# Mathrace Sada 1

**odevzdávejte do 17.00**

1. Vyřešte rovnici $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + ... = 1$ pro $|x| < 1$. Zadejte součet všech řešení zaokrouhlený na pět desetinných míst.

2. Jaký je obsah pravidelného 2013-úhelníka s *obvodem* 2013? Zaokrouhlete na celá čísla.

3. Polynom $P(x)$ je čtvrtého stupně a splňuje $P(1) = 2P(2) = 3P(3) = 4P(4) = 5P(5) = 2013$. Určete $P(6)$.

4. Konalo se matematické soustředění. Nebylo tam více než 500 účastníku. Všichni měli rádi matematiku, ale někteří měli ještě rádi fyziku nebo informatiku. Počet všech účastníku byl rovný faktoriálu z počtu lidí, kteří měli rádi všechno. Počet účastníků, kteří měli rádi fyziku, šel vyjádřit jako druhá mocnina přirozeného čísla. Počet účastníků mající rádi informatiku šel vyjádřit jako přirozená mocnina dvou. Počet lidí, kteří měli rádi pouze matematiku bylo 9. Do výsledku zadejte součin počtu lidí, kteří měli rádi fyziku, ale už ne informatiku, a počtu lidí, kteří měli rádi informatiku, ale už ne fyziku.

5. Do tabulky $2013 \times 2013$ jsou po řádcích napsána čísla 1, 2, ..., $2013^2$. Určete počet dvojic sousedních čtverečků takových, že čísla v nich napsaná jsou soudělná.

6. Tři nové operace $\diamond$, $\bullet$ a $\odot$ si zavedeme tímto způsobem: $\diamond(a, b) = 0,5(cos(a + b))^2$, $a \bullet b = a(sin(\frac{a}{b} + 1))^2$, $a \odot b = 2a + b$ Vyřešte rovnici:

$$\left(x^2\left(\diamond\left(\frac{x}{\pi}, 1\right)\right)\right) \odot (x(x \bullet \pi)) = 4$$

   Pokud má rovnice více řešení, zapište pouze to nejmenší.

7. Přirozená čísla $a, b$ splňují $a^6 - b^6 = 3367$. Určete $ab$.

8. Určete počet přirozených čísel nepřevyšujících milion, která mají právě 25 dělitelů.

9. Na tabuli je napsáno číslo 123456789. V jednom kroku můžeme smazat libovolnou číslici a nahradit ji číslicí o jedna menší (číslici 1 na první pozici nelze smazat). V kolika nejméně krocích můžeme získat číslo dělitelné číslem 101?

10. Hraje se poker ($4 \times 13$ karet): Kolika způsoby lze hráči rozdat pět karet, aby neměl v ruce více než tři karty jedné barvy?

11. Veselé náměstí má tvar dvou šestiúhelníků o straně 120, které jsou na sebe nalepeny jednou svou stranou. V každém z deseti vrcholů nekonvexního náměstí bydlí jeden člověk. Matulín chce postupně navštívit všech 9 svých sousedů, každého právě jednou, a vrátit se zpět domů. Přitom mezi dvěma vrcholy tohoto desetiúhelníka smí jít pouze přímo po úsečce. Navíc se smí pohybovat pouze uvnitř desetiúhelníku, nesmí tedy na cestě k některému ze sousedů projít bezprostředně kolem dveří nějakého dalšího souseda. Určete, jakou vzdálenost Matulín ujde, pokud chce ujít co nejdelší trasu. Výsledek zaokrouhlete na jednotky.

12. Máme hodiny bez vteřinové ručičky, přičemž nejsme schopni rozeznat minutovou ručičku od hodinové. Kolikrát za půl dne (od 0:00 do 11:59) nastane okamžik, kdy jedním pohledem (nebudeme studovat, jak se hýbou) nebudeme schopni určit, kolik je hodin? (Pro ilustraci: 11:29 $\cong$ 5:57 apod.)

13. Vakoši obývají planetu tvaru pravidelného dvacetistěnu o straně 1400. Chtěli by spojit severní a jižní pól co nejkratší cestou, ale neumí dělat tunely. Jaká je délka nejkratší možné cesty po povrchu planety? Výsledek zaokrouhlete na jednotky.

14. Pětice řešitelů Adam, Bořivoj, Cyril, Dan a Evžen si rozděluje úlohy očíslované od jedné do pěti. Každý dostane jednu z nich, ale Adam nechce první ani třetí úlohu, Bořivoj nechce druhou ani čtvrtou úlohu, Cyril nechce třetí ani pátou úlohu, Dan si netroufá na první a čtvrtou úlohu a Evžen si nevěří ani se druhou, ani s pátou úlohou. Kolika způsoby si mohou úlohy rozdělit, aby byli všichni šťastní?

15. Které číslo od 1 do 2013 včetně má nejvíce dělitelů?

# Mathrace Sada 2

**odevzdávejte do 18.00**

16. Projděte následující pyramidu od horního patra (ve kterém je pouze číslo 1) postupně až úplně dolů, a to tak, aby součet čísel, na která vkročíte, byl co největší. Zároveň z jednoho čísla můžete postoupit pouze na jedno ze dvou čísel těsně pod ním. Tzn. v patře 2 3 můžete z čísla 2 pokračovat pouze na číslo 5 nebo 6, ale ne 9, stejně tak z čísla 3 pouze na čísla 6 nebo 9, ale ne 5. Jako výsledek zadejte výsledný součet.

1<br>
2 3<br>
5 6 9<br>
3 5 9 8<br>
1 4 5 6 3<br>
2 3 6 8 7 0<br>
3 9 8 7 5 3 6<br>
2 5 6 9 2 7 4 3<br>
6 4 5 2 3 6 5 1 2<br>
3 4 5 5 8 8 7 3 2 1<br>
4 8 6 2 3 6 5 4 5 8 7<br>
1 7 6 6 9 8 7 2 0 1 4 3<br>
6 8 5 9 7 2 3 5 4 3 6 4 7<br>
2 6 5 4 9 8 7 0 1 2 3 5 4 3<br>
2 5 4 7 8 9 6 3 2 1 4 5 3 5 4<br>
5 6 4 7 8 9 6 5 4 1 2 3 5 7 9 8<br>
3 2 5 6 8 7 4 2 3 0 1 5 2 3 5 4 6<br>
2 5 4 7 8 9 6 2 7 5 6 5 3 2 1 4 7 3<br>
2 1 3 6 5 6 8 7 9 3 1 4 4 2 3 4 5 8 7<br>
2 3 5 4 7 8 9 6 5 4 1 2 3 4 5 6 7 8 2 3

17. Určete součet $(i, 2013)$ pro všechna $1 \leq i \leq 2013$ soudělná s 2013, kde $(a, b)$ značí největšího společného dělitele čísel $a, b$.

18. Vyřešte algebrogram $MATHRACE = BRKOS \cdot 2013$, přičemž písmena reprezentují cifry. každé písmeno reprezentuje jinou cifru, s výjimkou A, R, C a O, které zastupují tu stejnou cifru. Jako odpověď zadejte číslo $MATHRACE$.

19. Kolik je řešení magického šestiúhelníku (pravidelného), s ne nutně různými čísly od 1 do 13 ve vrcholech, středech stran a v těžišti, pokud platí, že součet čísel na spojnici dvou sousedních nebo protilehlých vrcholů je konstantní.

20. Kolik je pěticiferných čísel dělitelných 11 složených z právě tří různých cifer?

21. Posloupnost $a_n$ je pro přirozená n definována takto: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_k = a_{k-3} \cdot a_{k-2} \cdot a_{k-1} \pmod 7$ pro $k \geq 4$. Určete $a_{216!+4}$.

22. Najděte $t \in \mathbb{R}$, pro které má rovnice $||x + t| - 2| - 3 = t$ právě tři řešení.

23. Přirozené číslo $n$ je trojciferné a součet jeho cifer je 11. Zapíšeme-li číslice tohoto čísla v obráceném pořadí, tak dostaneme číslo, které je o 297 menší než číslo $n$. Pokud dělíme se zbytkem prostřední číslici čísla $n$ součtem jeho krajních číslic, dostaneme podíl 1 a zbytek taktéž 1. Zadejte číslo $n$.

24. V místnosti je devět kusů smetí rozmístěných do mřížky $3 \times 3$. Roomba vysává smetí počínaje kterýmkoliv políčkem mřížky s následujícím omezením: Kdykoliv přejede přes smetí, vysaje ho. Smí se pohybovat v mřížce pouze vodorovně či svisle. Roomba nesmí žádné políčko navštívit dvakrát. Kolika způsoby může Roomba smetí vysát?

25. Na zahrádce je vysázeno hlávkové zelí a to tak, že v každém bodě o celočíselných souřadnicích je jedna hlávka. Matěj některé hlávky oplotil a to tak, že celkem použil šest sloupků, které umístil místo některých šesti hlávek zelí. Vytvořil tak šestiúhelník s vrcholy v bodech o celočíselných souřadnicích, který obepínal dohromady osm hlávek zelí. Plot neprochází přes zelí. Jaký je obsah oploceného území, jestliže vzdálenost mezi dvěma sousedními hlávkami zelí je 1?

26. Určete absolutní hodnotu jmenovatele čísla $f_{2013}(2013)$ upraveného v základním tvaru, pokud platí $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$ pro $n \geq 1$ a $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$.

27. Na kolik nul končí počet nerostoucích posloupností délky 13 tvořených prvky z množiny $\{1, 2, \ldots, 2013\}$?

28. Určite zbytek po dělení polynomu $f(x^6)$ polynomem $f(x)$, pokud $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Zadejte součin všech nenulových koeficientů.

29. Najděte funkci $f(x)$ definovanou na $\mathbb{R}$ splňující $(1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4$. Zadejte její funkční hodnotu v bodě 2013.

30. Alfons si napsal zlomky ve tvaru $\frac{1}{4k+1}$ pro přirozené $k < 1000$. Kolik takových zlomků má ukončený desetinný rozvoj?

31. Doplňte do křížovky čísla $1 - 9$, tak aby platilo:

Ve směru →
A-Fibonacciho číslo
C-Čtvrtá mocnina přirozeného čísla
E-Číslo dělitelné číslem 11
G-$1001001_2$ v 10 soustavě pozpátku
I-Číslo s klesajícími velikostmi číslic (o jedna od začátku)
K-Číslo dělitelné číslem 8
N-Prvočíslo
O-Číslo jehož cifry jsou různá prvočísla

Ve směru ↓
A-Největší trojciferný součet prvních po sobě jdoucích prvočísel
B-Prvočíslo, jehož pořadí je součin jeho cifer
D-Číslo s roustoucí velikostí číslic (o jedna od začátku)
F-Číslo dělitelné číslem 9
H-Číslo s průměrem cifer 7
I-Prvočíslo s ciferným součtem 19
J-8. prvočíslo
L-Číslo dělitelné 5
M-Fibonacciho číslo

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | | B | C | D |
| E | | | F | |
| G | H | I | | |
| J | K | | L | M |
| N | | O | | |

Jako řešení zadejte čísla na hlavní diagonále postupně z levého horního do pravého dolního rohu.

32. 85-násobek součtu tří po sobě jdoucích přirozených čísel se rovná jejich součinu. Zadejte nejmenší číslo z nejmenší trojice čísel, která to splňuje.

33. Určete součin všech přirozených čísel $n$ takových, že existuje přirozené číslo $k$ tak, že $k$ pravidelných $n$-úhelníků lze naskládat do roviny kolem společného vrcholu, aniž by se $n$-úhelníky překrývaly či mezi nimi byly mezery.

34. Ctibor dostal horečku. Aby se z ní vyléčil, vzal si tři přirozená čísla $a, b, c$, která měla součet $a+b+c = 38$ a spočítal $\frac{\sqrt[3]{a+b^2}}{c}$, což bylo také přirozené číslo. Zadejte součet součinů všech trojic, které to splňují.

35. Máme tři poctivé kostky (čtyř-, šesti- a osmistěnnou) očíslované 1 až $n$, ze kterých se stejnou pravděpodobností vybereme jednu, s níž hodíme. Jaká je pravděpodobnost, že jsme házeli čtyřstěnnou, jestliže nám padla trojka? Výsledek zaokrouhlete na pět desetinných míst.

36. Matěj s Liběnkou hrají tic-tac-toe (piškvorky $3 \times 3$). Kolik existuje různých rozmístění pěti křížků a čtyř koleček tak, aby nikdo z nich nevyhrál (neměl tři v řadě)? (Počítáme všechny rozmístění, bez ohledu na jejich symetrii.)

37. Určete, kolik existuje aritmetických posloupností délky $d$, kde $1 \leq d \leq 100$, jejichž prvky jsou čísla z množiny $\{1, 2, \dots, 100\}$. (Aritmetická posloupnost je taková, ve které je rozdíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů konstantní.)

38. Kolika způsoby lze v pravidelném sedmiúhelníku zvolit několik neprotínajících se úhlopříček tak, aby dělily tento sedmiúhelník spolu s jeho stranami na pět trojúhelníků? Dvě rozdělení považujeme za stejné, pokud se na sebe dají přenést rotací nebo i osovou symetrií.

39. Kouma si myslí číslo. Když ho vynásobí dvěma a odečte jedna, a celou tuto proceduru zopakuje ještě 2013-krát, obdrží číslo $2^{2016} + 1$. Jaké číslo si Kouma myslí?

40. Kouma si napsal na papír posloupnost dvaceti po sobě jdoucích přirozených čísel. Ňouma si z ní vybere nějaké číslo a oznámí Vám součet ostatních 19 čísel, který je 2013. Určete, které číslo si Ňouma vybral.

41. Kolikrát během dne je na digitálních hodinách podíl hodin a minut celé číslo? Číslo $0a$ přitom ztotožňujeme s číslem $a$.

42. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu jednou čtyřstěnnou, šestistěnnou a osmistěnnou kostkou padne součet 9? Výsledek zaokrouhlete na 5 desetinných míst.

43. Určete nejmenší přirozené číslo n větší než jedna, pro které je výraz $\lceil (\sum_{k=2}^{n} k \cdot \log_{2^k}(\frac{k}{k-1})) \rceil$ dělitelný 10.

44. Určete zbytek po dělení čísla $1^{2013} + 2^{2013} + \cdots + 2013^{2013}$ číslem 31.

45. Jste na potápějící se loďce a máte kýbl. Do loďky již natekl kýbl vody. Voda vtéká do loďky rychlostí půl kýblu za sekundu. V 1. sekundě vylijete kýbl vody, před vylitím dalšího kýble vody musíte si odpočinout tolik sekund, kolik jste již vylili kýblů. Za kolik sekund se loď potopí, jestli se do ní vejde 67 kýblů vody? V případě nepotopení loďky zadejte 0.