



Mathrace Sada 3

odevzdávejte do 19.00



31. OSKAR CHCE NA ZÁCHOD

Oskar si chce v práci zajít na záchod, ale ten je pouze pro zaměstnance a dveře se otevírají pouze na čtyřmístný kód. Oskar ale kód zapomněl. Když přišel ke dveřím, tak si všiml, že na číselné klávesnici jsou tři čísla sedřená: 3, 1 a 0 (kód se tedy může skládat pouze z těchto čísel a jedno se v něm vyskytuje dvakrát). Jaká je pravděpodobnost, že Oskar uhodne kód s těmito znalostmi na první pokus?

32. GONIOMETRIE

Vezměme si základní 4 goniometrické funkce ($\sin$, $\cos$, $\tan$, $\cot$). Kolikrát se alespoň dva grafy těchto goniometrických funkcí pronikají na intervalu $x \in \langle 0, 100\pi \rangle$?

33. DŘEVĚNÁ DESKA

Kouma chce vyrobit dřevěnou desku z deseti prken 1 : 5 (délka : šířka). Pět prken položí vedle sebe a dalších 5 prken položí přesně na ně otočených o 90° tak, že výsledná deska tvoří čtverec. Kolmo na prkna pak zatlouká hřebíky, čímž prkna spojuje. Kolik potřebuje nejméně hřebíků tak, aby všechna prkna byla spojená?

34. ŠIFROVAČKA

Řešením této úlohy je zlatý řez. Odpověď zadejte zaokrouhlenou na 5 platných číslic po převedení miliótnásobku do oktální soustavy.

35. RÁDÍ TO NEMYSLÍ

Ráďa snídá müsli a hází si do něho čísla 1 až 10, každé právě jednou. Když přihodí číslo, které je soudělné s nějakým, které už v müsli má, všechna taková čísla zmizí (včetně toho nově přidaného) a nahradí se jejich největším společným dělitelem (všech, která zmizela). Jaký může být největší součin všech čísel, které má nakonec Ráďa v müsli?

36. NA ZMRZLINĚ

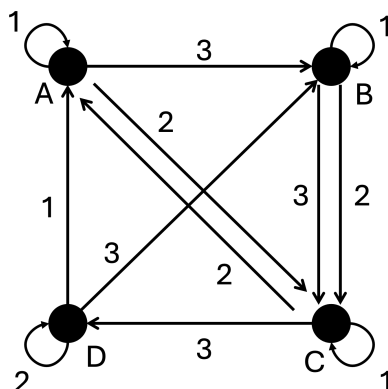
Magdalénka si s Tomášem koupili zmrzlinu. Zmrzlina je tvaru kužele, na kterém je položena polokoule o stejném poloměru. Kolem kužele je pak kornout zanedbatelné tloušťky. Domluvili se, že ona sní polovinu objemu a druhou polovinu nechá Tomášovi. Jaký podíl z původní délky hrany kornoutu má Tomášovi zůstat, jestliže úhel mezi stranami kornoutu je 30° a Magdalénka jí zmrzlinu rovnoměrně?

37. ONDROVY ŠVIHLÉ HODINKY

Ondrovy hodinky ukazují čas jako šestimístné číslo tvaru $hhmmss$. Pípnou mu vždy, když je číslo dělitelné 275 a po dělení 9 dává zbytek 4 a na pozici hodin (první dvojčíslí) jsou pouze číslice obsažené v sekundách. Kolikrát denně mu pípnou?

38. LUKÁŠ JE INTELIGENTNÍ POZEMŠŤAN

Mimozemšťané testují inteligenci pozemšťanů. Jako hádanku vytvoří bludiště propojených čtyř místností $ABCD$, mezi kterými se testovaný subjekt může pohybovat pomocí mačkání čísel (1, 2, 3) na ovladači, který mu dají současně s mapkou. Aby ho mimozemšťané pustili ven, musí se nacházet v místnosti C a zakřičet „DEVÁTE“, pokud to ale zakřičí v libovolné jiné místnosti, nemilosrdně ho zabijí. Lukáš se ocitl mezi testovanými subjekty, na začátku mu ale nikdo neprozradil, v jaké místnosti se nachází. Lukáš je ale naštěstí inteligentní pozemšťan a našel sekvenci čísel, kterou musí zmáčknout na ovladači, aby se určitě nacházel v místnosti C . Dokonce dostal pochvalu, že našel nejkratší takovou sekvenci. Zadejte ji jako řešení.



39. 7-ÁDICKÁ ČTVRTKA

Pro každé přirozené N existuje právě jedna řada $\sum_{n=0}^N a_n 7^n$, kde $a_n \in \{0, 1, \dots, 6\}$ taková, že

$$7^{N+1} \mid 4 \cdot \sum_{n=0}^N a_n 7^n - 1.$$

Napište součet všech hodnot, kterých může nabývat koeficient a_{2025} .

40. TONDŮV BALÓN

Tonda má balón ve tvaru koule o poloměru 10, na kterém jsou vyznačené tři body, které jsou od sebe stejně vzdálené. Pokud tyto tři body propojíme, dostaneme takový pseudotrojúhelník na sféře, jehož obvod je 15π . Spočítejte, jakou konvexní plochu na kouli tento trojúhelník vymezuje.

41. TONDOVA NAKLÁDAČKA

Tonda má polínka, a chtěl by je naskládat do dřevníku. Dřevník je velikosti 4×4 . Má polínka délky 4, 3, 3, 2, 2, 2. Každé polínko je široké 1. Kolika způsoby může Tonda dřevník naskládat, aby byl úplně plný? Všechny kusy dřeva jsou od sebe rozpoznatelné.

42. ALFABETA

Máme polynom třetího stupně $x^3 + ax^2 + bx + c$ a víme, že má celočíselné kořeny α , β , γ , které splňují:

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha\beta\gamma = 28$$

$$\alpha^2\beta\gamma + \alpha\beta^2\gamma = -224$$

$$\alpha^2\beta^2\gamma + \alpha^4\beta^2 = -147.$$

Jako řešení odevzdejte součet $a + b + c$.

43. TANEČNÍ SOUTĚŽ

Terka se přihlásila do taneční soutěže. Do stejné kategorie se přihlásili pouze další 2 soutěžící. Tuto kategorii hodnotí 4 porotci, konkrétně A, B, C a Lea. Každý z porotců nezávisle rozhodne, které představení se mu jak líbilo a následně dá každému soutěžícímu číslo od 1 do 3, podle toho, na které místo by ho umístil - každý porotce včetně Lei tedy udělí každé číslo právě jednou. O finálním umístění rozhoduje obdržенý součet bodů od všech porotců (nejmenší součet vyhrává). Jaká je pravděpodobnost, že Terka vyhraje (remíza není výhra), pokud všichni porotci hodnotí vystoupení náhodně, až na Leu, která dá Terce vždy 1?

44. PYTHAGOROVA PROCHÁZKA

Štěpán s Ondrou musí na ranní přednášku z algebry. Chodí po celočíselných mřížových bodech kartézské soustavy souřadnic, kde jejich dům se nachází na souřadnici $(0,0)$ a škola na $(20,20)$. Chodit mohou pouze po přeponách pravoúhlých trojúhelníků s vrcholy v mřížových bodech a jejich cesta musí mít celočíselnou délku, souřadnice své polohy mohou pouze ostře zvyšovat (tzn. nesmí jít vůbec dolů nebo doleva, ani kolmo nahoru, či vodorovně doprava). Kolika způsoby se mohou dostat do školy?

45. ANIČKA NA TŘEŠNÍCH

V sadu stojí 6 třešní o obvodu kmene 10π cm. Středy jejich kmenů jsou v mřížce 3×2 , sousední středy jsou dva metry od sebe. Anička chce natáhnout provázek, na který kladkou připevne košík. Provázek povede kolem každého stromu. Aby provázek držel, musí vést napnutý aspoň kolem poloviny obvodu kmene, ne však okolo celého obvodu, to by strom škrtil. Konec provázku Anička naváže na začátek. Jak nejméně dlouhý provázek bude potřebovat? Odpověď zadejte v metrech zaokrouhlených na 5 desetinných míst. Na obrázku je příklad povoleného obmotání stromů v mřížce 2×2 .

