Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.00

1. Je dána kvadratická funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Víte, že pro $x = 1$ nabývá extrému (minima nebo maxima), jeden její kořen je 5 a bod $[2, 42]$ leží na grafu funkce f. Zjistěte součin abc.

2. Kouma hází třemi čtyřstěnnými kostkami. Z každého hodu si vybere dvě největší čísla a sečte je. Jaká je průměrná hodnota Koumova součtu?

3. Ňouma našel číslo a takové, že $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3$. Kolik je $a^3 + \frac{1}{a^3}$?

4. Pro kolik trojic celých čísel a, b, c z intervalu $[-2014, 2014]$ platí $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{\frac{a}{b}}{c}$?

5. Je dáno $x_1 = 2014$, $x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$ pro přirozená $n \geq 2$. Spočítejte součin $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{10}$.

6. V prvním kroku rozdělíme vodorovnou úsečku délky 3^{14} v poměru $1 : 2$. V každém dalším kroku rozdělíme všechny nově vzniklé úsečky v poměru $1 : 2$. Jaká bude délka 2015. dílku zleva po 14 krocích? Dělením úsečky v poměru $1 : 2$ rozumíme její rozdělení na dva kousky, z nichž ten pravý je dvakrát delší než ten levý.

7. Určete součet všech různých hodnot, kterých může nabývat výraz $\sum_{i=1}^{2014} \sum_{j=1}^{2014} (-1)^{x_i + x_j}$, pokud $x_1, x_2 \dots, x_{2014}$ jsou přirozená čísla.

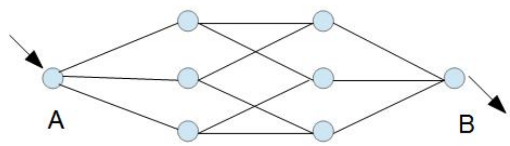
8. Každým mřížovým bodem roviny (tedy bodem, jehož obě souřadnice jsou celočíselné) kromě bodu $[0, 0]$ veďme kolmici ke spojnici s bodem $[0, 0]$. Kolmice rozdělí rovinu na oblasti ohraničené částmi těchto kolmic. Potom do každé oblasti vepíšeme jedno číslo následujícím způsobem. Napišme do oblasti obsahující bod $[0, 0]$ číslo 1. Dále do každé oblasti sousedící stranou s oblastí s číslem 1 napíšeme číslo 2, do oblastí sousedících s číslem 2 napíšeme číslo 3 atd. Určete celkový obsah všech oblastí s číslem 6.

9. Jaké je největší k takové, že 2014 lze zapsat jako součet k po sobě jdoucích přirozených čísel?

10. Pro která přirozená čísla n, $1 < n < 2014$ mají čísla $\frac{n}{n-1}$, $\frac{n}{n+1}$ ukončený desetinný rozvoj? Zadejte součin všech takových n.

11. Nechť M je přirozené číslo, které vznikne zapsáním přirozeného čísla m v desítkové soustavě dvakrát za sebe, $M = \overline{mm}$. Hodnota $k = \frac{M}{m^2}$ je přirozené číslo. Jaké nejmenší hodnoty může nabývat číslo k?

12. Kolika způsoby se lze po čarách na obrázku dostat z bodu A do bodu B, jestliže každou čarou projdeme nejvýše jednou, ale každý vrchol můžeme navštívit vícekrát?



13. Pro kolik permutací $(q_1, \ldots, q_{11})$ čísel $1, \ldots, 11$ nabývá součet

$$|q_1 - 1| + |q_2 - 2| + \cdots + |q_{11} - 11|$$

maximální hodnoty?

14. Nechť $ABCD$ je čtverec o straně délky 1 a uvnitř něj je kružnice k o poloměru $\frac{1}{10}$ dotýkající se dvou jeho stran. Buď $KLMN$ čtverec s vrcholy na stranách čtverce $ABCD$, který se dotýká kružnice k právě v jednom bodě. Jaký je maximální obsah čtverce $KLMN$?

15. Určete počet všech deseticiferných přirozených čísel s ciferným součtem 9.

Mathrace Sada 2

odevzdávejte do 18.00

16. Kolik z prvních 2000 přirozených čísel lze zapsat ve tvaru $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor$, kde $x \in \mathbb{R}$? ($\lfloor x \rfloor$ značí nejvyšší celé číslo, nepřesahující 4).

17. Cecílie má 2014 sourozenců a právě dostala dort, který lze neomezeně dělit. V rodině platí pravidlo, že kdykoli jeden ze sourozenců dostane něco k snědku, sní jednu 2015-tinu a zbytek rovným dílem rozdělí mezi ostatní sourozence. Ti si počínají stejně a pochoutka se dělí až do nekonečna. Jakou část dortu sní celkem Cecílie? Výsledek zadejte jako zlomek v základním tvaru (např. „3/11“, bez uvozovek)

18. Jsou dána přirozená čísla $a < b < c < d$ pro která platí, že a, b, c jsou po sobě jdoucí prvky aritmetické posloupnosti a čísla b, c, d jsou po sobě jdoucí prvky geometrické posloupnosti. Za předpokladu, že $d - a = 30$ určete součet $a + b + c + d$.

19. Funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se nazývá *prapodivně multiplikativní*, pokud platí $f(2a + b) = f(a) \cdot f(b)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$. Kolik existuje prapodivně multiplikativních funkcí takových, že $f(2014)$ je druhou mocninou přirozeného čísla? (Nula není přirozené číslo.)

20. M je podmnožina množiny přirozených čísel taková, že pro všechna $a, b \in M$ platí $|a^2 b - b^2 a| < 2014$. Kolik nejvýše prvků může M mít?

21. Kolika způsoby lze vydláždit obdélník 3×10 dominovými kostkami 1×2?

22. Určete počet uspořádaných dvojic celých čísel (x, y), která splňují $\frac{xy}{x+y} = 2014^{2014}$.

23. Uvažujme množinu $A_{1429} = \{\frac{1}{n} \mid n = 1, \ldots, 1429\}$. Množinu A_k získame z množiny A_{k+1} tak, že její dva najmenší prvky a, b nahradíme prvkem $a + b + ab$. Určete prvek množiny A_1.

24. Kolika způsoby lze zapsat 2014 jako součet pěti přirozených čísel (s ohledem na pořadí sčítanců)?

25. Kolik podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, 10\}$ neobsahuje dvě po sobě jdoucí čísla?

26. Jaký je maximální obsah stínu, který může vrhat kvádr o rozměrech $44 \times 117 \times 240$ na vodorovnou podložku, jestliže je osvětlován sluncem kolmo k podložce? (Neceločíselné výsledky zaokrouhlete na celé číslo.)

27. Dva kruhy jsou umístěny uvnitř čtverce o straně 1 tak, aby se nepřekrývaly (mohou se dotýkat). Jaký je maximální součet jejich poloměrů (zaokrouhlen na pět desetinných míst)?

28. Koumova kalkulačka má devítimístný displej a tlačítka uspořádaná do mřížky 789/456/123 (bohužel nemá tlačítko 0). Kouma vyrábí devíticiferná přirozená čísla tak, že každé dvě po sobě jdoucí cifry přísluší dvěma různým sousedním tlačítkům (přes hranu, nikoliv přes vrchol) na kalkulačce. Kolik různých čísel může Kouma vyrobit?

29. Kouma chce obarvit vrcholy svého dvacetistěnu třemi barvami. Obarvení jednoho vrcholu zlatou barvou vyjde na 3 koruny, modrou barvou to stojí 2 koruny a hnědou pouze 1 korunu. Kouma by rád za barvu utratil co možná nejméně, ale potřebuje, aby libovolná rovina procházející alespoň čtyřmi vrcholy dvacetistěnu obsahovala dva vrcholy lišící se svou barvou. Kolik ho to bude nejméně stát?

30. Pilný řešitel BRKOSu získá za každou ze šesti sérii osm náhodných ale různých hracích karet Kabrňáků. Kolik karet bude pilnému řešiteli průměrně chybět na konci šesté série, jestliže existuje celkem 48 různých hracích karet? Výsledek zaokrouhlete na celá čísla.

Mathrace Sada 3

odevzdávejte do 19.00

31. Na tabuli je napsáno trojciferné číslo. Postupně k němu zprava připisujeme další číslice. Když připíšeme první tak je součet cifer čísla na tabuli 17, když připíšeme další, tak je součin cifer na tabuli 1200. Když připíšeme třetí, tak je součet 24. Výsledné šesticiferné číslo je palindrom. O jaké šesticiferné číslo jde?

32. ABC je trojúhelník o obsahu 21, T je jeho těžiště. Jsou definovány následující posloupnosti bodů: K_n je střed AM_{n-1}, L_n je střed BK_n, M_n je střed CL_n pro $n > 1$ a $M_0 = T$. K jaké hodnotě se blíží obsah trojúhelníku $K_nL_nM_n$ pro n rostoucí nade všechny meze?

33. Mějme funkci $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Přitom máme značení

$$f^n(x) = \underbrace{f(\dots(f}_{n}(x)).$$

Tedy např. $f^2(x) = f(f(x))$. Spočítejte, čemu se rovná

$$c = f(35) \cdot f^2(35) \cdot f^3(35) \cdot \dots \cdot f^{10}(35)$$

a výsledek zadejte jako zlomek v základním tvaru (např. „13/28“, bez uvozovek).

34. Družice má tvar krychle o straně 300. V každém z osmi vrcholů družice bydlí jeden astronaut. Jeden z nich, Matulín, chce postupně navštívit všech 7 svých kolegů, každého právě jednou, přičemž s návratem domů nepočítá. Přitom mezi dvěma vrcholy smí jít pouze nejkratší cestou po povrchu (je-li těchto cest více, smí si svobodně vybrat). Svou trasu nechce nikdy protnout. (tj. žádným bodem neprojde více než jednou). Určete, jakou nejdelší vzdálenost může Matulín ujít. Výsledek zaokrouhlete na jednotky.

35. Bubla má čtyřstěn o straně 1000. Opíše a mu kouli K a vepíše mu kouli k. Kouli K opíše krychli a této krychli opíše kouli L. Kouli k vepíše osmistěn a jemu vepíše kouli l. Určete součet poloměrů všech koulí l, k, K, L a zaokrouhlete jej na celé číslo.

36. Pro každou neprázdnou podmnožinu množiny $\{1, 2, \dots, 2014\}$ uvažme součin převrácených hodnot jejich prvků a všech $2^{2014} - 1$ výsledků sečteme. Výsledek je?

37. Uvažujme opět družici tvaru krychle. Dva astronauti se nachází v protilehlých vrcholech krychle a v každém kroku se přesunou po hraně na náhodný sousední vrchol, nesmí však oba projít v jednom kroku toutéž hranou. Jaká je pravděpodobnost, že po 4 krocích se oba vrátí tam, kde začali? (Odpověď zadejte s přesností na pět desetinných míst.)

38. Přirozené číslo n nazveme *fakt nanicovaté*, jestliže existuje přirozené číslo m takové, že $m!$ končí právě n nulami. Kolik čísel menších než 2014 je fakt nanicovatých?

39. Ňouma našel trojúhelník ABC, $|AB| = 6$ s patou výšky proti vrcholu C označenou jako C_0. Označil si poloměr kružnice vepsané ABC jako r, poloměr kružnice vepsané AC_0C jako t a poloměr kružnice vepsané ABC_0 jako s. Zjistil, že $r = 1$ a $r + t + s = |CC_0|$. Jaká je velikost úhlu ACB? Výsledek zadejte ve stupních zaokrouhlen na celá čísla.

40. Liběnka má cifry 1 až 9 (každou jednou) a vytvoří z nich dvě čísla a, b, $a < b$ s největším možným součinem. Pak je napíše za sebe a vznikne jí číslo $c = \overline{ab}$, které obsahuje každou nenulovou cifru právě jednou. Kolik je c?

41. Pro kolik přirozených čísel $n < 2014$ je $\lfloor \log_2(n) \rfloor$ liché přirozené číslo?

42. Napište čemu se rovná $T_{(2,3,5,7)}(5^{2048}-1)$, kde $T_{(a_1,\ldots,a_n)}(x)$ je Tomův řetězec dělitelnosti pro $x, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. $T_{(a_1,\ldots,a_n)}(x) = \overline{\underbrace{a_1\ldots a_1}_{k_1}\underbrace{a_2\ldots a_2}_{k_2}\ldots\underbrace{a_n\ldots a_n}_{k_n}}$, kde $k_i = \max\{k \in \mathbb{N};\, a_i^k \mid x\}$. Pokud $\forall k_i = 0$, pak $T_{(a_1,\ldots,a_n)}(x) = 0$. $\bar{\cdot}$ značí konkatenaci, neboli zřetězení; zřetězení 123 a 456 je 123456.

43. Henry má rostoucí funkci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která splňuje $f(f(n)) = 3n$. Určete $f(2014)$.

44. Kolik existuje trojúhelníků s celočíselnými délkami stran, jejichž obsah je číselně roven jejich obvodu? (Trojúhelníky o stranách a, b, c a c, b, a považujeme za stejné.)

45. Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že úsečky délky $1, 2, \ldots, n$ lze v tomto pořadí skládat za sebe do prostoru tak, aby vytvořily uzavřenou lomenou čáru takovou, že každá trojice sousedních úseček tvořící lomenou čáru, jsou po dvou navzájem kolmé úsečky.