Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.00

1. Mějme tabulku o 3 řádcích a 52 sloupcích. Dále máme dílky domina o rozměrech 2×1. Kolika způsoby lze tato tabulka vyplnit dílky domina tak, aby právě dva dílky domina byly vertikálně?

2. Buď $S = \{1, 2, \dots, 24\}$. Určete počet všech čtyřprvkových podmnožin S, jejichž žádné dva prvky nejsou po sobě jdoucí přirozená čísla (tedy jde o čtyřprvkové podmnožiny $P \subseteq S$, pro něž platí implikace $x \in P \implies x + 1 \notin P$).

3. Provaz o délce 10 m je náhodně roztřižen na tři kusy. Jaká je pravděpodnost, že alespoň jeden z kusů má víc jak 4 m?

4. Určete hodnotu součtu $\lfloor \frac{2015+2^0}{2^1} \rfloor + \lfloor \frac{2015+2^1}{2^2} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{2015+2^{2014}}{2^{2015}} \rfloor$.

5. Jaké je největší n takové, že pravidelný n-úhelník nelze obarvit šesti barvami tak, aby v každé pětici sousedních vrcholů byly pouze vrcholy různých barev?

6. V rovině máme sto soustředných kruhů s poloměry $1, 2, 3, \dots, 100$. Vnitřek kruhu s poloměrem 1 je obarven černě, každá další oblast (mezikruží) je obarveno bíle nebo černě tak, že sousední oblasti jsou vybarveny jinou barvou. Poměr celkové plochy obarvené bílou vůči celkové ploše největšího kruhu (kruhu s poloměrem 100) můžeme vyjádřit jako m/n, kde m a n jsou nesoudělná kladná celá čísla. Najděte $m + n$.

7. Kostka o hraně 4 se skládá z 64 kostiček o hraně 1. 16 z těchto kostiček obarvíme na černo. Takto obarvená kostka je *užitečná*, pokud v každém kvádříků $1 \times 1 \times 4$ v kostce je právě jedna černá kostička. Kolik existuje *užitečných* kostek?

8. 9 turistů, 3 z každé ze tří zemí, navštívilo restauraci. Náhodně si vybrali místa kulatého stolu o devíti místech. Nechť $\frac{m}{n}$, kde m, n jsou nesoudělná, je pravděpodobnost, že každý turista sedí vedle alespoň jednoho turisty z jiné země. Najděte $m + n$.

9. Šestiúhelník $KLMNOP$ je vepsán do kružnice. Určete, její poloměr s přesností na 7 desetinných míst, víte-li, že platí $|KL| = |LM| = |MN| = 1$ a $|NO| = |OP| = |PM| = 2$.

10. Kolika způsoby lze vybrat šest karet ze standardního balíčku o 52 kartách tak, že se mezi vybranými kartami vyskytují všechny barvy? (Barvami myslíme *karetní barvy*, tedy piky, káry, srdce, kříže.)

11. Kolik existuje pěticiferných čísel začínajících devítkou, které obsahují právě dvě stejné cifry?

12. Nechť $a, b, ..., f$ jsou nezáporná reálná čísla taková, že $a + b + c + d + e + f = 1$, a současně $ace + bdf \geq \frac{1}{540}$. Nechť p a q jsou nesoudělná kladná celá čísla taková, že $\frac{p}{q}$ je maximální možná hodnota $abc + bcd + cde + def + efa + fab$. Najděte $p + q$.

13. Určete součet všech prvočísel p takových, že $2048p + 1$ je třetí mocninou přirozeného čísla.

14. Do výrazu $\frac{29:28:\cdots:16}{15:14:\cdots:2}$ lze doplnit závorky tak, že je-li nějaká závorka v čitateli, musí být na stejném místě také ve jmenovateli. Jaký je součet nejnižší a nejvyšší celočíselné hodnoty, které může zlomek nabývat?

15. Určete součin všech kladných řešení rovnice $\sqrt{2015}x^{\log_{2015} x} = x^2$.

Mathrace Sada 2

odevzdávejte do 18.00

16. Určete počet všech přirozených čísel nepřevyšujících 85, které nelze zapsat ve tvaru $a^2 + b^4 + c^6 + d^8 + e^{10}$ pro nějaká celá čísla a, b, c, d, e.

17. Víme, že pro reálná čísla a, b, c, d platí $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 85$ a současně $|ac - bd| = 40$. Zajímá nás, jakých hodnot může nabývat $|ad + bc|$. Určete součet všech možných takových hodnot.

18. Jaké je největší sedmiciferné číslo zapsané pomocí sedmi různých číslic, které je navíc dělitelné všemi těmito číslicemi?

19. Jaké je největší množství obdélníků $1 \times 10\sqrt{2}$, které lze vystříhat z obdélníku 50×90 pokud jsou všechny střihy rovnoběžné se stranami obdélníku?

20. Najděte součet všech n, která splňují $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$, kde d_1, d_2, d_3, d_4 jsou čtyři nejmenší dělitelé n.

21. Kolik nejméně je potřeba odstranit políček šachovnice 10×10 tak, aby žádná čtveřice zbývajících polí netvořila vrcholy obdélníku? (Čtverec je považován za obdélník.)

22. Náhodně zvolíme přirozené číslo n menší než 10^{2015}. Jaká je pravděpodobnost, že $\binom{n}{7}$ je dělitelné 12.

23. Určete počet přirozených čísel, která dělí právě jedno z čísel $2015^{403}, 403^{2015}$.

24. Robot má za úkol kreslit čtverce 1×1 do čtvercové mřížky. Čtverce kreslí postupně po řadách o právě sedmi čtvercích. Zaplní-li řadu, pokračuje o řádek výše. Hrany čtverců, které spolu sousedí nekreslí dvakrát (tedy např. na nakreslení dvou sousedících čtverců je zapotřebí sedmi hran). Robot má zásobník na nakreslení právě 2015 hran. Kolik čtverců 1x1 nakreslí?

25. Pro kolik permutací $(0, 1, \ldots, 2015)$ existují celá čísla a, b taková, že na i-té pozici je číslo $a \cdot i + b$ modulo 2016?

26. Hovnivál je v levém dolním rohu mřížky 64×144 (výška $\times$ šířka). Potřebuje se dostat do pravého horního rohu, kde má schovaný svůj proviant. Nechce se vracet a tak chodí jen nahoru nebo doprava. Může se pohybovat pouze po hranách mřížky a to takovým způsobem, že než změní směr, tak chodí vždy alespoň o 12 kroků nahoru nebo alespoň o 4 kroky doprava. Určete počet mřížových bodů, přes které nemůže vést žádná z jeho možných výprav. Tedy počet bodů, kudy nelze vést takovou cestu.

27. Kolik je čísel $4 \leq n \leq 1023$, jejichž binární zápis neobsahuje tři po sobě jdoucí stejné cifry?

28. Osmice degustátorů degustovala na výstavě letošní ročník. U každého dvojice vzorků platí, že právě dvěma degustátorům oba vzorky chutnaly, právě dvěma degustátorům chutnal první vzorek a druhý nechutnal, právě dvěma degustátorům chutnal druhý, ale ne první a právě dvěma degustátorům nechutnal ani jeden. Kolik nejvýše mohlo být na výstavě vzorků?

29. Funkce f definovaná na reálných číslech splňuje $f(x) + f(x-1) = x^2$ a $f(15) = 80$. Kolik je $f(80)$?

30. Součet prvních 2016 členů geometrické posloupnosti je 200, součet prvních 4032 je 380. Určete součet prvních 6048 členů.

31. Máme tabulku 3×3 a v ní všech devět cifer od 1 do 9:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

(a) $a + b + c > d + e + f > g + h + i$,

(b) e je prvočíslo a dělí g,

(c) $f > a$,

(d) $b + g = h$,

(e) $i \neq 1$.

Určete pořadí cifer v tabulce a jako odpověď zadejte devíticiferné číslo $abcdefghi$.

32. Najděte všechna n, jejichž jedinými prvočíselnými děliteli jsou 2 a 5, taková, že $n + 25$ je čtverec přirozeného čísla. Zadejte jejich součet.

33. Kladná reálná čísla x, y splnují $y = \frac{3}{4}x$, $y^x = x^y$. Najděte $x + y$ a zadejte s přesností na pět desetinných míst.

34. Čtyřúhelník $ABCD$ splňuje, že $|AD| = 10, |BC| = 8, |CD| = 12$ a vnitřní úhly u vrcholů A a B jsou $60°$. Délka strany AB lze zapsat ve tvaru $a + \sqrt{b}$, kde a a b jsou přirozená čísla. Kolik je $a + b$?

35. Najděte všechny trojice **prvočísel** x, y, z, pro které platí

$$x(x + y) = z + 120.$$

Jako výsledek zadejte součet všech čísel v těchto trojicích, tedy součet $3n$ čísel, kde n je počet trojic spňujících zadání.

36. Součet ploch všech trojúhelníků, jejichž vrcholy jsou vrcholy jednotkové krychle, je $m + \sqrt{n} + \sqrt{p}$, kde m, n, a p jsou celá čísla. Najděte $m + n + p$.

37. Jak nejblíže (v metrech) musí být Fakulta informatiky od Přírodovědecké fakulty, aby se studentovi časově vyplatilo jezdit trolejbusem a nechodit pěšky jestliže: Fakulty leží mezi zastávkami vždy ve vzdálenosti 50 m od bližší zastávky, student chodí rychlostí 5 km/h a trolejbus jezdí průměrnou rychlostí 30 km/h a jezdí nepřetržitě (čekání neuvažujeme).

38. Kružnice vepsaná do rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$. Označme průsečíky kružnice s úhlopříčkou AC jako K a L (K leží mezi A a L). Najděte hodnotu $\frac{|AL| \cdot |KC|}{|AK| \cdot |LC|}$ a zadejte ji zaokrouhlenou na čtyři desetinná místa.

39. Rotační kužel má základnu o poloměru 600 a výšku $200\sqrt{7}$. Mravenec začíná na povrchu kužele v místě vzdáleném 125 od vrcholu kužele a pak jde do místa přesně na opačné straně kužele, ale do vzdálenosti $375\sqrt{2}$ od vrcholu. Najděte nejmenší vzdálenost, kterou mohl mravenec po kuželu urazit.

40. Mějme kružnici vepsanou do lichoběžníku $ABCD$. Nechť K, L, M, N jsou průsečíky kružnice pořadě s úhlopříčkou AC a BD (K leží mezi A a L, M leží mezi B a N). Najděte poloměr kružnice, jestliže $|AK| \cdot |LC| = 16$ a $|BM| \cdot |ND| = \frac{9}{4}$.

41. Najděte nejmenší přirození číslo n takové, že když n políček na šachovnici 1000×1000 obarvíme na černo, budou na šachovnici tři políčka tvořící vrcholy pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami rovnoběžnými s hranami šachovnice.

42. Uvažme řetězec n sedmiček, $7777 \cdots 77$, do kterého přidáním znamének + (sčítaní) vytvoříme aritmetický výraz. Tímto způsobem můžeme dostat hodnotu 875 z řetězce osmi sedmiček jako $7 + 77 + 777 + 7 + 7 = 875$. Pro kolik různých n je možné přidáváním znamének + do řetězce dostat hodnotu 7000?

43. Na kolik nejméně lomů dokážete rozlámat čokoládu o tvaru pravidelného trojúhelníka o straně délky 46 na pravidelné trojúhelníky o straně 1. (Lomem rozumíme rozdělení jednoho kusu čokolády na dva rovnou čarou.)

44. Na kružnici je dokola 108 pytlíků. Henry obešel pytlíky a do každého vložil několik kuliček - vždy alespoň jednu. Dával si však pozor na to, aby součet počtů kuliček v každých dvaceti po sobě jdoucích pytlících byl roven 1000. (Takových dvacetic je zde 108.) Označme $A_0, \ldots, A_{107}$ počty kuliček v jednotlivých pytlících. Nějak se stalo, že $A_1 = 1, A_{19} = 19$ a $A_{50} = 50$. Určete A_{100}.

45. Malý Jarda upekl čokoládovou buchtu, kterou rozřezal na tabulku 499x499. Na ni vanilkovým krémem hezky od středu spirálovitě vypisoval po sobě jdoucí přirozená čísla (na každý dílek jedno počínaje od 1 – viz obrázek), dokud ji celou nepopsal. Protože je nenasytný a tlustý, řekl si, že sní celý prostřední řádek a sloupec buchty, aby mu tak vznikly 4 samostatné buchty obsahující méně kalorií. Jaký je aritmetický průměr čísel zapsaných na prostředcích dílcích těchto čtyř buchet?