Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.00

Poznámka ke všem úlohám: pokud vyjde celé číslo, zadejte jej. Pokud vyjde číslo s konečným desetinným rozvojem, za

1. Máme posloupnost 1,2,3,2,1,2,3,2,1,2,3,... Kolik po sobě jdoucích členů má součet 2011?
2. Najděte největší přirozené číslo n takové, že $\frac{n-2011}{n+2012}$ je druhou mocninou racionálního čísla.
3. Najděte všechna prvočísla taková, že $69 * p^4 - 41114$ je prvočíslo. Není-li žádné takové, zadejte nulu, je-li jediné, zadejte jeho hodnotu, je-li jich více, zadejte jejich součin.
4. Doplňte chybějící číslice, jako odpověď zadejte součet činitelů (prvního a druhého řádku).

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & * & 1 & * \\
\times & & & 3 & * & 2 \\
\hline
 & & & * & 3 & * \\
 & 3 & * & 2 & * & \\
* & 2 & * & 5 & & \\
\hline
1 & * & 8 & * & 3 & *
\end{array}
$$

5. Máme tři nádoby o objemech 2, 7 a 9l. Na začátku je největší plná. Do nejmenší nádoby z ní chceme přelít přesně litr vody. Nemáme ale k dispozici žádné měřidlo, vodu můžeme pouze přelévat mezi nádobami, navíc nesmíme vodu vylévat jinam než do nádob ani přilévat odjinud. Na kolik nejméně přelití je možné dostat litr vody do nejmenší nádoby?
6. Dvě lodě plují po přímé trajektorii stálou rychlostí. V 9h je jejich vzájemná vzdálenost 20km, v 9.35 je vzdálenost 15 km, v 9.55 je vzdálenost 13 km. Najděte časový okamžik, kdy vzájemná vzdálenost obou lodí je minimální. Odpověď zadejte jako počet minut od deváté hodiny.
7. Do vrcholů pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ jsme umístili celkem 15 mincí tak, že ve vrcholu A je jedna, v B dvě, v C tři, v D čtyři a v E pět. Postupně přidáváme mince tak, že si vybereme trojici sousedních vrcholů a do každého přidáme jednu minci. Kolik nejméně mincí musíme přiložit, aby bylo v každém vrcholu stejně mincí?
8. Banka nabízí dva produkty – jeden s úrokem 10% ročně a bez poplatků, druhý s úrokem 21% ročně a s poplatkem 8400Kč ročně (na konci roku se jednorázově přičte úrok 21% a následně se odečte zmíněný poplatek). Henry si na každý účet uloží 50 000 korun. Za kolik let bude mít na druhém účtu více než na prvním (zajímají nás celé roky)? Od úroků není potřeba odečítat daň.
9. Doplňte čísla do křížovky tak, aby platilo:

   Vodorovně

   A Číslo s klesající velikostí číslic (o jedničku).

   D Mocnina čísla.

   E Druhá mocnina čísla.

   F Číslo s rostoucí velikostí číslic (o jedničku).

   H Číslo s klesající velikostí číslic (o jedničku).

   Svisle

   B Číslo dělitelné 11.

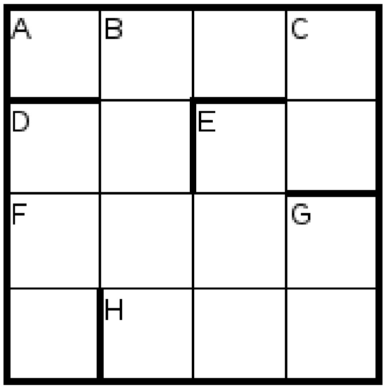
   C Prvočíslo.

   D Třetí mocnina čísla.

   E Druhá mocnina prvočísla.

G Součet pěti po sobě jdoucích celých čísel.

Jako odpověď zadejte čísla na hlavní úhlopříčce (začíná na poli označeném písmenem A).



10. Jana si koupila 98kg melounů, které jsou tvořeny z 99% vodou. Nechala je na slunci a za den jí seschly tak, že jsou z 98% tvořeny vodou. Kolik kg melounů Janě zbylo?

11. Ke třem stěnám krychle o hraně 2 přilepíme (celými stěnami) tři další stejně velké krychle. Jaký je nejmenší poloměr koule, kterou lze vzniklému tělesu opsat?

12. Máme kružnici a v ní vepsaný rovnostranný trojúhelník. V trojúhelníku vepsanou kružnici a v této kružnici vepsaný čtverec. V tomto čtverci kružnice, atd... poslední vepsaný útvar je 2011- úhelník. Kolik je v celém obrázku průsečíků, pokud pro žádné n nemá n-úhelník společný bod s $(n+1)$-úhelníkem? (Průsečíkem rozumíme bod společný dvěma narýsovaným útvarům.)

13. Průměr 2011 přirozených čísel, ne nutně různých, je 2011. Jaké je nejvyšší číslo, které se mezi nimi může nacházet?

14. Posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ je tvořena nulami a jedničkami. Přitom platí, že $a_1 = 1$ a $a_1 - a_2 + a_3 - a4 + \ldots - a_{12}$ je číslo dělitelné 3. Kolik takových posloupností $a_1, \ldots, a_{12}$ existuje?

15. Zbyněk a Mária hrají hru. Na šachovnici o 49×49 polích stojí figurka, se kterou střídavě hýbou. Táhnout mohou vždy o 3 pole doprava a o 4 dolů, nebo o 4 doprava a o 3 dolů. Kdo nemůže táhnout, prohrál. Začíná Mária na poli, které si zvolí v nejlevějším sloupci šachovnice. Kolik polí si může zvolit tak, aby vyhrála?

Mathrace Sada 2

odevzdávejte do 18.00

16. Najděte všechny dvojice nenulových cifer a, b takových, že $\overline{abb} = \overline{ba} \cdot b$. Jako odpověď zadejte součet všech možných čísel $\overline{ab}$. Označením $\overline{xyz}$ myslíme číslo, které je zapsáno ciframi x, y, z zleva doprava v tomto pořadí.

17. Číslo N má ciferný součet roven 100, zatímco číslo 44N má ciferný součet roven 800. Najděte ciferný součet čísla 3N.

18. V trojúhelníku ABC označme R dotykový bod vepsané kružnice na straně a. Průsečík AR s těžnicí t_b označme X. Trojúhelník ABX má třikrát větší obsah než trojúhelník ACX. Délka strany a je 4, délka strany b je 5. Určete délku strany c.

19. Čtyři hrací kostky mají každá na stěnách čísla 1 až 6 rozmístěná tak, že součet počtů ok na protějších stěnách je 7. Kostky slepíme do jednoho útvaru tak, aby se dotýkaly celými stěnami. Určete nejmenší a největší možný součet viditelných čísel a jako odpověď zadejte součin obou výsledků.

20. Šestimístné číslo končí cifrou 6. Když ji přesuneme na začátek, získáme čtyřnásobek tohoto čísla. O jaké číslo šlo?

21. Pro funkci $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ platí $f(x) + f(y) = f((x+y)/2) + f(3x) - 33x^2 - 2xy + 3y^2$ pro všechna x taková, že $(x+y)/2$ je celé. Určete $f(47) - f(42)$.

22. Do rovnostranného trojúhelníka ABC o straně 1 je vepsán rovnostranný trojúhelník tak, že oba mají stejné těžiště a vnitřní trojúhelník má poloviční obsah. V jaké vzdálenosti od vrcholu A se nachází nejbližší vrchol menšího trojúhelníka?

23. Arabský kupec odkázal svým synům $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{9}$ stáda. Celkem měl 17 velbloudů. Synové neuměli stádo rozdělit, tak si půjčili jednoho velblouda od souseda; z 18 velbloudů jeden dostal 9, druhý 6 a poslední 2. Zbylého velblouda vrátili sousedovi. Druhý kupec měl 4 syny a odkázal k-tému z nich $1/a_k$ stáda, kde a_k je celé číslo, přičemž $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. I tito synové si stádo beze zbytku rozdělili stejným způsobem (s využitím vypůjčeného velblouda a všichni velbloudi zůstali vcelku). Kolik nejméně mohl mít druhý kupec velbloudů?

24. Vlado má stádo ovcí. Když jich vyžene na louku 100, mohou být na louce libovolně dlouho; 100 ovcí je navíc největší stádo s takovouto vlastností. Pokud jich vyžene 120, vydrží jim pastva na 100 dní. Na jak dlouho vydrží pastva 150 ovcím?

25. Máme šachovnici 5×5, každé pole obsahuje číslo, a to buď 1 nebo -1. Můžeme v každém kroku vzít podčtverec o straně alespoň 2 a změnit znaménka všech čísel v tomto podčtverci. Chceme docílit toho, že na konci budou na celé šachovnici pouze jedničky. Na kterých polích může být na začátku -1? Výsledek zadejte jako součet součinů souřadnic; souřadnice jsou čísla od 1 do 5.

26. Máme dvě kladná celá čísla. Uvážíme jejich součet, součin, podíl a rozdíl menšího a většího. Součet těchto čtyř výsledků je 243. Najděte všechna řešení; pro každé spočtěte součin čísel a jako odpověď zadejte součet těchto součinů.

27. Řešte soustavu rovnic

$$\sin(x) + \sin(y) = \sin(x+y)$$
$$\cos(x) + \cos(y) = \cos(x+y)$$

pro $0 \leq x, y < 360°$. Jako výsledek zadejte součin všech vyhovujících x ve stupních.

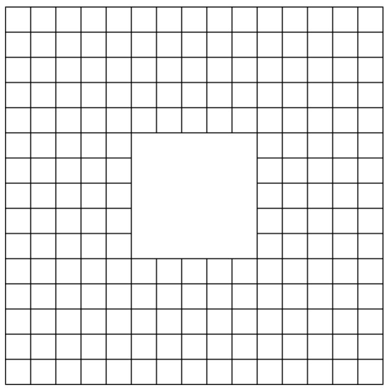
28. Na obvodu kruhu je 1001 talířků. Kolem kruhu chodí Petr a do prvního talířku dá bonbon, jeden talířek vynechá, do dalšího dá bonbon, dva talířky vynechá, do dalšího dá bonbon, tři talířky vynechá, a tak pokračuje do doby, než by měl vynechat 1000 talířků. V kolika talířcích nakonec budou bonbony?

29. Lenčin dědeček se narodil ve dvacátém století. Žádná z jeho dcer nemá dceru, ale každá má tolik synů, kolik má sester. Každý jeho syn má tolik dcer, kolik má sester, a tolik synů, kolik má sourozenců. Celkem má Lenčin dědeček tolik potomků (dětí a vnoučat), kolik mu je let. Za deset let bude jeho věk dělitelný třemi různými prvočísly. Kolik mu je let?

    (Předpokládejte normální rodinné vztahy, zejména tedy žádná z jeho dcer nemá dítě s ním, ani s jeho syny.)

30. Paty výšek v trojúhelníku ABC označíme D, E, F. Jaký obsah má trojúhelník ABC, (v cm^2) pokud má DEF délky stran 3, 4 a 5 cm?

31. Kolik čtverců je na následujícím obrázku?



32. Matěj a Zuzka nasbírali dohromady 72 hub. Dvě pětiny Matějových hub byly lišky, tři sedminy Zuzčina úlovku byly žampiony. Kolik hub nasbírala Zuzka, pokud jich měla více než Matěj?

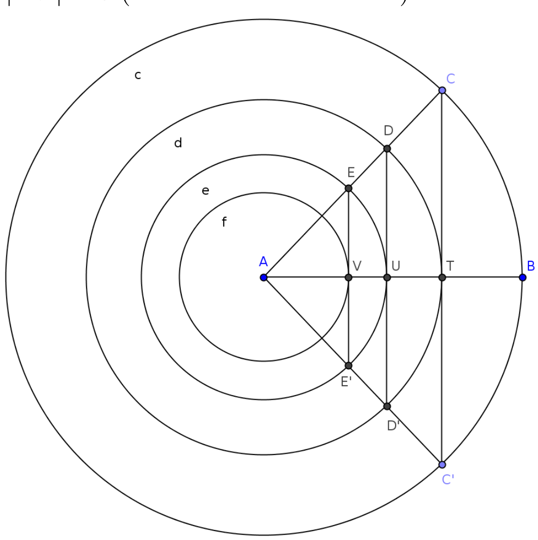
33. V obdélníku $ABCD$ je na straně BC dán bod X, na straně DC bod Y, obsah trojúhelníka ABX je 5, obsah AYD je 10 a obsah XCY je $7,5$. Určete obsah obdélníka $ABCD$.

34. Zdeněk si vyrobil deset stejně velkých čtverců z drátu. Teď pokládá jeden přes druhý na stůl. Na kolik nejvýše oblastí se mu může podařit stůl rozdělit? Pokud by měl jediný čtverec, byla by odpověď na tuto otázku 2.

35. Hloupětínská slepičárna prodává vejce v balení po 6, 9 a 20. Kolik různých kladných počtů vajec menších než 1000 lze koupit?

36. Pro která n platí, že existuje prvočíslo složené z číslic 1 až n (každá je použita právě jednou)? Jako odpověď zadejte součet všech přípustných n.

37. Jsou dány soustředné kružnice c, d, e, f. Přímka vedená jejich středem A se s nimi protne po řadě v bodech C, D, E, F, druhá přímka vedená bodem A v bodech C', D', E', F'. Kružnice mají navíc tu vlastnost, že přímky CC', DD', EE' jsou po řadě tečnami k d, e, f, dotykové body těchto tečen označme T, U, V. Určete obsah mezikruží daného kružnicemi c, f, pokud víte, že $|CT| = 7$ a $|EV| = 3$ (obrázek není v měřítku).



38. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s poloměrem kružnice opsané $R = 9$, poloměrem vepsané $r = 4$ a obsahem $S = 90$. Dále jsou dány kružnice se středy v bodech A, B, C o poloměru 3. Na těchto kružnicích leží po řadě body D, E, F tak, že žádný z nich neleží ve vnitřní oblasti ABC a trojúhelník DEF je stejnolehlý s trojúhelníkem ABC. Určete obsah trojúhelníka DEF.

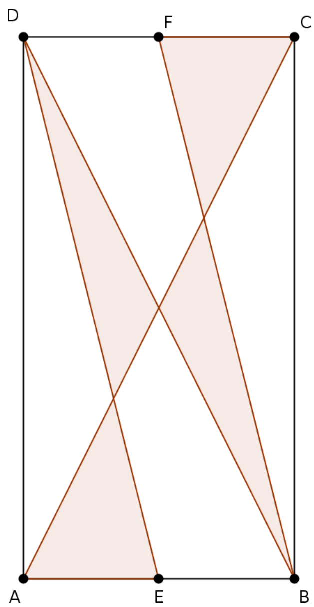
39. Určete počet přirozených čísel, která mají ciferný součin 4 a ciferný součet 2011.

40. Určete $\log(\sin x - \cos x)$, pokud víte, že $\log(\sin x + \cos x) = 3$, $\cos(2x) = -1/10$.

41. Určete, čemu se rovná $\sin 35° + \sin 40° + \sin 45° + \cdots + \sin 7170°$.

42. Čemu se rovná $\frac{b^2}{a^2-2ab+2b^2} + \frac{b^2}{a^2+2ab+2b^2}$, pokud jsou a, b nenulová čísla splňující $6a^4 - 6b^4 = 35a^2b^2$?

43. Určete obsah vybarveného útvaru, je-li obsah obdélníka $ABCD$ roven 720, AC a BD jsou jeho úhlopříčky a E, F jsou středy stran AB resp. CD.



44. Najděte všechna trojciferná čísla $\overline{abc}$, kde a, b, c jsou různé nenulové cifry, pro která platí $2(\overline{abc}) = \overline{bca} + \overline{cab}$. Označením $\overline{xyz}$ myslíme číslo, které je zapsáno ciframi x, y, z zleva doprava v tomto pořadí. Jako odpověď zadejte součin všech vyhovujících čísel.

45. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} 1a + 2b + 3c + \cdots + 25y + 26z &= 27 \\ 1^2a + 2^2b + 3^2c + \cdots + 25^2y + 26^2z &= 27^2 \\ &\vdots \\ 1^{26}a + 2^{26}2b + 3^{26}c + \cdots + 25^{26}y + 26^{26}z &= 27^{26} \end{aligned}$$

Najděte hodnotu y.