruh vymezen dotykovou kružnicí). Výška celé zmrzliny je 18 cm. Určete objem kužele vymezeného kornoutem.

    Výsledek: 247.09477

    Řešení: Vyčíslíme si vzdálenost vrcholu od koule (8), pomocí pythagorovy věty zjistíme délku povrchové úsečky kužele (12) a pomocí dvojího výpočtu obsahu pravoúhlého trojúhelníku (vrchol - střed - bod dotyku) spočítáme poloměr kužele ($\frac{60}{13}$). Potom např. Euklidovou větou o odvěsně dostáváme i výšku kužele ($\frac{144}{13}$), z čehož spočteme jeho objem

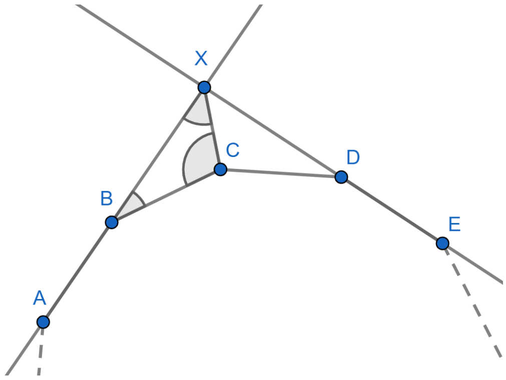
$$V = \pi \cdot \frac{144}{13} \cdot \left(\frac{60}{13}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \doteq 247.09477.$$



31. **Záře nad n-úhelníkem:** Uvažujme pravidelný 2021-úhelník s délkou strany rovnou jedné. Nechť A, B, C, D, E je libovolných 5 po sobě jdoucích vrcholů. Označme průsečík přímek AB a DE jako X. Jaká je délka úsečky CX?

    Výsledek: 0.00311

    Řešení: Délku úsečky CX spočítáme z trojúhelníka BCX.



Ze zadání $|BC| = 1$. Dále víme, že $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle ABC| = 180° - \frac{360°}{2021}$, protože se jedná o vnitřní úhly pravidelného 2021-úhelníka (pokud S je střed 2021-úhelníka, pak $|\sphericalangle ASB| = \frac{360°}{2021}$, tedy vezmeme jeho dopočet do 180°). Tedy $|\sphericalangle CBX| = 180° - (180° - \frac{360°}{2021}) = \frac{360°}{2021}$. Dále vidíme z osové souměrnosti, že $|\sphericalangle BCX| = |\sphericalangle DCX|$, a tedy $|\sphericalangle BCX| = \frac{360° - |\sphericalangle BCD|}{2} = 90° + \frac{180°}{2021}$. Potom $|\sphericalangle BXC| = 180° - |\sphericalangle BCX| - |\sphericalangle CBX| = 90° - \frac{540°}{2021}$. Nyní máme dostatek informací, abychom spočítali $|CX|$ pomocí sinové věty.

$$\frac{|BC|}{\sin|\sphericalangle BXC|} = \frac{|CX|}{\sin|\sphericalangle CBX|}$$

$$|CX| = \frac{1 \cdot \sin\frac{360°}{2021}}{\sin(90° - \frac{540°}{2021})} \doteq 0.00311.$$

32. **Potká Anna Janu?** Anna stojí na pozici [0, 0] a dívá se na sever, zatímco Jana na pozici [1, 2021] a dívá se též na sever. Máme speciální telefon, kterým můžeme dávat Anně a Janě soubor instrukcí pro to, aby se potkaly. Jedna instrukce zní vždy „<jméno> <povel>“, kde <jméno> je buď Anna či Jana a <povel> je buď Left (otoč se doleva o 90 stupňů), Right (otoč se doprava o 90 stupňů), anebo Forward (jdi o jeden krok dopředu). Telefonní zařízení je však rozbité a když dáme dívkám celý soubor instrukcí, bude se tento soubor opakovat stále dokola.

    Například, pokud soubor instrukcí bude „Anna Forward, Anna Forward, Jana Left“, Anna udělá krok dopředu na pozici [0, 1], poté druhý krok na [0, 2] a Jana se otočí na západ. Poté Anna udělá další dva kroky dopředu na pozici [0, 4] a Jana udělá otočku na jih, atd. Po dalších 1010 cyklech Anna projde kolem Jany, ale nebudou nikdy stát na stejném políčku, takže se nepotkají. Počet instrukcí v takovém souboru je 3.

    Jaký je nejmenší počet instrukcí, které dívkám máme dát v souboru instrukcí tak, aby se ve stejnou chvíli potkaly na stejném políčku?

    Výsledek: 3

    Řešení: Je zřejmé, že počet instrukcí, aby se potkaly, musí být nejméně 3. Pro jednu instrukci se jedna z dívek buď bude donekonečna otáčet, nebo půjde neustále na sever – tedy je nemožné, aby se potkaly. Vzhledem k tomu, že obě dívky mají různé x-ové souřadnice, musí být, aby se potkaly, v souboru instrukcí alespoň jedna otočka a alespoň jedno posunutí dopředu. Kdybychom uvážili soubor dvou instrukcí, musela by tedy jedna z nich být otočka a jedna posunutí dopředu. Ale to se buď bude jedna z dívek pohybovat do nekonečna po čtverci, nebo se jedna bude otáčet na místě a druhá půjde do nekonečna na sever. Tedy se také nepotkají. Instrukce musí být tedy alespoň tři.

Nyní uvažujme soubor instrukcí: Jana Left, Jana Forward, Anna Forward. Je jednoduché si rozmyslet, že se dívky potkají na políčku [0, 2021]. Tedy nejmenší počet instrukcí, tak, aby se dívky potkaly, je 3.

33. **Copak jmelí, ale kostka!** Kolikrát nejméně musíme hodit dvanáctistěnnou kostkou (s čísly 1-12), abychom hodili alespoň jednu dvanáctku s pravděpodobností alespoň 1/2?

    Výsledek: 8

    Řešení: Pravděpodobnost, že šestku nehodíme po n-tém hodu, je $\left(\frac{11}{12}\right)^n$, tedy řešíme nerovnici $1-\left(\frac{11}{12}\right)^n \geq \frac{1}{2}$. Tedy $\frac{1}{2} \geq \left(\frac{11}{12}\right)^n$. Pokud nerovnice má řešení n, tak má řešení i $n+1$. Snadno ověříme, že 7 není řešením nerovnice, ale 8 ano.

34. **Pirátský poklad:** Skupina pirátů objevila poklad tvořený sedmi druhy drahokamů. Kapitán přemýšlel, jak poklad rozdělit, a tak každého člena své posádky požádal, aby seřadil druhy drahokamů od toho, kterého si cení nejvíce, po ten, kterého si cení nejméně. Každý pirát tak udělil 1 až 7 bodů (čím víc tím líp) každému druhu (každému jiný počet). Kapitán si všiml, že každý pirát uvedl jiné pořadí. Poté všechny tyto body sečetl a získal tak sedm hodnot, pro každý druh jednu. Všiml si, že mezi těmito sedmi hodnotami je přesně šest různých (dva druhy tedy mají stejné skóre). Dále si všiml, že pokud by kterýkoli pirát zemřel a jím udělené body by se odečetly, tak by byla každá z nových hodnot jiná. Kolik bylo pirátů? Uveďte nejvyšší možnou hodnotu.

    Výsledek: 5034

    Řešení: Úlohu si zjednodušíme tak, že uvážíme druhou loď, na níž budou všichni piráti, kteří nejsou na první lodi, přičemž každý pirát je jednoznačně určen tím, jak uspořádal drahokamy. V součtu bude na obou lodích 5040 pirátů, a proto nám stačí najít odpověď na otázku, kolik nejméně mohlo být pirátů na druhé lodi.

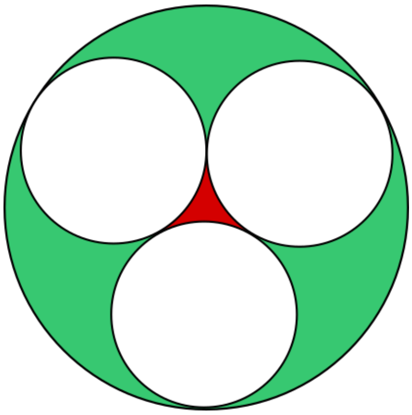
    Je třeba ukázat, že na druhé lodi mohlo být šest pirátů a že jich tam nemohlo být pět. Pokud by jich tam bylo pět, dostane nejoblíbenější druh nejvýše 35 bodů a nejméně oblíbený alespoň 5 bodů. Rozdíl mezi nimi je tedy nejvýše 30. Protože právě dva druhy mají stejný počet bodů, existuje dvojice druhů drahokamů, mezi nimiž je rozdíl větší než 0 a menší než 7 (představte si úsečku délky 30 rozdělenou na 5 úseků). Nechť tedy A a B jsou takové dva druhy drahokamů. Jistě existuje pirát, kterého když přidáme na druhou loď (čili ho odebereme z první lodi), tak budou mít A a B stejný počet bodů na druhé lodi (a tedy i na první), což je spor se zadáním. Stejný argument jde použít i pro méně než 5 pirátů. Na druhé lodi je tedy alespoň 6 pirátů (a na první nejvýše 5034).

    Nyní stačí ukázat, že jde umístit šest pirátů na druhou loď tak, aby byly splněny podmínky zadání. Jedna možná množina takových šesti pirátů je v tabulce 1. Každý pirát je jeden řádek a každý drahokam jeden sloupec. Poslední řádek jsou součty. Je vidět, že je mezi nimi 6 různých hodnot a že po přidání libovolné jich bude sedm různých.

7	6	4	5	2	3	1
7	6	4	5	3	2	1
7	6	4	3	5	2	1
7	6	5	4	3	1	2
7	6	5	2	4	3	1
7	5	6	2	4	3	1
42	35	28	21	21	14	7

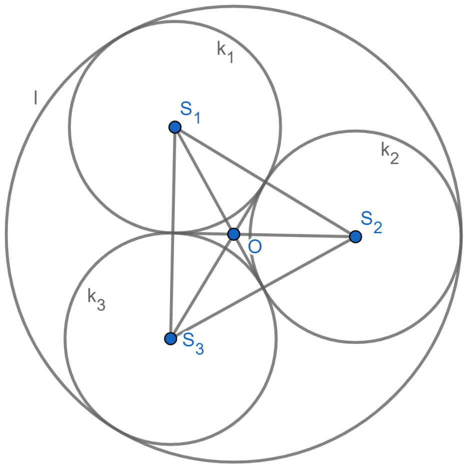
Tabulka 1: Piráti

35. **Obsah plochy:** Na obrázku se nachází tři kružnice s poloměrem 1, které se navzájem dotýkají, a jedna kružnice, která se dotýká každé z nich. Jaký je poměr obsahů zelené a červené oblasti?



Výsledek: 31.00409

Řešení: Označme menší kružnice k_1, k_2, k_3 se středy S_1, S_2, S_3 a velkou kružnici l se středem O.



Body S_1, S_2 a S_3 tvoří rovnostranný trojúhelník se stranou délky 2. Bod O leží v těžišti tohoto trojúhelníka. S touto informací jsme schopni spočítat poloměr kružnice l. Výšku v trojúhelníka $S_1S_2S_3$ dostáváme z Pythagorovy věty jako $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

$r_l = r_{k_1} + \frac{2v}{3} = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Obsah zelené a červené části dohromady je $S_l - 3S_{k_1} = \pi r_l^2 - 3\pi r_{k_1}^2 = \pi(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3})^2 - 3\pi = \frac{4\pi}{3}(1 + \sqrt{3}) - 2\pi$.

Obsah červené části je pak obsah trojúhelníka $S_1S_2S_3$ bez poloviny obsahu kružnice k_1, což je $\frac{2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{2} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$.

Obsah zelené části je potom $\frac{4\pi}{3}(1 + \sqrt{3}) - 2\pi - (\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}) = \frac{4\pi}{3}(1 + \sqrt{3}) - \frac{3\pi}{2} - \sqrt{3}$.

Poměr obsahů zelené a červené části je tedy $\frac{\frac{4\pi}{3}(1+\sqrt{3}) - \frac{3\pi}{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}} \doteq 31.00409$.

36. **Ples:** Vojenského plesu se účastní 2^{2021} důstojníků a 2^{2021} důstojnic. Každý důstojník má jinou úroveň od 1 do 2^{2021} a to samé platí pro důstojnice. Pokud se potká náhodný důstojník s důstojnicí a rozdíl jejich úrovní je nejvýše 2^{2020}, mají pravděpodobnost $1 - \frac{R}{2^{2020}}$, že spolu budou tančit, kde R je absolutní hodnota rozdílu jejich úrovní. Pokud je rozdíl jejich úrovní větší, určitě spolu tančit nebudou. Jaká je pravděpodobnost, že náhodný důstojník bude tančit s náhodnou důstojnicí? **Odpovězte, jako by byl výsledek iracionální číslo**.

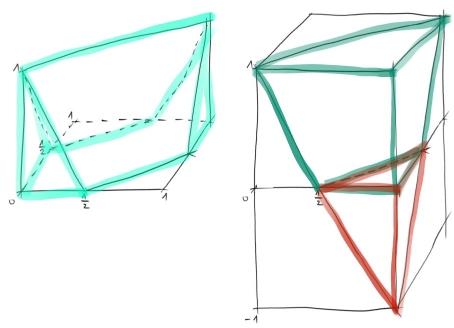
Výsledek: 0.41667

Řešení: Pro přehlednost si definujme $N = 2^{2021}$ a označme $p_{i,j}$ pravděpodobnost toho, že spolu budou tančit důstojník ranku i a důstojnice ranku j, pokud se potkají. Plesu se účastní N důstojníků a N důstojnic, kteří spolu mohou vytořit N^2 různých párů. Zajímá nás pravděpodobnost t toho, že spolu dva lidé v náhodně vybraném páru budou tančit. Ta je rovna průměrné hodnotě $p_{i,j}$ přes všechny dvojice důstojníků (i,j), t.j.

$$t = \frac{\sum_{1\le i,j\le N} p_{i,j}}{N^2} = \sum_{1\le i,j\le N} \frac{p_{i,j}}{N^2}.$$

Na hodnotu $\frac{p_{i,j}}{N^2}$ se můžeme dívat jako na objem kvádru s rozměry $\frac{1}{N}\times\frac{1}{N}\times p_{i,j}$. Těchto $N\times N$ kvádrů můžeme umístit do mřížky $N\times N$ tak, že na souřadnicích $(i/N, j/N)$ je kvádr s výškou $p_{i,j}$ a jeho spodní stějna leží v nulové hladině. Pravděpodobnost t je rovna objemu takto vzniklého tělesa T. Stačí vyčíslit objem T. Abychom se vyhli počítání dlouhé sumy, pokusíme se spočítat objem s jistou chybou, která bude ale dostatečně malá (zadání vyžaduje přesnost na 5 desetinných míst).

Označme osy souřadnicového sytému I, J, P intuitivním způsobem. Vzniklé těleso je velmi přesně aproximováno tělesy T^- a T^+, které jsou zdola ohraničeno rovinou $P = 0$ a shora ohraničeny množinou bodů splňujících rovnost $P = \max(1-2|I-J|, 0) - \frac{2}{N}$, respektive $P = \max(1-2|I-J|, 0) + \frac{2}{N}$. Ve skutečnosti je T^- v každém bodě lehce nižší než T a T^+ lehce vyšší. Proto je objem tělesa T^- menší než oběm tělesa T a ten je menší než objem tělesa T^+. Rozdíl výšek obou těles T^- a T^+ je v každém bodě $\frac{4}{N}$ a stejný je i rozdíl objemů obou těles. Protože $\frac{4}{N} = 2^{-2019}$, je rozdíl objemů těles T^-, T^+ a T výrazně menší než 10^{-5}. Proto nám stačí najít libovolné číslo nacházející se mezi objemem tělesa T^- a tělesa T^+. Spočítejme objem tělesa T^0, které je shora ohraničeno body splňující rovnici $P = \max(1-2|I-J|, 0)$ (viz obrázek 1 vlevo). Jeho objem je větší než objem tělesa T^- a menší než objem tělesa T^+, je tedy také dostatečně blízký objemu tělesa T. Objem T^0 lze spočítat s pouhou znalostí vzorce pro objem kvádru a objem jehlanu (viz obrázek 1 vpravo). Pro jeho objem $V(T^0)$ totiž platí $V(T^0) = 1 - 2V(M)$, kde $V(M)$ je objem tmavě modře vyznačeného tělesa M. Navíc víme, že červeně vyznačený jehlan C je 8-krát menší než jehlan $C \cup M$ (protože jsou si podobné s koeficientem 2). Tedy platí $V(M) = \frac{7}{8}V(C\cup M) = \frac{7}{24}$, a proto celkově získáváme $V(T) \doteq V(T^0) = 1 - 2V(M) = \frac{10}{24} \doteq 0.41667$.

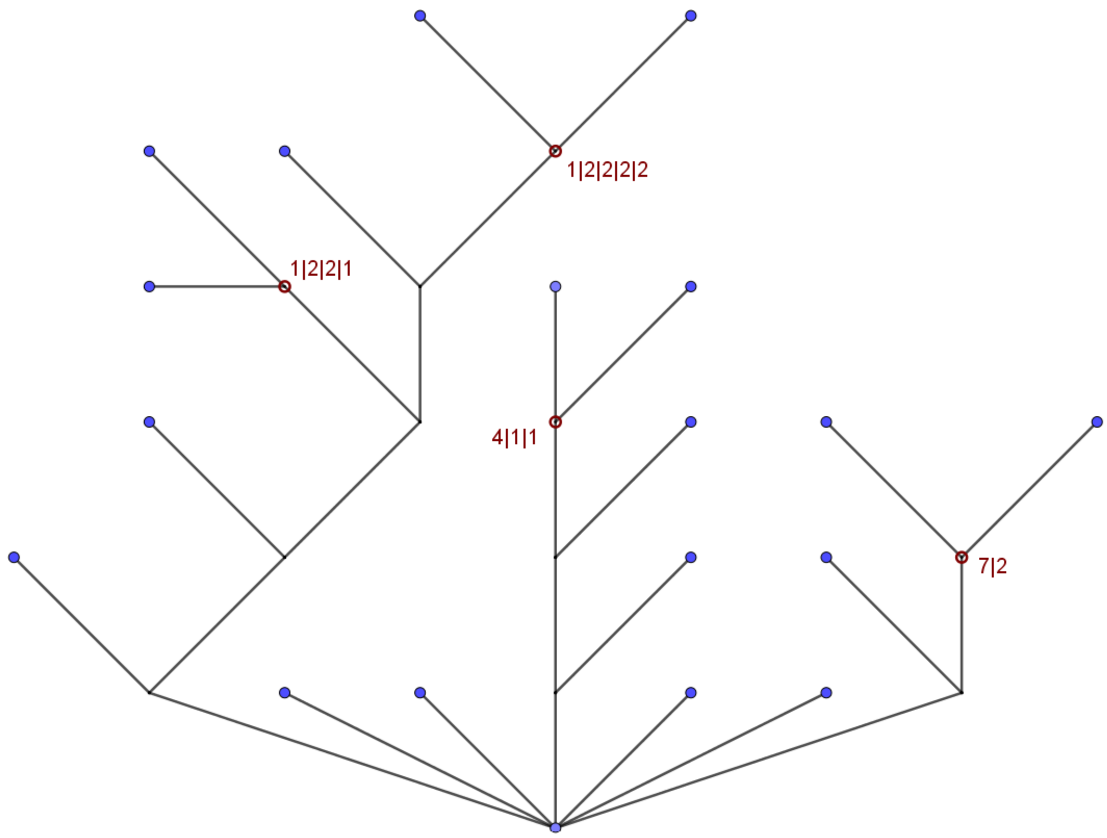


Obrázek 1: Geometrická interpretace pravděpodobnosti v úloze Ples

37. **Hydrant:** Janča bojuje s hydrou. Jako každá správná hydra měla na začátku sedm hlav, označených 1, 2, ... 7; a vždycky, když jí jednu z hlav usekla, vyrašily z krku dvě nové hlavy. Tyto hlavy si Janča označila podle klíče **předchozí | nová** , kde *předchozí* je jméno hlavy, kterou usekla, a *nová* je jedno z čísel 1, 2. Tedy když usekne hlavu 1|2, na jejím místě vyraší hlavy **1|2|1** a **1|2|2**. Janča ví, že v boji usekla hlavy **1|2|2|1**, **4|1|1**, **7|2** a **1|2|2|2|2**. Jaký je nejmenší počet hlav, který v tomto okamžiku hydra může mít? (Předpokládáme, že všechno useknuté doroste „okamžitě“, tzn. „v tomto okamžiku“ má hydra všechny hlavy dorostlé).

    Výsledek: 18

Řešení:



Červeně jsou v obrázku vyznačeny hlavy, o kterých jistě víme, že je Janča usekla. Z podmínek ze zadání jednoznačně vyplývá, že aby mohly zadané hlavy být useknuty, musela na konci hydra vypadat takto, měla tedy nejméně **18** hlav.

38. **Celočíselný obsah:** Nechť $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník se základnami AB a CD. Označme S průsečík jeho úhlopříček. Určete, jaký nejmenší celočíselný obsah může mít, pokud platí následující:

- $|\angle ABD| = 60°$,
- $\frac{|CS|}{|AS|} = \frac{3}{4}$,
- $|AB|^4$ je celé číslo.

Výsledek: 147

Řešení: Jistě máme dvojici podobných trojúhelníků $ABS \sim CDS$ (jejich podobnost plyne z věty uu a z toho, že AB a CD jsou rovnoběžné). Tedy $\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{|CS|}{|AS|} = \frac{3}{4}$. Označíme-li délku úsečky AB jako x, dostaneme obsah $ABCD$ jako

$$\frac{1}{2}v(|AB| + |CD|) = \frac{1}{2}v(x + \frac{3}{4}x) = \frac{7}{8}vx,$$

kde v je je délka výšky na stranu AB v našem lichoběžníku.

Označme nyní kolmé průměty bodů C, D na stranu AB postupně jako C', D'. Z toho, že $ABCD$ je rovnoramenný, máme $|AD'| = |BC'| = \frac{1}{2}(|AB| - |CD|) = \frac{1}{8}x$. Trojúhelník BDD' má u vrcholu D' pravý úhel a ze zadání má u vrcholu B úhel $60°$. Proto dostaneme

$$\sqrt{3} = \tan 60° = \frac{|DD'|}{|BD|} = \frac{v}{\frac{3}{4}x + \frac{1}{8}x} = \frac{v}{\frac{7}{8}x},$$

tedy $v = \frac{7}{8}x\sqrt{3}$. Obsah lichoběžníku $ABCD$ pak můžeme zapsat ve tvaru $\frac{49\sqrt{3}}{64}x$.

Nyní tedy hledáme nejmenší x takové, že x^4 i $\frac{49\sqrt{3}}{64}x$ jsou celá čísla. To je zjevně číslo $x = 64\sqrt{3}$. Nejmenší celočíselný obsah má tedy hodnotu $49 \cdot 3 = 147$.

39. **Poslušné posloupnosti:** Posloupnost $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nazveme *poslušnou*, pokud se jedná o jednoprvkovou posloupnost (1), anebo pokud platí následující podmínky:

- jedná se o permutaci posloupnosti $(1, 2, \dots, n)$, tedy, že $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$, a zároveň
- posloupnost absolutních hodnot rozdílů sousedních prvků je též poslušná posloupnost, tedy že posloupnost $(|a_2 - a_1|, |a_3 - a_2|, \dots, |a_n - a_{n-1}|)$ je poslušná posloupnost.

Určete, kolik existuje poslušných posloupností.

Výsledek: 7

Řešení: Mějme n-prvkovou posloupnost ($n > 1$), která je poslušná. Pro tuto posloupnost musí platit obě podmínky. Z druhé podmínky plyne, že musí existovat poslušná posloupnost, která má $n - 1$ prvků.

Pokud tedy najdeme nějaké n, pro které neexistuje žádná poslušná posloupnost, nebude existovat ani pro žádné větší číslo.

Budeme tedy budovat posloupnosti zespod. Posloupnost (1) je poslušná. Posloupnosti (1, 2) a (2, 1) jsou také poslušné. Z poslušné posloupnosti o třech prvcích musí ve druhém pravidle vzniknout jedna z těchto dvou posloupností. Tedy 1 a 3 musí být vedle sebe, aby byl rozdíl některých dvou sousedních prvků 2. Tím dostáváme posloupnosti (1, 3, 2), (3, 1, 2), (2, 1, 3) a (2, 3, 1). Podobnou úvahu můžeme použít i dále, tedy ve čtyřprvkové posloupnosti musí být 1 a 4 vedle sebe. Pro všechny tříprvkové poslušné posloupnosti zkusíme tato dvě čísla doplnit a dopočítáme zbylé prvky tak, aby rozdíly sousedních prvků odpovídaly. Dostáváme následující posloupnosti:

$$2,1,3 \rightarrow \begin{matrix} ..14 \\ ..41 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 4214 \\ 1341 \end{matrix}$$

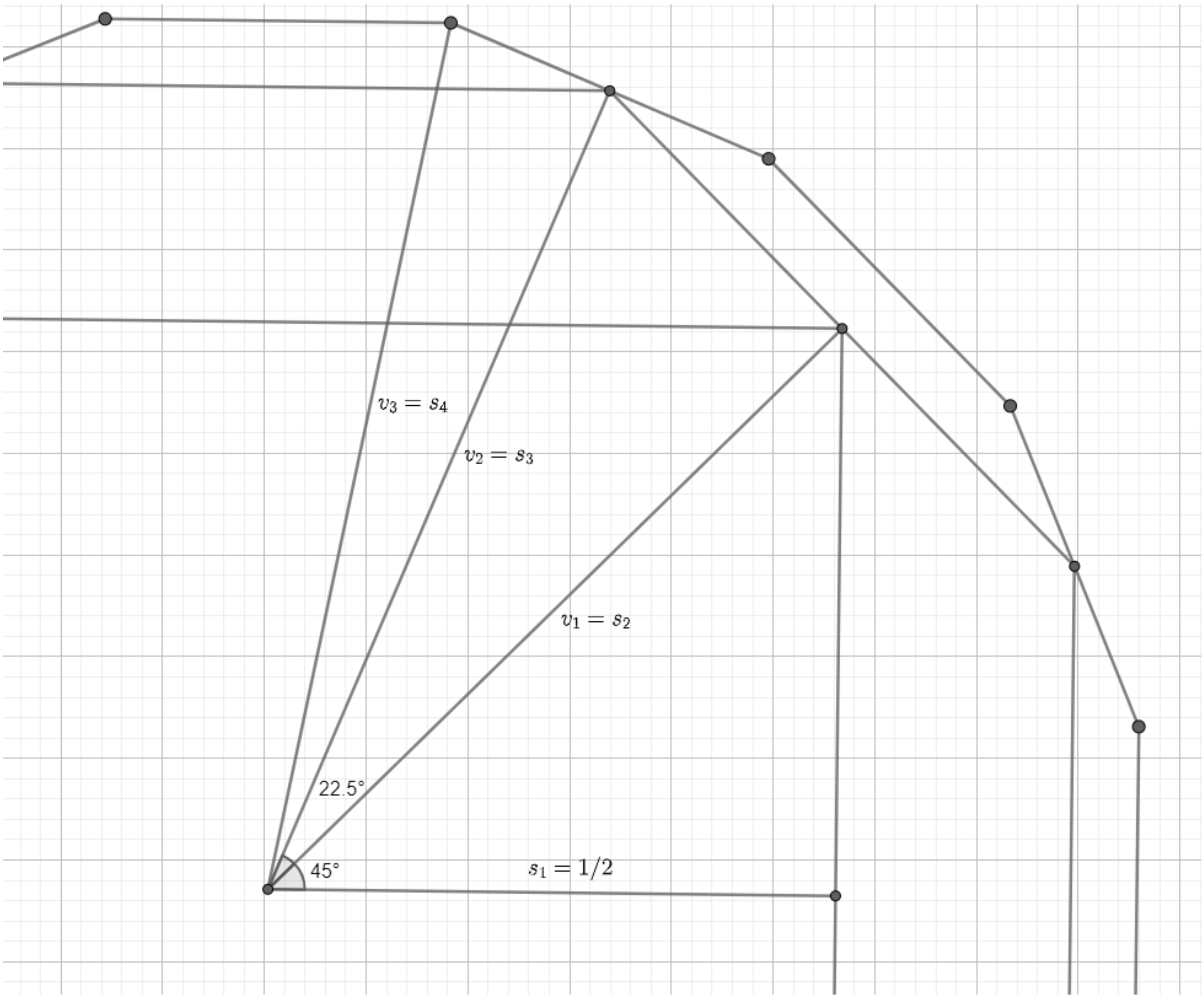
$$2,3,1 \rightarrow \begin{matrix} .41. \\ .14. \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2412 \\ 3143 \end{matrix}$$

(Posloupnost (1, 3, 2) je (2, 3, 1) pozpátku, podobně u (3, 1, 2) – tedy tyto možnosti jsme vlastně také vyzkoušeli). Žádná ze získaných posloupností ale není poslušná, tedy pro $n = 4$ poslušná posloupnost neexistuje. Celkem je tedy 7 poslušných posloupností.

40. **Zábava s pravidelnými 2^n-úhelníky:** V rovině je dán čtverec o délce strany 1. Opišme mu pravidelný osmiúhelník tak, aby každý vrchol čtverce byl středem každé druhé strany pravidelného osmiúhelníka. Osmiúhelníku stejným způsobem opišme pravidelný šestnáctiúhelník, tomu pravidelný dvaatřicetiúhelník a tímto způsobem pokračujme do nekonečna. Jaký je nejmenší poloměr kružnice se středem v průniku úhlopříček čtverce, do které se všechny takto vytvořené 2^n-úhelníky vejdou?

Výsledek: 0.78540

Řešení: Nejdůležitější u tohoto typu úloh bývá správný náčrtek či obrázek. Ze správného obrázku řešení již snadno vyplyne. Nejprve si pro daný 2^n-úhelník označme úsečku spojující střed středové symetrie (pro všechny ze zadání vytvořené 2^n-úhelníky to je průnik úhlopříček původního čtverce) a střed libovolné jeho strany jako středovou úsečku. Obdobně si označme úsečku spojující střed a libovolný vrchol 2^n-úhelníku jako vrcholovou úsečku. Je zřejmé, že pro daný 2^n-úhelník mají všechny středové úsečky stejnou délku, také všechny vrcholové úsečky budou mít stejnou délku.



Nyní začněme u vhodně zvolené středové a vrcholové úsečky původního čtverce s délkou strany 1, jako na obrázku. Označme středovou úsečku jako s_1, vrcholovou jako v_1. Středová úsečka čtverce bude mít délku poloviny jeho strany, tedy 1/2. Vztah mezi touto středovou úsečkou a vhodně zvolenou vrcholovou úsečkou je z pravoúhlého trojúhelníka následující:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{s_1}{v_1},$$

tedy pro délku této vrcholové úsečky platí

$$v_1 = \frac{s_1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)},$$

Podobný argument můžeme použít pro osmiúhelník. Vhodně zvolenou vrcholovou úsečku čtverce uvažujme za středovou úsečku osmiúhelníka, označme ji $v_1 = s_2$. Vhodně zvolenou vrcholovou úsečku osmiúhelníka označme v_2. Opět můžeme nalézt pravoúhlý trojúhelník, v němž bude velikost úhlu mezi přeponou (vrcholovou úsečkou osmiúhelníka) a jednou z odvěsen (středovou úsečkou osmiúhelníka) poloviční oproti předchozímu trojúhelníku ve čtverci. Tato vlastnost vyplývá z konstrukce zadání. Vztah mezi úsečkami osmiúhelníka je tedy:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{s_2}{v_2},$$

délka vrcholové úsečky bude tedy po dosazení a úpravě

$$v_2 = \frac{s_2}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{v_1}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{s_1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

Je lehké si nyní rozmyslet, že se tento vzor opakuje a platí

$$v_k = \frac{1}{2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdots \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}$$

Můžeme pomocí součinu konečně mnoha kosinů zjistit délku vrcholové (středové) úsečky libovolného 2^n-úhelníka. Vzhledem k tomu, že začínáme s úhlem $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a tento úhel půlíme, budou všechny argumenty kosinů ležet ve stejném intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a budeme násobit čísla z intervalu $(0, 1)$. Můžou tedy nastat dvě situace: buď se bude tento součin pro více a více činitelů blížit k nule, a 2^n-úhelníky se budou neustále zvětšovat, nebo se součin bude blížit k nějakém nenulovému číslu a délka vrcholové úsečky 2^n-úhelníků se tedy bude blížit k nějakému reálnému číslu.

Zkusme tedy tento součin obecně vypočítat. Mějme nějaký úhel
$\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, v našem případě $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Dále uvažujme součin konečně mnoha kosinů, mějme jich například n:

$$\cos(\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdots \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)$$

Každý z těchto kosinů se dá přepsat následujícím způsobem:

$$\cos(\alpha) = \frac{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2\sin(\alpha)} = \frac{\sin(2\alpha)}{2\sin(\alpha)}$$

Dosadíme do vzorce a můžeme pokrátit:

$$\cos(\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdots \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right) = \frac{\sin(2\alpha)\sin(\alpha)\cdots\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n-2}}\right)}{2^n \sin(\alpha)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\sin\left(\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)} = \frac{\sin(2\alpha)}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)}$$

Nyní vezměme limitu tohoto výrazu pro n jdoucí do nekonečna:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(2\alpha)}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)}$$

Pomocí známé limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

můžeme původní limitu upravit a vyjde nám:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(2\alpha)}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)} = \frac{\sin(2\alpha)}{2\alpha}$$

Nyní stačí dosadit do původního součinu pro výpočet vrcholové úsečky a dostaneme číslo, ke kterému se délka vrcholové úsečky 2^n-úhelníků pro $n \to \infty$ blíží. Po dosazení a úpravě zjišťujeme, že se tato délka blíží k

$$\frac{2\alpha}{2\sin(2\alpha)} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{4}.$$

Z vlastností pravidelných n-úhelníků plyne, že libovolný n-úhelník s nějakou délkou vrcholové úsečky se jistě vejde do kružnice s poloměrem o velikosti této vrcholové úsečky. Tedy $\frac{\pi}{4}$ je řešením příkladu.

41. **Trojrozdělitelnost:** Nechť je v rovině dána množina bodů M. Řekneme, že tato množina je *troj-rozdělitelná*, pokud pro každou podmnožinu $N \subseteq M$ existuje trojúhelník T takový, že body z množiny N jsou vnitřními body trojúhelníka T a body v množině $M \setminus N$ jsou vnějšími body trojúhelníka T.

Najděte velikost největší množiny bodů (takové množiny, která má nejvíce prvků), která je troj-rozdělitelná.

Výsledek: 7

Řešení. Ukážeme, že lze troj-rozdělit množinu vrcholů pravidelného sedmiúhelníka. Pokud vezmeme libovolnou podmnožinu z těchto sedmi bodů, ty, které nevybereme, budou v nejvýše třech souvislých blocích. Díky tomu můžeme tyto nevybrané bloky "odstřihnout"třemi stranami trojúhelníka.

Naopak, musíme ukázat, že neexistuje množina 8 bodů, která by byla troj-rozdělitelná. Je vcelku přímočaré si rozmyslet, že body musí ležet na konvexním obalu. Nyní ukážeme, že neexistuje trojúhelník, který by oddělil podmnožinu 4 bodů, které leží na našem konvexním obalu "ob jedno", tedy pokud procházíme body na obalu postupně, tak v podmnožině střídavě je, není, je, ... Předpokládejme pro spor, že takový trojúhelník máme. Protože má oddělovat body, které v podmnožině nejsou, musí 4 body ležet mimo trojúhelník. Podívejme se na poloroviny ohraničené stranami trojúhelníka, ve kterých neleží třetí bod trojúhelníka. V jejich sjednocení leží čtyři body, a tedy z Dirichletova principu v jedné z polorovin musí ležet (alespoň) dva body. Jenže tím, že jsme vybrali body střídavě, musí být mezi nimi další, který je uvnitř trojúhelníka. To je ale spor s tím, že osmiúhelník je konvexní.

42. **Průmět obloučku:** Uvažujme kružnici k o poloměru 1000 a nějaký její průměr AB. Dále uvažujeme oblouk AX ležící na kružnici k, jehož délka je 2021-krát menší než obvod k. Určite délku $|AY|$, kde Y je kolmý průmět bodu X na úsečku AB.

    Výsledek: 0.00483

    Řešení: Označme S střed k. Pak $|\angle ASX| = \frac{2\pi}{2021}$ (jelikož délka obloučku AX je 2021-krát menší než celý obvod). Potom $|SY| = \cos\frac{2\pi}{2021} \cdot |SX| = \cos\frac{2\pi}{2021} \cdot 1000$. Odtud už snadno dopočítáme, že

$$|AY| = |AS| - |SY| = 1000\left(1 - \cos\frac{2\pi}{2021}\right) \doteq 0.00483.$$

43. **Vybuchující příšerky:** Na vzdálené planetě žije několik druhů příšerek. Z námi nepochopitelných důvodů riskují své životy v tzv. výbušných kabinách. Když do kabiny vejdou dvě příšerky, může vybouchnout. To, jestli vybuchne, má každá kabina nastaveno jinak: závisí to na druhu příšerek i na tom, v jakém pořadí vešly (nemohou vejít obě najednou, dveře jsou příliš úzké). Každá kabina ale splňuje následující pravidla:

    - Když dovnitř vejdou dvě příšerky stejného druhu, kabina vybouchne.
    - Pokud kabina vybouchla, když do ní vešly dvě příšerky různých druhů, tak by nevybouchla, pokud by vešly v opačném pořadí.
    - Pokud by zmizely všechny příšerky kromě libovolných tří příšerek, stále by existoval způsob, jak může kabina vybouchnout.
    - Pokud by kabina vybouchla, kdyby do ní vešla jedna příšerka A a za ní druhá B, i tehdy, kdyby do ní vešla příšerka B a za ní nějaká třetí příšerka C, tak by vybouchla, i kdyby do ní nejdříve vešla A a za ní C.

    Každé dvě kabiny jsou různé, t.j. pro každou dvojici kabin existuje dvojice (druhů) příšerek a pořadí takové, že jedna kabina by nevybouchla, pokud by do ní vešly dané dvě příšerky v daném pořadí, a druhá ano. Na planetě je 100 výbušných kabin. Kolik minimálně musí existovat druhů příšerek?

    Výsledek: 4

    Řešení: Ukážeme, že tři druhy příšerek nestačí a že čtyři stačí. Druhy příšerek si označíme písmeny A až D a kabinky čísly 1 až 100. Výrazem $A \leq_i B$ označíme, že kabinka číslo i vybuchne, když do ní nejprve vejde příšerka druhu A a za ní příšerka druhu B. Dá se říct, že A je menší než B (nebo rovna, viz pravidlo 1) podle dané kabinky (pravidla 2 a 4 odpovídají tomu, co bychom čekali od uspořádání množiny – viz pomocný text k 5. sadě 25. ročníku BRKOSu). Pokud neplatí $A \leq_i B$ ani $B \leq_i A$, označíme to $A \nsim_i B$ a řekneme, že kabinka i neporovnává druhy A a B (v opačném případě je porovnává).

    Uvažme tři druhy příšerek. Může se stát, že určitá kabinka porovnává každý druh s každým, např. $A \leq_i B \leq_i C$ (tento zápis dává smysl díky pravidlu 4). Takových kabinek může být nejvýše šest (3!). Šest je též případů, kdy kabinka porovnává dva druhy a třetí ne, např. $A \leq_i B$ a $A \nsim_i C$ a $C \nsim_i B$. Další možnost je, že jeden druh je větší (resp. menší) než zbylé dva a ty kabinka neporovnává, např. $A \leq_i B$ a $A \leq_i C$ a $C \nsim_i B$. Těchto možností je opět šest. Více možností není, protože díky pravidlu 3 musí každá kabinka porovnávat aspoň jednu dvojici druhů.

    Celkem tedy může pro tři druhy existovat nejvýše 18 kabinek. Podobným způsobem ověříme, že pro 4 druhy již může být kabinek více než 100.

44. **Race for the galaxy:** Kuba hrál Race for the galaxy. V tého hře může prodat novinky za 2 karty, technologie za 3 karty, geny za 4 karty a mimozemské technologie za 5 karet. Postupně za prodej získal 20 karet. (Tj. nejdříve prodal nějaké zboží, potom další, atd.) Kolika způsoby to mohl udělat? (Dva způsoby se liší pokud v jednom způsobu prodal více zboží, nebo pokud v nějakém kroku prodal jiný druh zboží.)

    Výsledek: 1744

    Řešení: Pokud úlohu máme vyřešenou pro menší počet karet, které Kuba mohl získat, tak jsme schopni úlohu vyřešit i pro daný počet.

    Nechť n je počet karet, které Kuba obdržel za prodej zboží, $f(n)$ je počet způsobů, kterými to mohl udělat. Pak jsme schopni vyjádřit $f(n)$ pomocí předchozích hodnot: $f(n) = f(n-2) + f(n-3) + f(n-4) + f(n-5)$. Přičemž $f(0) = 1$ a funkce je nulová pro záporná čísla.

    Když postupně vyčíslujeme hodnoty, tak dostaneme: 1, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 7, 10, 16, 24, 37, 57, 87, 134, 205, 315, 483, 741, 1137 a 1744. Řešení je tedy 1744.

45. **Správná tabulka:** Mějme tabulku 3x3, do které smíme zapisovat hodnoty 0, 1. Řekneme, že vyplnění tabulky je *správné*, pokud pro hodnotu v každém políčku platí, že je rovna zbytku po dělení součtu hodnot všech sousedních polí třemi (sousední pole je takové, které se daného pole dotýká, např. prostřední pole má 8 sousedních polí). Určete, kolik existuje vyplnění, která nejsou *správná*.

Výsledek: 510

Řešení: Poznámka: Budeme značit políčka tabulky takto:

LH	SH	PH
LS	SS	PS
LD	SD	PD

Začneme v LH. Máme dvě možnosti doplnění hodnoty:
0 – když do LH napíšeme 0, pak musíme tři okolní políčka doplnit tak, aby jejich součet byl dělitelný třemi, máme jenom dvě možnosti. Buď okolí doplníme samými jedničkami (což pak vede na to, že v PH může být jedině 0 s tím, že v PS musí být nutně 1; no ale pak hodnota v SH neodpovídá, tudy cesta nevede), nebo samými nulami:

0	0	
0	0	

V PH a PS už může být pouze 0 (aby si neodporovalo s SH), a tím pádem už i SD a PD musíme (kvůli PS) vyplnit 0, poslední LD musí být zřejmě 0. Máme tedy zatím jednu možnou správnou tabulku:

0	0	0
0	0	0
0	0	0

1 pokud do LH připadne 1, pak nutně do právě jednoho sousedního políčka musí také připadnout 1.Volbou SH=1 (analogicky pro LS=1) dospějeme ke sporu: Jelikož LH=1, tak musí sousedit právě s jednou 1, která je SH. Proto LS = SS = 0. Jelikož LH=1, tak musí sousedit s jednou, nebo čtyřmi 1. Jelikož ale LS = SS = 0, tak nutně musí sousedit jen s jednou 1, kterou je LH. Proto PH=PS=0. PH ale sousedí s jednou 1, ale má hodnotu 0, což nám dává spor.

Pokud bychom vybrali SS jako políčko vyplněné jedničkou:

1	0	
0	1	

PH pak nutně musí mít hodnotu 1 a PS 0, zcela obdobně PD 1 a SD 0, LD je pak zřejmě 1.

1	0	1
0	1	0
1	0	1

Z postupu vidíme, že jiná správná tabulka neexistuje, našli jsme tedy dvě správné tabulky. Možných vyplnění tabulky 3×3 je $2^9 = 512$, nesprávných je tedy $512 - 2 =$ **510**.