



Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.00



Pokud je řešením počet nějakých objektů a správná odpověď je nekonečno, napište „inf“. Celá čísla zadávejte normálně, bez nadbytečných mezer (např. 5, -45, 89, ...). Pokud je řešením racionální necelé číslo se jmenovatelem menším než 101, zapište jej jako zlomek v základním tvaru (např. $\frac{5}{7}$, ale ne $\frac{4}{6}$). V ostatních případech řešení napište v desetinném zápisu s tečkou zaokrouhleno na 5 desetinných míst, není-li řečeno jinak (např. 5.55579846... jako 5.55580). V případě nejistoty jak odevzdat necelé číslo lze i zlomky odevzdat takto zaokrouhlené na 5 desetinných míst (např. $\frac{5}{3}$ jako 1.66667). Pokud není řečeno jinak, všechny mince, kostky atd. jsou férové - tedy každá z možných hodnot může padnout se stejnou pravděpodobností.

1. FAMFRPÁL

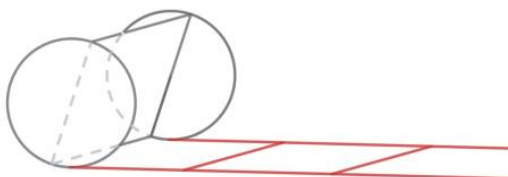
Brkos tým hraje famfrpál ve složení Tonda, Ráďa, Lea, Áďa, Kuba.

- Tonda vždy hraje 1 minutu, potom fauluje.
- Ráďa vždy hraje 3 minuty, potom fauluje.
- Lea vždy hraje 6 minut, potom fauluje.
- Áďa vždy hraje 9 minut, potom fauluje.
- Kuba je dobrák a nefauluje.

Hrací doba je 200 minut a trest za faul jsou 3 minuty na trestné lavici. Určete kolik minut budou na hřišti právě 2 hráči z Brkos týmu.

2. PEKÁČ BUCHET

Ráďa upekla buchtu o rozměrech $49 \times 31,5$ cm a chce ji nakrájet na co největší stejně velké čtverečky. Má k tomu speciální pomůcku, která jí krájení značně ulehčí. Skládá se ze dvou koleček (jak na krájení pizzy), která jsou spojena jedním obdélníkem, který zajistí, že nevykrojí pruhy bucht, ale rovnou čtverečky (viz obrázek). Jak velký musí být poloměr koleček (v cm)?



3. **PEŤA ZASADILA FAZOLI**

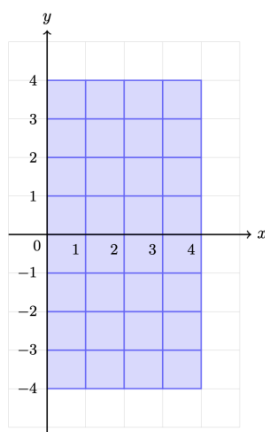
Pěťa zasadila fazoli. Fazole byla ale kouzelná a přes noc vyrostla výš než čekala a z listů při tom vytvořila schodiště do nebe. Když se na ni člověk podívá z vrchu, tak špičky všech listů jdou vidět (míří každý jiným směrem) a tvoří pravidelný 70-ti úhelník. Po listech se dá lézt, v každé výšce je pouze jeden a mezi výškově následujícími listy je vždy stejný úhel otočení. Fazole je ale záludná, snaží se, aby tento úhel $\alpha \in (0, \pi)$ byl co největší a lezec musel co nejvícekrát obkroužit stonek a zatočila se mu hlava. Kolikrát se Pěťa projde nad prvním listem, než vyleze do nebe (počítáme-li i první list a Pěťa potom zůstane stát na posledním listu)?

4. **PĚTING**

Jaké je nejmenší kladné celé číslo složené pouze z 0 a 5, které je dělitelné sedmi?

5. **ČTVEREČKY**

Mějme běžnou kartézskou síť bodů. Vybereme si čtverečky (ohraňené přímkami na celočíselných hodnotách), které jsou vpravo od počátku a žádný čtvereček není dále než za/nad/pod hodnotou $x = 4, y = 4$ a $y = -4$. Kolik různých přímek s celočíselnými sklony a celočíselnými posuny z intervalu $\langle -4, 4 \rangle$ ($y = ax + b$, kde $a \in \mathbb{Z}, b \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$) můžeme vytvořit, aby procházela přímka vždy alespoň dvěma sloupci a zároveň alespoň dvěma řádky vybraných čtverečků? Čtverečkem prochází přímka, jen pokud prochází vnitřkem čtverečku.



6. **HAD POKUŠENÍ**

Ďábelský had je omotaný kolem kmenu stromu průměru 1 m. Je tam omotaný 15π tj, hlava hada míří na opačnou stranu než jeho ocas, a současně je o 20π m výš, než jeho ocas. Jak je ďábelský had dlouhý (v m)?

7. **PŘEŽÍVAJÍCÍ ŽÁBY**

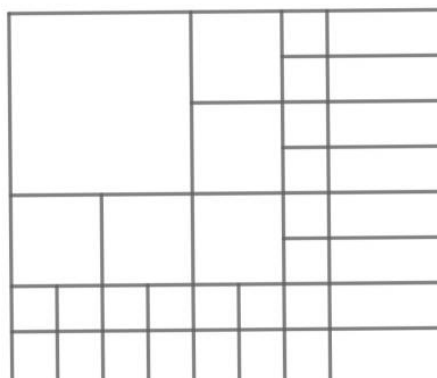
Žába Bublina se narodila zároveň se třemi dalšími sourozenci. Pro každou ze čtyř žab platí, že šance že přežije následující rok, je $1 - 0.02 \cdot \{\text{počet živých sourozenců bez sebe sama}\}$. Jaká je šance, že Bublina přežije dva roky?

8. JABLEČNÁ SMRŠŤ

Tonda trhá jablka ze stromu. Protože už je vysoko, musí se jednou rukou držet, proto se mu občas stane, že se s utrženým jablkem uvolní několik dalších. Konkrétně pro n -té jablko je to $\lfloor \log_3(n) \rfloor$ jablek. ($\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo, které je menší nebo rovno x .) Kolik jablek spadne na zem, když nasbírá plný košík 200 jablek?

9. V SÍTI

Mějme síť, která má vlevo nahoře čtverec se stranou délky $\frac{1}{2}$, kolem něj jsou čtverce se stranou o délce $\frac{1}{4}$, kolem nich čtverečky se stranami o délce $\frac{1}{8}$ a tak dále, viz obrázek. Na síť házíme kolmo balónek. Pokud se balónek dotkne sítě, odrazí se a neproletí. Určete pravděpodobnost, že balónek proletí skrz síť, když víte, že jeho poloměr je $\frac{1}{48}$ a balónek hodíme tak, že jeho střed bude vždy v síti.



10. KDO ŠETŘÍ MÁ ZA TŘI

Terka skládá polynomy nad $\mathbb{Z}_3$, stupně maximálně 2. Tzn. koeficienty těchto polynomů mohou být pouze 0, 1, 2. Hodnota polynomu se pak vyhodnotí taky v $\mathbb{Z}_3$, tj. to bude hodnota polynomu modulo 3. Kolik z těchto polynomů nebude mít nad $\mathbb{Z}_3$ kořen (tj. kořenem nebude ani 0, ani 1 ani 2)?

11. ŠTĚPÁN UŽ NEJEZDÍ AUTOBUSEM

Štěpán jezdí v Mario Kart sandboxu a snaží se nasbírat co nejvíc penízků. Jízda se odehrává v nekonečném městě tvaru čtvercové mřížky o délce hrany 200 metrů a zanedbatelné šířce silnice, ve kterém se na každé křižovatce na každém jejím rohu nachází penízek. Štěpán jede rychlostí 60 km/h, při zatáčení dokonale zachovává rychlost a nikdy necouvá ani se neotáčí o 180° . Při jednom průjezdu křižovatkou je však schopen vzít pouze penízek po levé straně, a to pouze když zatáčí doleva. Kolik penízků může Štěpán během půlhodinové jízdy nasbírat, když začíná uprostřed cesty mezi křižovatkami?

12. POHODOVÁ ÚLOHA

Zadejte počet všech přirozených řešení rovnice

$$x^2 + 3^y = xy$$

pro které $x < 2025$.

13. PROPLETENÉ KRUŽNICE

Mějme kružnice k_1, k_2 se středy $S_1 \neq S_2$ mající poloměr r_1 . Tyto kružnice se protínají ve dvou různých bodech P_1, P_2 . Označme $\alpha = |\angle P_1 S_1 P_2| = |\angle P_1 S_2 P_2|$. Dále kružnice l_1, l_2 mají středy P_1, P_2 a poloměr r_2 . Víte, že se trojice kružnic k_1, l_1, l_2 a k_2, l_1, l_2 protínají v jednom bodě a také že $r_2 = \frac{1}{2}r_1$. Určete α . Odpověď zadejte ve stupních.

14. MARTIN ZAHRADNÍKEM

Martin sází stromky. Tyto stromky jsou čtyřletky, kde každý rok na **konci** větve vyrostou 0, 1 nebo 2 větve (pokud tam naroste 0 větví, je to stále považováno za konec větve). Tyto větve mohou narůst buď doprava, nebo doleva. V případě růstu 2 větví pak roste vždy jedna vlevo a jedna vpravo. Pokud se na stromky díváme z jednoho pohledu (symetrické stromky se **nepočítají** jako jeden), kolik různých stromků takto může vyrůst?

15. LUKÁŠ DĚLÁ VSTÁVY VSTÁV!

Lukáš se každé ráno pokouší vzbudit budík. Pokaždé, když zazvoní, tak je 20% šance, že Lukáš vstane. Jinak jej Lukáš plácne, a budík znovu zazvoní za 10 minut. Při plácnutí má Lukáš ovšem 1% šanci, že trefí homerun, a budík znovu zazvoní až za 24 hodin. Za kolik minut Lukáš průměrně vstane?