



# Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.00



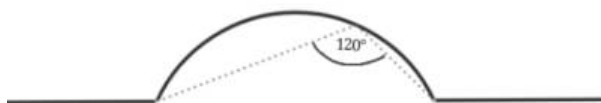
*Pokud je řešením počet nějakých objektů a správná odpověď je nekonečno, napište „inf“. Pokud je řešením racionální necelé číslo, napište jej jako zlomek v základním tvaru (např.  $5/7$ , ale ne  $4/6$ ). Pokud je řešením iracionální číslo, napište jej v desetinném zápisu s tečkou zaokrouhleno na 5 desetinných míst (např.  $5.55579846\dots$  jako  $5.55580$ ). Pokud není řečeno jinak, všechny kostky, mince atd. jsou férové - tedy každá z možných hodnot může padnout se stejnou pravděpodobností.*

## 1. Hvězdní kámoši

C3P0 a R2D2 se potkali na hvězdném semináři pro roboty. C3P0 byl naštvaný, že je první v abecedě. R2D2 mu oponoval, že to nezná, protože u něj je pravděpodobnost, že se to stane, dost malá. Určete prvních pět nenulových číslic pravděpodobnosti, že R2D2 bude první v abecedě mezi 20 roboty, jestliže jména robotů se tvoří písmeno-číslíce-písmeno-číslíce. Písmeno se vybírá z klasické anglické abecedy a každé jméno robota je unikátní.

## 2. Traktor

Traktor jede přes kládu pevně připevněnou k zemi. Uprostřed předního kola má senzor, který zaznamenává jeho pohyb. Po přejetí klády vykreslil senzor na počítač křivku viz obrázek. Určete poloměr klády v centimetrech, když víte, že poloměr předního kola je 50 cm.



## 3. Devyho intervaly

Devy trénuje na běžecký závod, a tak běhá v rovnostranném trojúhelníku o straně 1, přepůleném výškou. Začne u paty výšky a utíká kolmo na jednu ze dvou stran, na kterých pata výšky neleží. Když dorazí na stranu, tak se otočí a utíká zpátky kolmo na výšku. Pak až dorazí na výšku, tak se zase otočí a utíká kolmo na tu stejnou stranu a tak dál a tak dál, dokud mu nedojde dech (což jemu nikdy nedojde, tudíž do nekonečna). Jak dlouhou trasu uběhne?

## 4. Zbytek od oběda

Kolik existuje přirozených čísel  $n$  menších než 4444 takových, že existují přirozená čísla  $a, b$  tak, že  $4444a + 2222b$  dává zbytek 1 po dělení  $n$ ?

## 5. Ujetý eskalátor

Ráďa s Leou jezdí do prvního patra. Mohou jezdit buď po eskalátoru, nebo výtahem, který jede přímo nahoru a potká se s vrchním koncem eskalátoru. Lea zjistila, že když jede na eskalátoru a jde u toho do protisměru, tak jí cesta dolů trvá třikrát déle (Lea je rychlejší než eskalátor), než když jde nahoru stejným směrem jako eskalátor. Když zjistily tuto věc, rozhodly se uspořádat závody na různé způsoby. Pojede-li Lea výtahem a Ráďa na eskalátoru (ani jedna u toho nejde), bude Ráďin čas  $1.875\times$  větší než Lein. Pojede-li Lea na eskalátoru a Ráďa nejprve půjde od jednoho konce k výtahu a pak teprve pojede výtahem, bude Lein čas  $1.2\times$  větší než Ráďin. Urči cosinus úhlu, pod kterým stoupají schody. (Ráďa s Leou samozřejmě chodí obě stejnou konstantní rychlostí a nástupy/výstupy a čekání na výtah můžeme zanedbat.)

### 6. Na minutu přesně

Účastníci Mathrace musejí tlesknout vždy, když se aktuální čas v minutách (počet minut, které uběhly od poslední půlnoci) rovná velikosti úhlu, který svírají ručičky hodin, v úhlových minutách. Soutěž začíná v 16 hodin, tedy v 960 minut. V jaký čas tlesknou účastníci poprvé? Výsledkem je zlomek vyjadřující aktuální počet minut. Hodiny mají jen hodinovou a minutovou ručičku.

### 7. Polynom

Uvažme polynom  $x^3 + ax^2 + bx + 8$ . Terka zjistila, že má dvojnásobný kořen a všechny jeho kořeny jsou celočíselné. Určete součet hodnot, kterých může nabývat výraz  $a^2 - 2b$ .

### 8. Rozbitý display

Lukáš je zručný a vyrobil si funkční digitální display hodin (půlnoc je 00 : 00). Teda skoro funkční. Občas náhodné kombinace segmentů nesvítí. Display je tvořen čtyřmi pozicemi pro cifry, každá pozice má klasicky 7 segmentů. Kolik existuje kombinací rozsvícení segmentů takových, že z nich lze již jednoznačně určit, kolik je hodin?

### 9. Martovo DnD

Martů hraje DnD a hází třemi kostkami. Při hodu se počítají lepší dvě kostky a pro úspěch potřebuje hodit součet alespoň 9. Jaká je pravděpodobnost, že se mu to podaří?

### 10. Mrtě funkce

Pro přirozené číslo  $n$  označíme  $\Psi(n)$  součin všech jeho dělitelů. Kolik je  $\log_{10} \Psi(\Psi(\Psi(\Psi(10))))$ ?

### 11. Devy má dvě andulky!

Devy má dvě andulky. Jedna je zelená, druhá je modrá. Zelená krouží kolem kulatého lustru dokola, a to tak rychle, že jeden okruh jí trvá 20 s. Modrá krouží v opačném směru a jeden přelet jí zabere 25 s. Lustr se točí konstantní rychlostí ve směru zelené andulky. Ptáci vyletí ve stejnou dobu ze stejného místa. Poprvé se potkají opět na stejném místě obě andulky i lustr (ve výchozí pozici) za 400 s. Určete součet temp, kterými se může lustr otáčet. Tempem uvažujeme čas jedné otáčky.

### 12. Výlety po Slovensku

Vlakomil rád cestuje, ale nerad by jel na stejný výlet víckrát. Kolik výletů po Slovensku si může naplánovat, jestliže chce při každém výletu projet každý slovenský kraj právě jednou? Může přejet z kraje do druhého kraje, jen když spolu sousedí.

### 13. Základní kameny

Máme polynom  $p = x^3 + y^3 + z^3 - x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2$ . A definujme si tři základní stavební polynomiální kameny  $k_1 = x + y + z$ ,  $k_2 = xy + yz + zx$ ,  $k_3 = xyz$ . Můžeme vystavit polynom  $p$  pomocí našich stavebních kamenů jako  $p = ak_1k_3 + bk_2^2 + ck_2k_1^2 + dk_1^4 + ek_3 + fk_2k_1 + gk_1^3$  (protože v  $p$  jsou pouze prvky stupně čtyři a tři). Najděte tyto koeficienty a jako řešení napište za sebe jejich absolutní hodnoty v pořadí  $abcdefg$ .

### 14. Koule z modelíny

Anna se rozhodla, že si chce vymodelovat koule. Vzala si plastelínu a začala modelovat. Celkem vymodelovala 10 koulí. První koule měla poloměr 1 m. Při každé další kouli se rozhodla s pravděpodobností  $\frac{1}{2}$ , jestli kouli zdvojnásobí poloměr, nebo ho zachová. Určete pravděpodobnost, že jí k vymodelování 10 koulí bude stačit 1690 m<sup>3</sup> plastelíny.

## 15. Kluk s kamením

Lukáš je naštvaný, a tak kolem sebe ze zlosti hází kameny. Matematiku ale i přesto miluje, tak se po chvíli zarazil a začal radši počítat, jaká je (při náhodně zvoleném úhlu ( $0 - 90$  stupňů) a síle vrhu) pravděpodobnost, že maximální výška kamene od země překoná jeho finální vzdálenost od místa vrhu (Lukáš se pohybuje na dokonalé rovině).