Mathrace Sada 1

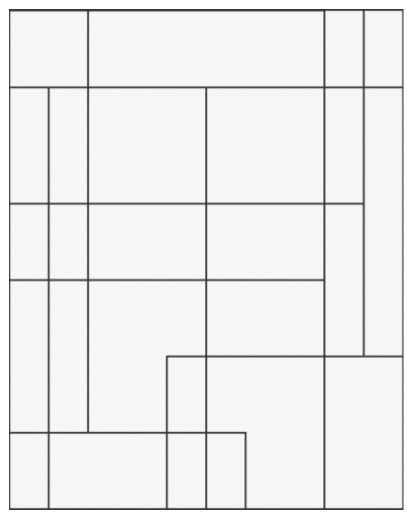
odevzdávejte do 17.00

1. Jaký je součet všech trojciferných čísel, která mají alespoň jednu číslici sudou a alespoň jednu číslici lichou?

2. Na tabuli bylo napsáno 5 celých čísel. Sčítáním každých dvou čísel vzniklo následujících 10 čísel: 0,2,4,4,6,8,9,11,13,15. Jaký je součin čísel napsaných na tabuli?

3. Házíme šestistěnnou kostkou do té doby, než padne 6. Jaká je pravděpodobnost, že 6 padne při druhém hodu, za předpokladu, že jsme přestali házet po sudém počtu hodů?

4. Kolik je na obrázku obdélníků (včetně čtverců)?

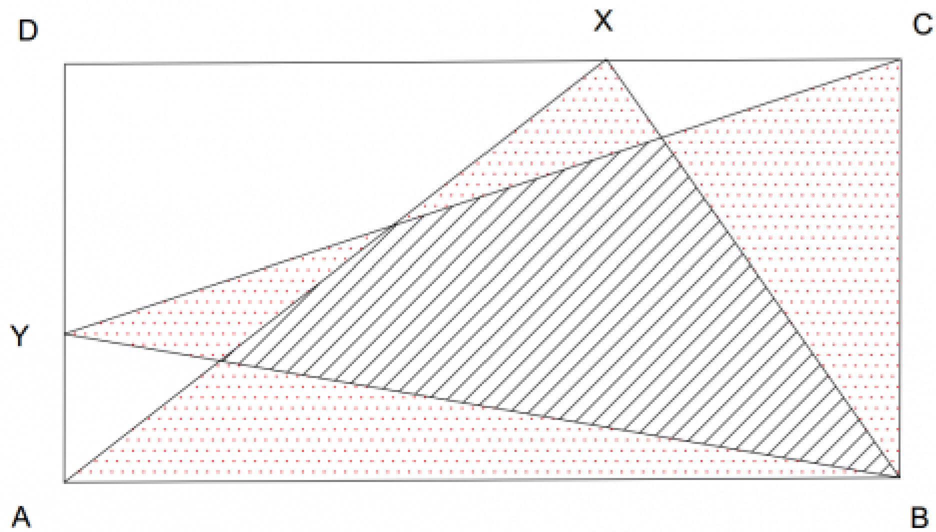


5. V rovině jsou dány body $A = (4, 6)$, $B = (6, 6)$ a přímka $p : kx - y = 0$, která prochází počátkem. Uvažme pravidelné šestiúhelníky, které mají body A a B jako některé vrcholy. Napište součet všech k, pro která platí, že přímka p dělí nějaký z šestiúhelníků na dvě části o stejném obsahu.

6. Kolik existuje zobrazení pětiprvkové množiny P do desetiprvkové množiny D, pro která není pravda, že každým dvěma prvkům z P přiřadí různé obrazy v D?

7. Napište součet kořenů polynomu $x^{2017} + x^{2016}(1 - x) + x^{2015}(1 - x)^2 + \cdots + x^2(1 - x)^{2015} + x(1 - x)^{2016} + (1 - x)^{2017}$.

8. ABCD je obdélník s obsahem 1. Obsah vyšrafované části je 0,42. Jaký je obsah tečkované části?



9. Mějme tabulku čísel rozměru 4×4. V tabulce máme rozmístěna čísla 1 až 16 tak, že součet všech sousedských vztahů je nejvyšší, jaký může být. Sousedský vztah mají políčka, která sdílejí hranu, hodnota tohoto vztahu je hodnota políčka výše snížena o hodnotu políčka níže, respektive hodnota políčka více vlevo snížena o hodnotu políčka více vpravo. Kolik takových rozmístění existuje?

10. Je dán mnohostěn vytvořený z pravidelného dvacetistěnu a dvaceti pravidelných čtyřstěnů, jejichž stěny mají stejný obsah jako stěny dvacetistěnu. Čtyřstěny nalepíme na stěny dvacetistěnu tak že, výsledný mnohostěn je konvexní. Kolik má tento mnohostěn os, rovin a středů souměrnosti? Spočítejte součet těchto počtů.

11. Přímky OX, OY, OZ jsou na sebe po dvou kolmé. Trojúhelníky OXY, OXZ, OZY mají po řadě obsahy $3, 4, 5$. Určete obsah trojúhelníku XYZ.

12. Kolik existuje přirozených n větších než 1 takových, že dělí $x^{13} - x$ pro každé přirozené x?

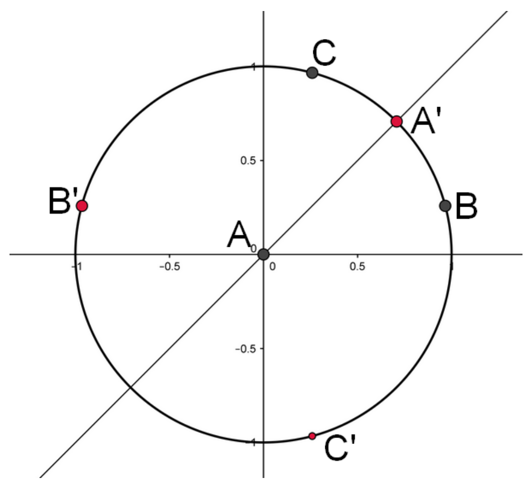
13. BRKOS Team zorganizoval opět soustředění pro řešitele. Víme, že přijelo 12 organizátorů. Ještě se nekonaly seznamovačky, takže ne každý organizátor znal všechny účastníky. Nastal ten jev, že každých 6 organizátorů zná dohromady všechny účastníky, ale žádných pět organizátorů všechny nezná. Kolik nejméně účastníků mohlo jet?

14. Najděte maximální objem tělesa jehož průměty do tří navzájem kolmých směrů budou pravidelný trojúhelník, pravidelný čtyřúhelník a pravidelný šestiúhelník, šestiúhelník má stranu délky 1.

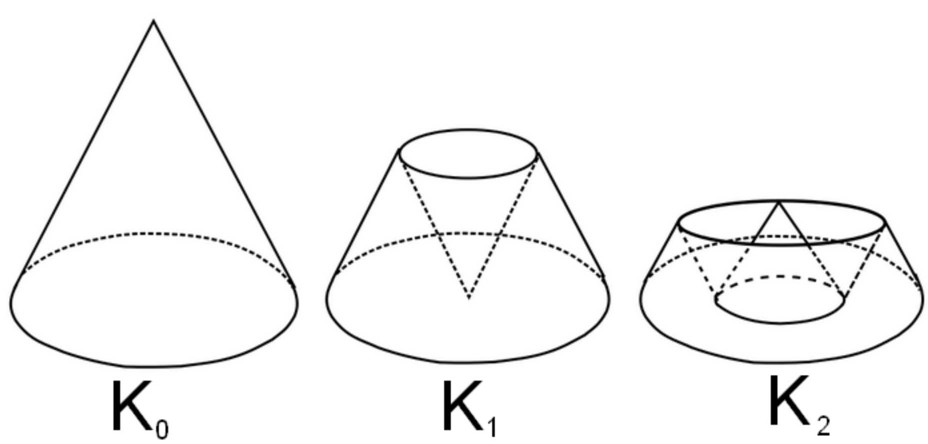
15. Kouma a Ňouma zkoušeli hrát bowling s různým počtem kuželek. Kuželky měli klasicky rozestavěné v rovnostranném trojúhelníku. Kouma si vzal takový počet kuželek, že v poslední řadě měl $3^{2018} \cdot 4^{2017}$ kuželek. Ňouma měl radši když měl v poslední řadě $3^{2017} \cdot 4^{2018} + 1$ kuželek. Přišel Henry, sebral oběma všechny jejich kuželky a podařilo se mu z nich rozestavět vlastní rovnostranný trojúhelník. Bohužel Henry hrát bowling neumí, takže shodil pouze krajní řadu kuželek. Spočítal si, kolik jich shodil, ale nezapamatoval si poslední tři číslice tohoto čísla. Poraďte mu.

16. Matěj, Liběnka a Henry si chtějí zahrát kámen-nůžky-papír s následujícími pravidly: Bude se hrát několik kol, v každém kole hrají vždy dva z nich. Ten, kdo vyhraje, hraje v dalším kole proti tomu, kdo toto kolo nehrál. V prvním kole bude hrát Liběnka s Henrym, v druhém kole vítěz prvního kola s Matějem. Až se někomu podaří vyhrát dvakrát po sobě, hra končí a on se stává celkovým vítězem. Po vyslechnutí pravidel se ale Matěj obořil, že to není vůbec fér. Má pravdu? Jaká je pravděpodobnost, že Matěj vyhraje?

17. Na jednotkové kružnici jsou dány body A, B, C, A', B', C' (viz obrázek). ABC a $A'B'C'$ tvoří rovnostranné trojúhelníky a obrázek je symetrický podle přímky $x = y$. Nechť f je zobrazení tvaru $f(x, y) = (a_1x+b_1, a_2y+b_2)$ s reálnými koeficienty, které přiřazuje bodům A, B a C jejich čárkované verze. Jaký je součet souřadnic obrazu bodu $(1, 1)$?



18. Máme posloupnost těles, která vzniknou vhodným "zmačkáním" kužele (ozn. K_0) o objemu 1. (špička kužele je vždy ve stejné výšce jako základna nebo ohyb zmačkaného kužele, ohyb kužele je rovnoběžný s podstavou) Jaký má objem K_{2017}?



19. Projděte následující pyramidu od horního patra (ve kterém je pouze číslo 1) postupně až úplně dolů a to tak, aby součet čísel, na které vkročíte, byl co největší. Zároveň z každého čísla můžete postoupit

pouze na jedno ze dvou čísel těsně pod ním. Tzn. v druhém řádku (5 6) můžete z čísla 5 pokračovat pouze na číslo 9, nebo 0, ale ne 8. Jako výsledek zadejte výsledný součet.

```
                    1
                   5 6
                  9 0 8
                 0 5 2 7
                0 7 4 0 4
               6 8 7 7 3 0
              0 0 6 8 8 7 6
             1 7 6 5 7 7 6 7
            7 7 8 2 2 1 3 7 1
           0 9 1 2 6 5 0 5 1 2
          3 1 8 2 3 0 6 1 3 5 9
         7 1 5 3 4 7 0 5 0 3 5 0
        9 4 4 4 5 0 8 7 1 1 4 5 8
       8 0 9 1 2 1 0 1 2 0 9 9 7 8
      2 5 5 3 8 5 4 5 1 2 7 6 5 5 1
     2 7 6 1 3 8 4 9 2 8 0 7 5 0 3 0
    7 9 0 6 7 0 5 1 2 7 4 7 9 4 0 6 2
   8 8 3 5 1 7 5 2 1 5 3 1 0 8 9 2 4 0
  5 5 7 7 8 1 4 5 9 0 2 1 8 8 4 3 6 5 4
 1 5 3 3 5 2 5 9 9 9 9 3 0 4 1 3 1 2 1 7
```

20. Mějme obdélník $ABCD$, označme S průsečík jeho úhlopříček. Osa úhlu BAS protne BC v bodě L. Délka strany AB je 3 a $\frac{|AL||AL|}{|BS||BL|} = 5$. Jaký je obsah obdélníku?

21. Henry má kladné celé číslo zapsané v soustavě o základu 2017, které je dělitelné číslem 2018, toto splňuje např. (13)(13). Pokud ale jeho číslo budeme číst v soustavě o základu 2018, bude dělitelné číslem 2017. Jaké je nejmenší takové číslo v 2017 soustavě převedené do soustavy desítkové?

22. Kouma slepil k sobě dva pravidelné osmistěny a čtyři pravidelné čtyřstěny. Jaký je nejmenší možný součet počtu stěn, hran a vrcholů vzniklého objektu?

23. Najděte největší přirozené číslo $N < 10^{2017}$ s vlastností, že několik prvních cifer čísla N^2 tvoří N. Jako výsledek zadejte součet všech činitelů po rozkladu hledaného čísla na prvočísla.

24. V jazyce kmene $AYYYE$ jsou 4 hlásky: A, U, Y, E. Hláska E má zvláštní význam: vyslovená samostatně znamená nějaké slovo, ale jestliže je připojená k nějakému slovu na začátek, uprostřed, nebo na konec, tak význam tohoto slova se nemění. Mimo jiné, když přislušník kmene vysloví řetězec 7 stejných hlásek, tak to znamená to stejné jako kdyby vyslovil jedno E. Nakonec, domorodci místo $UUUY$ občas říkají YU, místo AAY zase YA a místo $UUUUA$ říkají AU. Mezi těmito slovy se nedělá rozdíl. Jaký je počet slov v tomto jazyce (významově různých)?

25. Mějme tři soustředné elipsy E_1, E_2, E_3, zkonstruované následovně: Je dána elipsa E_1. Vedlejší vrcholy E_2 jsou totožné s hlavními vrcholy E_1 a ohniska E_2 jsou totožná s vedlejšími vrcholy E_1. Dále vedlejší vrcholy E_3 jsou totožné s hlavními vrcholy E_2 a ohniska E_3 jsou totožná s vedlejšími vrcholy E_2. Všechny tři elipsy mají stejný poměr hlavní a vedlejší osy. Jak je dlouhá hlavní osa elipsy E_1, pokud se od hlavní osy E_3 liší jen o $\sqrt{2000} - 20$?

26. Část tabulky vyplníme čísly 1 - 17 jako na obrázku. Součin všech čísel v tabulce označme S. Kolik existuje čísel, která jsou druhou mocninou přirozeného čísla a zároveň dělí součin S?

17 16 15 . . . 2 1
16 15 1
15
. .
. .
.
2 1
1

27. Henry si na stůl vysypal 10 zápalek a začal si z nich skládat čísla tak, že každá cifra vypadala jako na digitálních hodinách. Na číslo 1 jsou potřeba 2 zápalky, na 7 jsou potřeba 3, a podobně. Kolik různých čísel mohl vyskládat, jestli vždy použil všechny zápalky?

28. Kolika způsoby lze obarvit šachovnici 2x8 třemi barvami tak, aby žádná dvě políčka sousedící hranou neměla stejnou barvu?

29. Najděte maximální možnou hodnotu $a + b$, kde $a, b \in \{1, \ldots, 2017201720172017\}$ splňující $(a^2 - b(a+b))^2 = 1$.

30. Obdélník, jehož jedna strana má délku 3, přehneme tak, aby se jeden jeho vrchol překryl se středem obdélníku. Délka přehybu je 2. Jaký je obsah výsledného útvaru, když víte, že nepřehnutá část je lichoběžník?

Mathrace Sada 3

odevzdávejte do 19.00

31. Máme tři férové šestistěnné kostky s hodnotami po řadě (1, 1, 6, 6, 8, 8), (2, 2, 4, 4, 9, 9) a (3, 3, 5, 5, 7, 7). Kryštof a Simona si postupně vyberou kostku, nejprve Kryštof, poté ze zbylých dvou Simona. Oba hrají optimálně (nejlépe jak lze). Vyhrává ten, komu padne vyšší číslo. Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje Kryštof?

32. Nechť je dán v rovině pravidelný dvanáctiúhelník $A_1A_2A_3 \dots A_{12}$ s vrcholy pojmenonovanými proti směru hodinových ručiček. Souřadnice vrcholu A_k zapisujeme $(x_k, y_k), k = 1, \dots, 12$. Střed úhlopříčky A_5A_9 má souřadnice $(15, 5)$ a střed úhlopříčky A_8A_{12} má souřadnice $(12, 8)$. Vypočítejte součet $(x_1 - y_1) + \dots + (x_{12} - y_{12})$.

33. Máme klasické 24-hodinové digitální hodiny ukazující hodiny a minuty (např. 6:15, nikoliv 06:15). Jedna číslice je tvořena pomocí 7 stejných paliček, zabírají tedy stejně místa a liší se pouze tím, které paličky svítí a které ne. Číslice jsou hned vedle sebe, dvojtečka není důležitá. Kolikrát za den, se nám může stát, že pokud zároveň uvidíme hodiny a jejich zrcadlový obraz, nebudeme schopni určit kolik je hodin? Uvědomme si, že při důkladném pozorování si 22:11 nikdy nespleteme se zrcadlovým obrazem.

34. Pravidelný dvanáctistěn rozřízneme rovinou tak, že vzniknou dva mnohostěny s nenulovým objemem. Jaký je součet všech možných počtů vrcholů mnohoúhelníku, který je průnikem roviny řezu s dvanáctistěnem?

35. V Kuřimi je 9 autobusových zastávek. Kolik nejvíce tratí může být v Kuřimi, jestliže platí, že na každé trati jsou 3 zastávky, a že každé 2 tratě mají maximálně jednu společnou zastávku.

36. Uvažujme dva čtverce spojené jednou hranou (obrazec má teda 7 hran). Kolika způsoby můžeme z těchto 7 hran jich několik (0-7) odebrat tak, aby výsledný útvar byl souvisly? (Uvažujme, že prázdný útvar je také souvislý).

37. Mějme rovnostranný trojúhelník ABC o straně 1. Označme S střed kratšího oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC. Dále zvolme na straně AC bod T a označme P průsečík přímky ST a strany BC. Pokud $|BP| = |CT|$, kolik je $|CP|$?

38. Vezmeme si číslice 0 až 9 a utvoříme z nich 2 trojciferná a 2 dvojciferná čísla $a = x_1x_2x_3, b = x_4x_5, c = x_6x_7x_8, d = x_9x_{10}$ tak, že hodnota výrazu $|ab - cd| = m$ je maximální. Kolik je m?

39. Určete počet mřížových bodů (bodů s celočíselnými souřadnicemi) na kružnici s poloměrem $B = 2047^{2048}$ a středem v počátku soustavy souřadnic.

40. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, délky odvěsen jsou $|CA| = 30, |CB| = 16$. Dále body S_1 a S_2 jsou středy kruhů k_1 a k_2 se stejným poloměrem r a S_1, S_2 leží vně trojúhelníka ABC. k_1 se dotýká polopřímky $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ a strany AB, k_2 se dotýká polopřímky $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ a strany AB a zároveň k_1 a k_2 mají vnější dotyk. Poloměr r lze potom vyjádřit jako zlomek v základním tvaru $\frac{p}{q}$. Jaký?

41. Henry si vytvořil domina, každé domino mělo v horní i dolní části nějaké slovo. Domina vypadaly takto: $\frac{baa}{b}, \frac{a}{baa}, \frac{b}{aa}$. Z každého domina měl neomezený počet. Začal je náhodně skládat vedle sebe a zjistil, že slovo tvořené z horních částí domin je stejné jako slovo tvořené z dolních částí domin. Jaké je druhé nejkratší slovo, které takto mohl vytvořit?

42. Na nekonečné bílé šachovnici se nachází černý pruh 2017×2, v jehož rohovém políčku stojí kůň. Na kolik nejméně skoků dokáže kůň proskákat všechna černá políčka? Kůň se pohybuje jako v šachu.

43. Vojta a Dominik hrají hru. Nejprve se dohodnou na přirozeném čísle M, pak Vojta napíše na tabuli 1. Potom se střídají v následujícím tahu: Když jeden napíše na tabuli n, druhý musí napsat na tabuli $n+1$ nebo $2n$, za podmínky, že číslo, které napíše nepřevýší M. Ten kdo napíše M vyhrává. Najděte počet $M \leq 2017$ takových, že Dominik má výherní strategii.

44. Kolik je $14 \star 52$, kde binární operaci na přirozených číslech $\star$ definujme jako:

$$a \star a = a$$

$$a \star b = b \star a$$

$$(a+b) \cdot (a \star b) = b \cdot (a \star (a+b))$$

45. Je dána pravidelná pěticípá hvězda, hrana cípu má délku a, ramena cípu svírají úhel 36^o. Nyní se položí čtverec s délkou strany $\frac{a}{3}$ na rameno hvězdy a začne se převalováním posouvat po jejím obvodu, viz obrázek. Kolikrát se čtverec otočí o 360^o kolem svého vlastního středu, než se každý jeho bod vrátí do výchozí pozice?