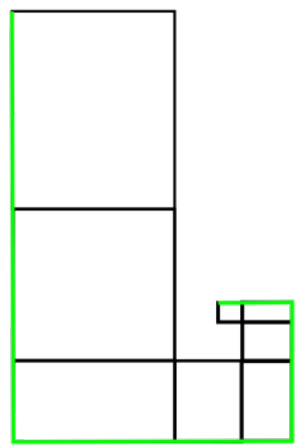
Mathrace Sada 3

odevzdávejte do 19.00

31. **Divnej šnek**
Lukáš má papír ve tvaru čtverce o straně dva. Papír rozpůlí (střihem rozvnoběžným s jednou stranou) a jednu polovinu si položí na stůl. Druhou polovinu vezme a znovu ji rozpůlí na půl (aby vznikly dva čtverce). Jednu polovinu přidá k papíru na stole, aby navazovala délka stran a druhou stříhá dále. Zase ji rozstřihne na poloviny, jednu polovinu nastaví k papírům na stole stejnou délkou hrany a druhou si nechá. Takto na sebe vždy naváže 3 kusy papíru (tedy každá strana spirály bude tvořená ze tří kusů papíru) a pak cestu zatočí (vždy na stejnou stranu, aby se části papíru stáčely dovnitř a tvořily tak spirálu). Takhle stříhá až do nekonečna. Mezitím přijde Štěpán a na začátek papírového šneka položí reálného šneka a nechá ho oblézt po vnější hraně papírového šneka dovnitř spirály (jako první poleze po delší straně prvního kusu papíru a ven ze spirály už neleze). Jak dlouhou cestu šnek pošnečí?



32. **Sudé funkce**
Áďa vymýšlí letošní Mathrace plakát, na který píše spoustu funkcí. Prozradila nám, že $f_1 = x + 3$, $f_2 = x^2$ a dále platí, že $f_{n+1} = f_n - f_{n-1}$. Určete, kolik existuje přirozených k menších než 10000, pro které je funkce f_k sudá?

33. **Pegas se vrací**
Pegas je kůň, který na šachovnici dělá pohyb do L v jednom směru o 3 pole a ve druhém o 1. Nyní pegas začíná v levém dolním rohu klasické šachovnice 8×8 a snaží se dostat do pravého horního pole. Kolika způsoby to může udělat, pokud chce udělat nejmenší možný počet skoků?

34. **Psycho dělení**
O přirozeném čísle n řekneme, že je OP, jestliže má mezi všemi přirozenými čísly od 1 do n nejvíce přirozených dělitelů. Určete hodnotu k-tého nejmenšího OP čísla, kde k je páté nejmenší OP číslo.

35. **Devyho věž**
Obr Tonda vychází a schází schody velmi zvláštním způsobem: vždy přejde 11, 17, nebo 20 schodů naráz a nijak jinak to neumí. Občas ze srandy dává dětem za úkol zjistit, kolika způsoby dokáže sejít nějaké schody dané délky.

Devyho už tento typ úlohy extrémně štve, a tak se rozhodl postavit věž, kterou Tonda nedokáže vyjít ani jedním způsobem tak, aby mu to vyšlo přesně. Zároveň ale chce, aby byla co největší. Kolik maximálně může mít schodů?

36. **Vylepšené blafuj**
Ema s Terkou hrají kostky. Střídají se po hodu, přičemž Ema začíná a hodí klasickou šestistěnnou kostkou. V dalším kole hází Terka a musí hodit číslo větší než Ema. Jestliže takové číslo hodí, pak hází Ema, jestliže ne, prohrává a Ema vyhrává, atd. S jakou pravděpodobností Ema vyhraje?

37. **Z Brightonu do Francie**
Vítek stojí na pobřeží Brightonu a snaží se dohlédnout do Francie. Kolik metrů nad povrchem země musí být, aby tam mohl dohlédnout a nebránilo mu zakřivení Země? Odpověď zaokrouhlete na celé metry. Počítejme, že Země je koule o poloměru 6378 km a délka oblouku Francie - Brighton je 100 km.

38. **Eris jde ven bez čepice**
Máme *sus* binární operaci na přirozených číslech. Definujeme $sus(a, b)$ jako čitatele zlomku $\frac{a}{b}$ v základním tvaru. O množině řekneme, že je No cap, pokud je uzavřená na tuto operaci, což znamená, že pokud a, b leží v množině, pak i $sus(a, b)$ leží v této množině. Určete velikost nejménší No cap množiny, která obsahuje $\{400, 11664, 2460375, 614656\}$ jako podmnožinu.

39. **Spokojený pár**
Anička a Štepán tvoří pár. Víme, že Anička má maximálně π peněz a Štepán maximálně 2π peněz. Anička a Štěpán se budou mít rádi, pokud rozdíl množství peněz Štěpána a dvojnásobku množství peněz Aničky (v tomto pořadí) bude v intervalu $(-\pi, \pi)$. Jinak by si záviděli. Chtějí si koupit vánočního kapra. K tomu potřebují, aby součet množství peněz Štěpána a dvojnásobku peněz Aničky (její kamarád Lukáš jí totiž přispěje stejnou částku, jakou sama má) byl alespoň π. Aby to nebylo jednoduché, mají oba zamilovaní sklon k pýše. Proto pokud součet množství peněz Štěpána a dvojnásobku množství peněz Aničky přesáhne 3π, zpychnou. Anička je pověrčivá a považuje čísla z intervalu $(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi}, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2\pi})$ za nešťastná. Štěpán je pověrčivý ještě víc a za nešťastná považuje čísla z intervalu $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Pokud některý z nich má množství peněz, které považuje za nešťastné, bude smutný. Vztah Aničky a Štěpána bude funkční, pokud alespoň jeden z nich nebude smutný. Jestliže se Anička a Štěpán budou mít rádi, koupí si kapra, nezpychnou a jejich vztah bude funkční, pak se do roka a do dne vezmou. Jaká je pravděpodobnost, že se do roka a do dne vezmou?

40. **Osmistěnná kostka**
Kolik existuje různých osmistěnných kostek, pokud platí, že když kostku postavíme na libovolný vrchol a rozdělíme ji podle vodorovné osy na dvě poloviny, bude součet čtyř čísel ve vrchní části stejný jako součet čísel ve spodní části? Kostky jsou různé, pokud je nemůžeme ztotožnit libovolnou rotací v prostoru.

41. **Sloup**
Štěpán se netěší na zkoušku z angličtiny, tak chodí okolo sloupu, aby mu čas ubíhal pomaleji. Přitom občas změní směr, aby se mu nemotala hlava. V daný moment Štěpán vnímá čas rychlostí $D = t_r \cdot k$, kde t_r je normální plynutí času (konstanta hodnoty 1 minuta za minutu), $k = \frac{T}{10} + 1$ a T je čas od poslední změny směru v minutách. Pokud tedy např. $D = 3$, pak se Štěpánovi reálná minuta zdá jako tři. Jak dlouho musí Štěpán reálně chodit, aby se mu zdálo, že chodí okolo sloupu 340 minut? Uvažujte, že změní směr vždy po reálné půlhodině chození.

42. **Válec a koule**
Na stole je válec o výšce 16 cm a poloměru podstavy 2 cm. Válec na stole leží jednou z podstav. Dále se na stole nacházejí 2 koule o poloměru 1 cm. Také víme, že každá dvojice těles se dotýká. Určete v cm^2 obsah trojúhelníku s vrcholy v bodech dotyku.

43. **Lea pořád myslí na polynomy**
Máme polynom čtvrtého stupně $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Víme, že je součinem dvou polynomů druhého stupně $x^2 + ex + f$ a $x^2 + e'x + f'$, které mají diskriminanty rovny 9 a 16 a minimálně jeden kořen mají stejný. Též víme, že má náš polynom pouze celočíselné kořeny všechny v absolutní hodnotě menší nebo rovny pěti. Napište součet všech možný hodnot, kterých může nabývat d, za předpokladu, že $a = 7$.

44. **Jekl čtvercový**
Tonda se kvůli nedorozumění dostal do vězení a velmi se tam nudil. Od svobody ho oddělovala mřížka $n \times m$ čtverců. Tonda napočítal, že mřížka obsahuje 50141 podčtverců, což jsou části mřížky z $k \times k$ čtverců pro nějaké $k \geq 1$. Najděte všechny možnosti pro n a m. Jako výsledek zadejte součet $s(n) + s(m)$ přes všechny možné rozměry mřížky, kde $s(x)$ je ciferný součet x.

45. **Komplexní život pana Fibonacciho**
Mějme jednotkovou kružnici a na ní posloupnost bodů $(f_n)_{n=0}^{\infty}$, body jsou určené svým úhlem α_i, který svírají s osou x. Víme, že $\alpha_0 = \frac{2\pi}{11}$ a $\alpha_1 = \frac{2\pi}{13}$ a platí $\alpha_i = \alpha_{i-1} + \alpha_{i-2}$. Označme m minimální vzdálenost, kterou může mít bod posloupnosti od bodu 1, tedy $m = \min(|f_n - 1|)$. Najděte nejmenší i takové, že $|f_i - 1| = m$.