Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.00

1. Mějme tabulku čísel rozměrů 4×4. Pro každé políčko platí, že součet čísel na sousedních políčcích je roven 1 (dvě políčka sousedí právě tehdy, když mají společnou hranu). Jaký je součet všech čísel v tabulce?

2. Pokud je číslo v devítkové soustavě, je to $\overline{abc}$. Pokud je v šestkové, je to $\overline{cba}$. Jaké je v desítkové soustavě?

3. Najděte všechna reálná a, b tak, aby čísla $a, 16, \sqrt{b}, a^2b$ tvořila v tomto pořadí geometrickou posloupnost. Zadejte součet součinů ab pro všechna řešení (a, b).

4. Nechť $\overline{abcdeabcdeabcdeabcdeabcde}$ je decimální zápis nějakého čísla. Kolik čísel tohoto tvaru je dělitelných 2012?

5. Kolik různých obarvení pravidelného sedmiúhelníka můžeme vytvořit, pokud jeho strany obarvujeme 2 různými barvami? Sedmiúhelník můžeme otáčet a převracet.

6. Určete zbytek po dělení čísla 100011 číslem 1111, která jsou zapsána v soustavě se základem 2012.

7. Digitálne hodinky ukazujú hodiny, minúty a sekundy (v 24-hodinovom formáte). Akú dlhú dobu je počas jedného dňa (24 hodín) na hodinkách aspoň jedna jednička? Výsledok zadajte v sekundách.

8. Máme přirozené číslo n. Určitě největší možnou poslední číslici čísla n^2, pokud je 7 předposlední číslice n^2.

9. Mějme čtverec $ABCD$, označme S průsečík jeho úhlopříček. Osa úhlu SAB protne BS a BC v bodech K a L. Délka KS je 18. Jaká je délka LC?

10. Určete nejmenší společný násobek čísel v magickém čtverci (součet čísel v řádcích, sloupcích a na diagonálách je stejný, doplňujeme přirozená čísla).

?	?	7
?	12	?
?	?	9

11. Nechť $\overline{XYYZ}$ je číslo zapsáno v desítkové soustavě. Určete rozdíl $\overline{ZYYX} - \overline{XYYZ} = \overline{7KLM}$, pokud $\overline{7KLM}$ představuje nějaké číslo v desítkové soustavě a $Z > X > 0$.

12. Najděte tři trojciferné čtverce tak, aby dohromady používali cifry 1, 2, 3 ..., 9 každou právě jednou. Výsledek zadejte jako jejich součet.

13. Kouma s Ňoumou plavali přes řeku (každý jinou, ale konstantní rychlostí) kolmo na směr proudu. Vystartovali proti sobě z protilehlých břehů a když procházeli kolem sebe, byli vzdáleni 6 metrů od levého břehu. Oba se po doplutí k břehu otočili a plavali dál. Když se setkali podruhé, byli vzdáleni 2 metry od pravého břehu. Jaká široká (v metrech) je řeka?

14. Určete poslední dvojčíslí čísla $1 + 1.2 + 1.2.3 + ...1.2.3...2012$.

15. Mějme čtvercovou mřížku o rozměrech 2012×1024 (tedy mřížka obsahuje 2012×1024 vrcholů a 2011×1023 čtverců). Ze všech vrcholů je n zbarvených modře, přičemž platí, že žádné tři modré vrcholy nejsou vrcholy pravoúhlého trojúhelníku, který by měl odvěsny rovnoběžné s hranami mřížky. Jaká je maximální možná hodnota n?

Mathrace Sada 2

odevzdávejte do 18.00

16. Loupežníci si rozdělili lup následovně: 100 dukátů a desetina zbytku šla prvnímu zbojníkovi, 200 dukátů a desetina zbytku druhému, 300 dukátů a desetina zbytku třetímu, atd.. Když skončili, první a druhý zjistili, že mají stejný počet dukátů. Kolik dukátů měl poslední zbojník?

17. Nechť $a(n)$je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pro všechny přirozené x, y platí $a(x + a(y)) = a(x) + y + 1$. Najděte všechny možné hodnoty $a(2012)$. Výsledek zadejte jako součet všech možných rozdílných hodnot.

18. Kolika způsoby můžeme posadit do řady 3 prváky, 3 druháky a 3 třeťáky tak, aby žádní tři studenti stejného ročníku neseděli vedle sebe?

19. Určete definiční obor funkce:

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{\frac{6-x}{log_2(3-\sqrt{x})}}{log_2((3-x)(2-x)) + log_2(\frac{1}{x-3})}}$$

    Jako odpověď zadejte součin všech celých čísel, ve kterých je funkce definována.

20. Náklaďák cestuje mezi městy X do Y. Do kopce jede rychlostí 56 km/h, po rovině 63 km/h a z kopce 72 km/h. Cesta z X do Y mu trvá 5 hodin, z Y do X 4 hodiny. Jaká je vzdálenost z X do Y a zpět (v kilometrech)?

21. Najděte nejmenší přirozené čislo které končí číslicí 6 přičemž po přehození této číslice z konce na začátek dostaneme čtyřnásobek původního čísla.

22. Nechť K je množina o 10 prvcích. Kolik existuje čtveřic (A, B, C, D) takových, že A, B, C, D jsou podmnožiny K, A je podmnožinu B, B podmnožinou C a C podmnožinou D?

23. Určete zbytek po dělení čísla $1^{2012} + 8^{2012} + 17^{2012} - 3^{2012} - 6^{2012} - 7^{2012}$ číslem 10.

24. Matěj si byl na poště nechat vyplatit šek v Eurech. Úředník se však spletl a vyměnil čísla, které vyjadřovaly počet Eur a počet centů. Matěj později vytratil jednu pät'centovú minci a pak si uvědomil, že akorát má dvojnásobek částky, kterou měl původně dostat. Jaká byla původní částka na šeku? (Jedno Euro má 100 centů.)

25. Kolika různých hodnot z intervalu $\langle 1, 44\rangle$ může nabývat výraz $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3$ pro nezáporná celá a, b, c, d, e?

26. Trojúhelník o délkách stran $a \leq b \leq c$ má obsah 18 cm^2. Jaké nejmenší délky (v centimetrech) může nabývat strana b?

27. Najděte největší (ve smyslu největšího součtu $p + q$) dvojici prvočísel p, q takovou, že $\binom{p}{2} + \binom{q}{2} = p^2$. Jako výsledek zadejte součet $p + q$.

28. Určete nejvyšší počet čtverců, který se může objevit v posloupnosti $\{a^n.n\}_{n=1}^{100}$ pro vhodné přirozené a.

29. Najděte všechny množiny takové, že součet prvků množiny je rovný 200 a zároveň jsou všechny prvky po sobě jdoucí přirozená čísla. Jako výsledek zadejte součin nejmenších prvků těchto množin.

30. Nech M je množina $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{299}\}$. Z množiny vyberieme niektoré dve čísla x, y a nahradíme ich čislom $x + xy + y$. Tento postup potom opakujeme, až kým v množine nezostane len jeden prvok. Aké hodnoty môže nadobúdať tento posledný prvok? Výsledok uveďte ako súčet všetkých možných rozdielnych výsledkov.

Mathrace Sada 3

odevzdávejte do 19.00

31. Dobrodruh našel kouzelný pytel. S pravděpodobností 1/3 z něj vytáhne 3 zlaťáky, s pravděpodobností 1/3 z něj nevytáhne nic a s pravděpodobností 1/3 z něj vytáhne další naprosto stejný kouzelný pytel. Poté, co dobrodruh dvakrát sáhne do pytle, pytel se vypaří. Jaký je očekávaný zisk dobrodruha (Kdyby bylo dobrodruhů nekonečně mnoho, kolik by si průměrně vydělali.)?

32. Do obdélníku o rozměrech $a = 2$, $b = 3$ jsou vepsány dvě shodné kružnice, které se navzájem dotýkají. Jaký největší mohou mít poloměr? Výsledek zadejte zaokrouhlený na 4 desetinná místa.

33. Mějme posloupnost $s_0(n) = n$. Zaveďme obecně posloupnosti $s_{k+1}(n) = s_k(1) + s_k(2) + ... + s_k(n)$ (tedy například $s_1(n) = s_0(1) + s_0(2) + ... + s_0(n)$). Najděte $s_{2012}(3)$.

34. Najděte všechny trojice prvočísel splňující $11a^2 + 14b^2 = 9c^2$. Zadejte součet součinů abc pro všechna řešení (a, b, c).

35. Najděte všechna přirozená a, b taková, že počet možností, jak vybrat dva prvky z a prvků bez ohledu na pořadí, je b-tou mocninou šestky. Zadejte součet součinů ab pro všechna řešení (a, b).

36. Je dán 2012-boký jehlan. Označme A, B dva sousední vrcholy v podstavě. Kolika způsoby se můžeme po hranách jehlanu přesunout z vrcholu A do vrcholu B, jestliže smíme každý vrchol navštívit nejvýše jednou?

37. Úsečka $|XY| = 2$ je úhlopříčkou čtverce a zároveň (nejdelší) úhlopříčkou pravidelného šestiúhelníku. Jaký je obsah průniku daného čtverce a šestiúhelníku? (Výsledek zaokrouhlete na 4 desetinná místa.)

38. Kolik členů obsahuje výraz $(a + b + c + d + e)^{2012}$?

39. Kolik je posloupnosti celých čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňujících $a_{n+10} = a_n$ a $a_{n^2} = a_n^2$ pro všechna přirozená n?

40. Kouma s Ňoumou stáli při sobě otočení navzájem zády vedle kolejnice. Když byl začátek projíždějícího vlaku právě na jejich úrovni, oba začali kráčet vodorovně s kolejnicí, Ňouma ve směru jízdy, Kouma proti směru. Oba zastali ve chvíli, když kolem nich prošel konec vlaku. Ňouma prošel celkem 22 metrů, Kouma 20. Kolik metrů byl dlouhý vlak? (Předpokládáme že Kouma s Ňoumou kráčeli stejně rychle a vlak šel celou dobu stejnou rychlostí.)

41. Uvažme číslo, které vznikne zapsáním čísel od 1 po 1024 za sebe, tedy 12345678910111213...10231024. Určete číslici nacházející na 2012. pozici.

42. Číslo $187k^3$ má 187 dělitelů. Kolik dělitelů může mít čislo $22k^{22}$? Výsledek uveďte jako součet všech rozdílných možností.

43. K dispozici máme mince o hodnotě 1, 5, 10, 25 a 50 centů a minci s hodnotou jednoho tolaru, přičemž platí že jeden tolar je 100 centů. Jaké je nejmenší k takové, že nelze vybrat k mincí které by dohromady dávali tolar?

44. Nechť f je funkce, která přiřadí přirozenému číslu součin jeho cifer. Najděte $f(1)+f(2)+...+f(2012)$.

45. Mějme lichoběžník o délkách stran 5, 5, 5, a ($a \in \mathbb{N}$). Pro jakou hodnotu a má lichoběžník největší obsah?