Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.00

1. Mějme tabulku, součet čísel v libovolném řádku, sloupci i úhlopříčce je stejný. Navíc čísla jsou kladná a neopakují se. Jaký je nejmenší možný součin čísel na hlavní diagonále v následující tabulce:

	18		
		9	4
5	8		
		15	

2. Náhodně vybereme tři přirozená čísla od 1 do 1000. Jaká je převrácená hodnota pravděpodobnosti, že všechny tři čísla budou tvořit aritmetickou posloupnost.

3. Je dán čtyřstěn $ABCD$ s objemem 2048. Uvnitř čtyřstěnu je bod P. Dále nechť S_A, S_B, S_C, S_D jsou po řadě těžiště čtyřstěnů $PBCD, PCDA, PDAB, PABC$. Určete objem čtyřstěnu $S_AS_BS_CS_D$

4. Najděte všechny dvojice celých čísel (x, y) splňující, že existuje prvočíslo p a pro které platí $x^2 - 3xy + p^2y^2 = 12p$. (Výsledek zadejte jako součet všech $|x \cdot y|$)

5. Na klasickou šachovnici (levý dolní roh má souřadnice A1) 8x8 umisťujeme kostičky 1x3, dokud nám nezbyde jedno políčko volné. Jaké souřadnice toto políčko může mít? Výsledek zadejte jako posloupnost dvojic písmenočíslo seřazených primárně podle abecedy a sekundárně číselně. Příklad odpovědi: A3A4B2D1D6

6. Alenka sedí v kolečku. Kolem sebe má 10 svých plyšáčků a přemýšlí s kterými může spát v náručí. Jedinou podmínkou je, že každá náruč plyšáčků musí být ňuňavá. Náruč plyšáčků je ňuňavá pokud v ní je alespoň jedna trojice plyšáčků, kteří seděly v kolečku vedle sebe. Kolik má Alenka možností, jak si vybrat plyšáčky?

7. Je dán čtyřuhelník $ABCD$ takový, že $|\angle DAB| = 60°$, $|\angle ABC| = 90°$ a $|\angle BCD| = 120°$. Dále nechť S je průsečík jeho úhlopříček a $|BS| = 1$, $|SD| = 2$. Najděte obsah $ABCD$.

8. Je zadána operace $a \cdot b = a + ab - 3b$ (POZOR, pokud a nebo b je ve tvaru $c \cdot d$, je třeba psát závorky, obecně totiž $(a \cdot b) \cdot c \neq a \cdot (b \cdot c)$). Najděte způsob, jak zapsat číslo 18 pouze pomocí čísla $2, (,)$ a $\cdot$, který obsahuje nejméně znaků.

9. Na kružnici umístíme náhodně dva body. Jaká je pravděpodobnost, že jejich vzdálenost nebude větší než poloměr této kružnice.

10. Najděte největšího společného dělitele všech čísel tvaru $p^8 - 1$, kde p je prvočíslo větší než 5.

11. V bodě A krychle $ABCDEFGH$ o straně 6 svítí zdroj světla. Dále je v krychli čtverec s vrcholy ve středech svislých stěn. Najděte obsah stínu, který vrhá čtverec na stěny krychle.

12. Určete posledních šest číslic čísla $5^{678^{901^{234}}}$.

13. Najděte největší přirozené číslo x splňující $x^{x^x} < 4^{4^{4^4}}$

14. Je dána funkce $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ splňující $xf(x) + x^2 f(-x) = x^2 + 1$. Určete $f(100)$.

15. Vánoce se blíží a Kouma se rozhodl, že nakoupí dárky během následujících n dnů. První den koupil jeden dárek a jednu sedminu zbývajících dárků. Druhý den koupil dva dárky a jednu sedminu zbývajících dárků a pokračoval tímto způsobem. Poslední den koupil n zbývajících dárků. Kolik dárků Kouma nakoupil?

16. Operace $+$ na množině písmen $\{M, A, T, H, R, C, E\}$ je zadána additivní tabulkou:

+	M	A	T	H	R	C	E
M	A	M	T	C	T	R	M
A	M	A	T	H	R	C	E
T	T	T	T	M	C	T	T
H	C	H	M	C	H	M	H
R	T	R	C	H	C	R	R
C	R	C	T	M	R	C	C
E	M	E	T	H	R	C	E

S každou operací $a + b$, je třeba psát závorky a jednoznačně tak určit prvky operace, obecně totiž $(a + b) + c \neq a + (b + c)$. Jaké různé výsledky můžeme dostat různými uzávorkováními výrazu $M + A + T + H + R + A + C + E$? Zadávejte velkými písmeny seřazenými podle abecedy a bez mezer.

17. Na 3D hodinách obíhá minutovka ve svislé rovině, hodinovka v rovině rovněž svislé, ale kolmé k té "minutovkové". (Perioda oběhu ručiček je jako u standardních přesnějdoucích hodin.) Jaký je nejkratší (nenulový) interval (v minutách) mezi dvěma okamžiky, v nichž svírají ručičky úhel $60°$?

18. Najděte nejmenší číslo, které začíná jedničkou, a když jedničku přesuneme na konec tohoto čísla, zvětšíme ho tím třikrát.

19. Mějme $\triangle ABC$ a pro jeho úhly platí $\cos(3\alpha) + \cos(3\beta) + \cos(3\gamma) = 1$. Dvě strany trojúhelníku mají délku 10 a 13. Druhá mocnina maximální délka poslední strany je přirozené číslo, jaké?

20. Najděte číslo 2016 (Ve formě uspořádané dvojice "(řádek.sloupec)") v následujícím uspořádání přirozených čísel.

1	3	6	10	15...
2	5	9	14...	
4	8	13...		
7	12...			
11...				

21. Kružnice k o poloměru r má dvě rovnoběžné tečny s a t. Dotýká se jí kružnice l o poloměru 49, která se rovněž dotýká tečny t a kružnice m o poloměru 64, která se také dotýká tečny s. K tomu se l a m dotýkají. Všechny dotyky jsou vnější. Najděte r.

22. Karel, Lukáš a Marek čekají na výplatu. Karel má dostat 15 zlaťáků, Lukáš 10 a Marek 12. Výplatčí rozděluje zlaťáky po jednom. Náhodně si vybere jednoho z nich (který ještě nedostal tolik, kolik žádá) a dá mu minci. Toto opakuje než rozdá 30 zlaťáků, poté usne. Jaká je pravděpodobnost, že Karel nedostane zaplaceno celou částku?

23. Máme klasickou šachovnici 8×8 s očíslovanými řadami 1 až 8 a jednoho střelce. Střelec se pohybuje obvyklým způsobem s tím rozdílem, že z řady a musí táhnout do řady $b < a$. Kolik je možností,

jakými se střelec dostane z libovolného bílého pole 8. řady (tj. sečtěte možnosti ze všech těchto polí) na jakékoliv bílé pole 1. řady? Nezapomeňte, že stejnou cestu je přitom možno projet více možnostmi.

24. Nechť N je 3-ciferné přirozené číslo tvořené různými nenulovými číslicemi. Jaký nejmenší výsledek můžeme dostat, když N vydělíme jeho ciferným součtem?

25. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je sudé. Napište hodnotu součinu $x_1 \cdot x_3 \ldots x_{n-1}$, kde x_i je kořenem polynomu $x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + \cdots + 2x + 1$ a $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, pro $n = 2016$.

26. Je dán trojuhelník ABC a bod D jako průsečík osy úhlu $\angle BAC$ a úsečky BC. Pokud $|AD| + |AB| = |CD|$ a $|AC| + |AD| = |BC|$, jaké jsou velikosti úhlů trojuhelníku ABC postupně při vrcholech A, B a C ve stupních? Řešení zadejte ve formě "(úhel.úhel.úhel)"

27. Číslo x a x^2 dávají stejný čtyřciferný zbytek po dělení číslem 10000. Jaký?

28. Toník se dívá na kouli o průměru 10 cm ze vzdálenosti 50 cm (měřeno od středu koule do středu úsečky spojující jeho oči, které mají zanedbatelnou velikost). Toníkovy oči jsou od sebe vzdáleny 8cm. Jak velkou plochu povrchu koule v centimetrech čtverečních celkem vidí (alespoň jedním okem)?

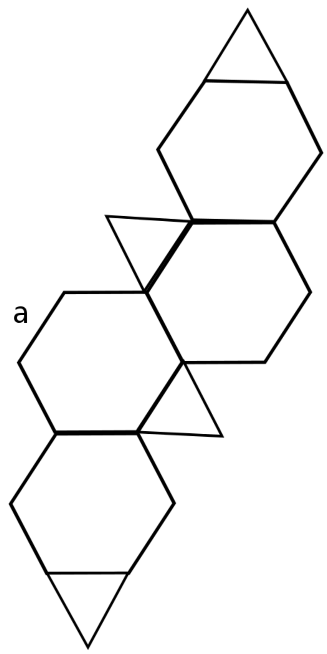
29. Kolika způsoby můžu zaplatit částku 2016 korun, pokud mám k dispozici neomezený počet jednokorun, pětikorun a desetikorun.

30. Najděte počet všech trojciferných čísel $\overline{xyz}$ takových, že 2019-ciferné číslo $\overline{xyzxyzxyz\ldots xyz}$ je dělitelné číslem 91.

Mathrace Sada 3

odevzdávejte do 19.00

31. Určete objem tělesa s touto sítí, kde $a = 1$.



32. Uvažme číslo $0,a01ba01ba01...$, kde a, b jsou nějaké číslice. Toto číslo lze vyjádřit ve tvaru $224/n, n \in \mathbb{N}$. Zapište součet $a + b + n$.

33. Mějme posloupnosti $(a_0, a_1, ...), (b_0, b_1, ...)$ definované rekurentními vzorci $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2^{a_n}$, $b_0 = 1$, $b_{n+1} = 6^{b_n}$. Najděte přirozené číslo n, pro které platí $b_n \leq a_{100} \leq b_{n+1}$.

34. Uspořádaná dvojice (m, n) nezáporných celých čísel je pěkná, pokud sečtení čísel m a n v desítkové soustavě nevyžaduje přenos přes desítku. Najděte počet pěkných uspořádaných dvojic (m, n) takových, že $m + n = 1492$.

35. Jsou dvě kružnice k a l s poloměry 8 a 6 v rovině se vzdáleností středů 12. V bodě A, jednom bodu z průsečíků k a l, vedeme přímku p tak, že tětivy QP a PR mají stejnou délku, kde Q leží na k a R na l. Najděte druhou mocninu délky QP.

36. Nechť $P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$ a $P_n(x) = P_{n-1}(x - n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Jakej je koeficient u členu x v polynomu $P_{20}(x)$.

37. Rozložte číslo $abbcabbcabc = a \cdot 10^{10} + b \cdot 10^9 + ... + 10b + c$ na součin prvočísel a čísla, jehož cifry jsou a, b nebo c (logická disjunkce), pokud víte, že $a + c = b$. Součin napište ve tvaru $p_1.p_2 \dots p_n.f(a, b, c)$, kde $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n, n \geq 1$ a kde $f(a, b, c)$ je číslo s ciframi a,b a c.

38. Náhodně vybereme ze šachovnice 8×8 3 políčka, jaká je pravděpodobnost, že budou tvořit písmeno L.

39. Dva reálné kořeny p a q funkce $f(x) = x^3 + ax + b$, a $p + 4$ a $q - 3$ jsou kořeny $g(x) = x^3 + ax + b + 240$. Jaký je součet všech přípustných hodnot $|b|$.

40. Najděte největší přirozené číslo n pro které lze $n!$ vyjádřit jako součin $n-3$ po sobě jdoucích přirozených čísel.

41. Kolik uspořádaných čtveřic (x, y, z, w) přirozených čísel menších než 500 splňuje $x + w = y + z$ a $yz - xw = 93$?

42. Nechť $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ je podmnožina celých čísel a je zadána operace $a \bigoplus b = a + ab - 2b$ (POZOR, pokud a nebo b je ve tvaru $c \bigoplus d$, je třeba psát závorky, obecně totiž $(a \bigoplus b) \bigoplus c \neq a \bigoplus (b \bigoplus c)$). Nechť n je nejmenší přirozené číslo, pro které platí, že libovolné celé číslo se dá napsat pouze pomocí $a_1, a_2, ..., a_n, (,)$ a $\bigoplus$ (příklad zápisu: $22 = (3 \bigoplus 4) \bigoplus 3$, kde 3 a 4 jsou prvky M). Najděte taková $a_1, a_2, ...a_n$, aby absolutní hodnota ze součinu $a_1.a_2...a_n$ byla co nejmenší. Prvky vypište od nejmenšího po největší ve tvaru $a_1.a_2.\ldots.a_n$.

43. Postavme figurku na číslo 1 odpovídající kombinační číslu $\binom{0}{0}$ v Pascalově trojúhelníku. Krokem rozumíme přesun figurky z čísla odpovídajícího $\binom{n}{k}$ na jedno z čísel odpovídajících $\binom{n+1}{k}$ a $\binom{n+1}{k+1}$. Na jaké největší číslo se může figurka dostat po provedení $m \leq 20$ kroků, přičemž čísla před a po jednotlivém kroku se mohou lišit maximální o $(20-m)^2$?

44. Pro přirozené číslo n nechť $f(n)$ je součin nenulových číslic desítkového zápisu čísla n (Pokud je n jednociferné, pak $f(n) = n$). Dále nechť $F = f(1) + f(2) \ldots f(999)$. Jaký je největší prvočíselný dělitel čísla F?

45. V kartézské soustavě souřadnic body $(0,0)$, $(x_1, 11)$ a $(x_2, 37)$ jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Najděte hodnotu čísla $x_1 x_2$.