Mathrace Sada 2

odevzdávejte do 18.00

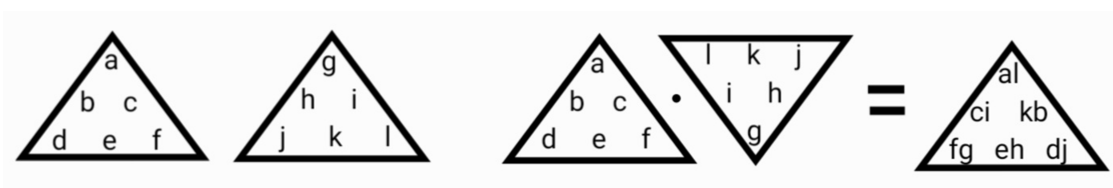
16. **Polynom se vrací!**
Anička se na přednášce naučila o zajímavém polynomu. Na zkoušce ovšem zjistila, že ho zapomněla. Zapamatovala si pouze, že byl tvaru $x^3 + ax^2 + b$, a že jeho kořeny tvořily aritmetickou posloupnost. Pomozte jí určit $\frac{b}{a^3}$.

17. **Kolečka**
Uvažujme tři kružnice se stejným poloměrem $r = 2$ takové, že každé dvě mají vnější dotyk. Určete obsah oblasti mezi těmito kružnicemi.

18. **Neklesající posloupnost**
Kolik existuje maximálně čtyřciferných čísel takových, že jejich cifry tvoří neklesající posloupnost, jejich ciferný součet je nejvýše 13 a dávají zbytek 1 po dělení 5?

19. **Hrací automat**
Lukáš šel do kasína a sedl si k hracímu automatu. Má deset žetonů. Po vhození prvního žetonu má pravděpodobnost na výhru 1.5 %. Když prohraje, může vhodit další žeton s tím, že pravděpodobnost na výhru je každé další kolo o 1.5 % vyšší; tedy první kolo 1.5 %, druhé kolo 3 %, třetí kolo 4.5 % a tak dále. Když vyhraje, vezme si výhru a odejde, jinak odejde po deseti pokusech bez výhry. Jaká je pravděpodobnost, že odejde s výhrou?

20. **Milostné trojúhelníky**
Máme-li dva trojúhelníčky $abcdef$ a $ghijkl$, na obrázku vlevo, definujeme na nich násobení po prvcích tak, jak je vidět na obrázku vpravo. Mějme trojúhelník T, který má za prvky čísla 0, 0, 0, 1, 2, 3. Jaký největší součet prvků může mít trojúhelník $T^3 = (T \cdot T) \cdot T$?



21. **Náhrdelník**
Anička si chce udělat náhrdelník z korálků. Má 2 červené, 2 modré, 4 zelené a 4 žluté. Kolik různých náhrdelníků si může vytvořit, pokud by ráda použila všechny korálky? Dva náhrdelníky jsou různé, jestliže nelze po jejich nasazení na krk vytvořit dva identické pouze posouváním korálků po šňůře.

22. **Liché funkce**
Ráďa vymýšlí letošní Brkosí plakát, na který by chtěla napsat nějakou hezkou lichou funkci z celých do celých čísel. Zatím se rozhodla, že chce, aby pro ni platilo:

$$f(n) = f(n + 2024)$$
$$f(n) = -f(-n)$$
$$f(n) \leq |n| (\bmod 23)$$

Z kolika funkcí si může vybrat? Jako výsledek zadejte počet prvočísel v rozkladu počtu funkcí na prvočísla. Stejná prvočísla se počítají tolikrát, kolikrát se vyskytují.

23. **Nesoudělní kamarádi**
Kolik existuje (neuspořádaných) dvojic nesoudělných přirozených dělitelů čísla $24!$?

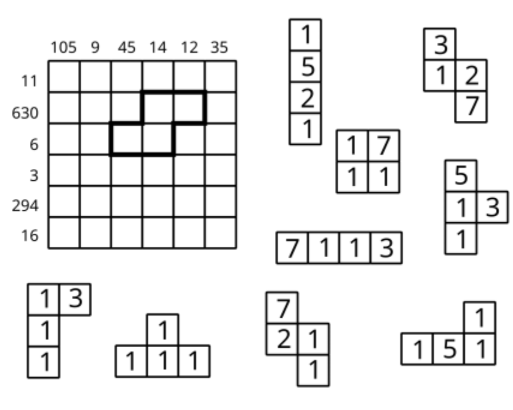
24. **Pevný bod přijde vhod**
O polynomu P víme, že je čtvrtého stupně a jeho vedoucí koeficient je -1. Dále jsme zkoušením ověřili, že $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ a $P(i) = i$ (kde $i = \sqrt{-1}$). Určete součet absolutních hodnot jeho koeficientů, víte-li, že jde o reálná čísla.

25. **Střihoruký Devy**
Jednoho dne si Devy vzal čtverec o délce strany 1, nůžky a až do smrti stříhal. V prvním kroku roztřetil všechny strany a odstřihnul ze čtverce čtyři rohové čtverečky s hranou délky $\frac{1}{3}$. V každém dalším kroku roztřetil všechny strany nového útvaru a odstřihnul u každého vrcholu, jehož vnitřní úhel je $90°$, čtvereček s hranou délky $\frac{1}{3}$ aktuální délky kratší strany u tohoto vrcholu. Pokud by Devy stříhal nekonečně dlouho, jaký bude obsah výsledného obrazce?

26. **Okopávat trojúhelníkovou zahradu zní jako dřina**
Bratři zdědili zahradu ve tvaru tětivového deltoidu a rozhodli se si ji rozdělit na čtyři trojúhelníky pomocí úhlopříček. Víme, že největší vzdálenost, kterou má vrchol zahrady od průsečíku úhlopříček, je jedna. Dále víme, že poměr obsahu kružnice opsané této zahrady ku obsahu zahrady je $2 : 1$. Jaký je obsah nejmenšího trojúhelníku ze všech čtyř (uspořádáno pomocí $\leq$)?

27. **Skákačka**
Lea hraje skákací hru, kde panáček běží stále doprava a pomocí žebříků se vertikálně přesouvá mezi patry a sbírá mince. Jeden level je dlouhý 2024 kroků. Žebříky jsou v pravidelných intervalech po 44 krocích, poslední vede do cíle a na startu není. Na každém žebříku musí změnit patro právě o 1. Panáček začíná v nejnižším patře, kde se nachází i cíl. Pater má hra celkem 24. Kolika způsoby mohla Lea hru proběhnout, když víme, že panáček proběhl v nejnižším patře právě dva úseky včetně startovního?

28. **Tetromino**
Vyplňte tabulku 6×6 devíti tetrominy z obrázku tak, aby v každém poli bylo právě jedno číslo. Navíc platí, že čísla na krajích tabulky udávají součin nebo součet čísel v příslušném řádku či sloupci. Právě 6 čísel určuje součin a právě 6 součet. Tetromina lze otáčet, nelze je ovšem zrcadlově převracet. Pozice prvního tetromina je dána obrázkem. Jako řešení zadejte čísla v druhém a pátém řádku tabulky (postupně po řádcích zleva doprava), přičemž mezi každé dvě čísla vepište jedničku, pokud se mezi nimi nachází stěna tetromina a nulu, pokud ne. Řádky ničím neoddělujte.



29. **Polská množina**

Štěpán má třicetiprvkovou množinu *Bober*, jejíž prvky jsou přirozená čísla. Řekneme, že množina *gryže*, pokud pro právě půlku jejích podmnožin platí, že součin jejích prvků je dělitelný dvěma, pro právě tři čtvrtiny podmnožin platí, že součin jejích prvků je dělitelný třemi, a právě pro sedm osmin podmnožin platí, že součin jejích prvků je dělitelný pěti. Jaký nejmenší součet prvků může mít množina *Bober*, která *gryže*?

30. **Zkouška z Finančky**

Tonda píše zkoušku z finanční matematiky. Zkouška má 4 úlohy, každá má jen 1 správnou odpověď. První je za 10 bodů a má 3 možné odpovědi, druhá je za 25 bodů a má 4 možné odpovědi, třetí je za 30 bodů a má 5 možných odpovědí a čtvrtá je za 35 bodů a má 6 možných odpovědí. Tonda se na zkoušku nestihl naučit, a tak odpovídá náhodně, uniformě (každou odpověď vybere se stejnou pravděpodobností). Jaká je pravděpodobnost, že dostane alespoň 50 bodů a projde?