



Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.00



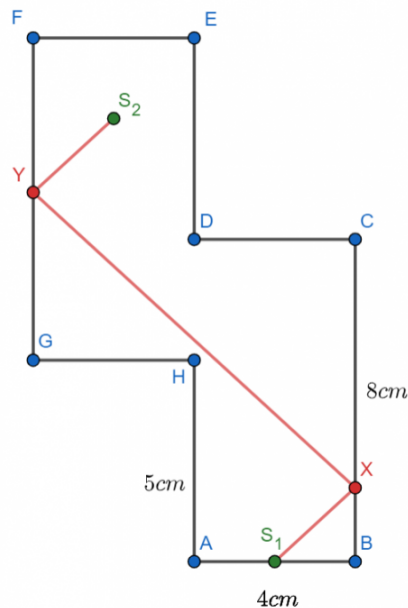
Pokud je řešením počet nějakých objektů a správná odpověď je nekonečno, napište „inf“. Pokud je řešením racionální necelé číslo, napište jej jako zlomek v základním tvaru (např. $5/7$, ale ne $4/6$). Pokud je řešením iracionální číslo, napište jej v desetinném zápisu s tečkou zaokrouhleno na 5 desetinných míst (např. $5.55579846\dots$ jako 5.55580). Pokud není řečeno jinak, všechny kostky, mince atd. jsou férové - tedy každá z možných hodnot může padnout se stejnou pravděpodobností.

1. Dělení hodin

Na zdi visí klasické hodiny s čísly 1-12. Rozdělme hodiny jedním rovným řezem (ne nutně procházejícím středem) na dvě části tak, že součet čísel v obou částech bude stejný a řez neprochází žádným z čísel. Pro každé takové rozříznutí sečtěte součiny čísel v obou částech, a jako výsledek zadejte součet těchto součtů.

2. Šmoula hraje minigolf

Šmoula si chce zahrát minigolf na dráze na obrázku: jedná se o mnohoúhelník $ABCDEFGH$, kde úhly u všech vrcholů jsou pravé a body A, H, D, E leží na jedné přímce; dále $|AB| = |CD| = |EF| = |GH| = 4\text{cm}$, $|BC| = |FG| = 8\text{cm}$, $|AH| = |DE| = 5\text{cm}$. Šmoulovi se zadaří: na jeden úder holí dostane míček - pro jednoduchost bod - z počátečního bodu S_1 ve středu úsečky AB do jamky, koncového bodu S_2 vzdáleného 2cm od FE a ležícího na středu mezi FG a DE . Povede se mu to na dva odrazy červenou lomenou čarou $S_1XY S_2$ vyznačenou na obrázku. V jakém úhlu a vzdálenosti musel Šmoula zasáhnout stranu BC , aby se mu to podařilo? Odpověď zadejte ve formátu $|BX|(cm) + |\angle BXS_1|(rad)$.



3. Světýlka

V místnosti je 12345678910 zhasnutých světýlek. Postupně přichází 12345678910 lidí. První přepne každé světýlko, druhý každé druhé, třetí každé třetí. Postupně každý n -tý člověk přepne každé n -té světýlko. Kolik světýlek na konci bude rozsvícených?

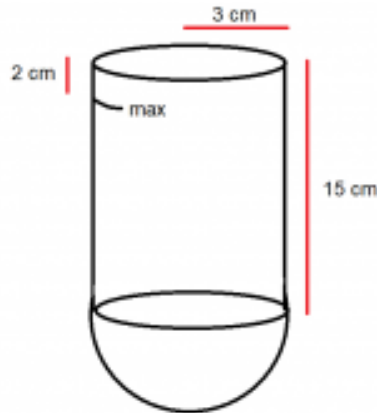
4. Kořeny Polynomů

Mějme polynom $p = x^3 + 5x^2 + 3$. Najděte kubický normovaný polynom q (třetího stupně, koeficient

u x^3 je 1), jehož kořeny jsou právě druhé mocniny kořenů polynomu p . Jako odpověď zadejte součin nenulových koeficientů výsledného polynomu.

5. Smoothie

Ivan si chce udělat na svačinu banánové smoothie. Jeho mixér má tvar válce o výšce 15 cm o poloměru 3 cm, ke kterému je ze spodu připojena polokoule. Nádoba nesmí být naplněna až po okraj, musí se nechat 2 cm nahoře, aby se dal mixér uzavřít. Kolik ml mléka může Ivan do mixéru nalít, pokud jeho banán váží 350 g? Počítejte s hustotou banánu 1750 kg/m^3 , výsledek zaokrouhlete na celé mililitry.



6. Sedm

Kolik existuje sedmiciferných čísel takových, že suma ciferných součtů jeho různých permutací je dělitelná sedmi? Permutace může začínat nulou, původní číslo však ne.

7. Pravoúhlé radovánky

Uvažujme libovolný pravoúhlý trojúhelník ABC (s pravým úhlem u vrcholu B) s obsahem 2023 cm^2 . Jaký největší může mít takový trojúhelník poloměr r kružnice vepsané? Jako odpověď zadejte veličinu $r + |AB| + |BC|$ v cm.

8. Dopravní

V zemi Silnicii mají nový dopravní systém, který spojuje čtyři největší města: Motorovou Lhotu, Karburátořín, Volantov, a hlavní město. Mezi každými dvěma z nich vede silnice, cesta natolik krátká, že kdybyste chtěli mezi nimi jet oklikou přes jiné město, bude vždy alespoň jedna z obou silnic na oklice aspoň tak dlouhá jako původní, přímá silnice. Jinak než po silnici se mezi těmito čtyřmi městy nedá dostat.

Z Motorové Lhoty se jede do hlavního města pět hodin, a od tamtud trvá cesta do Karburátořína o hodinu déle, než do Volantova. Kterákoli dvě z těchto měst jsou navíc alespoň půl hodiny jízdy od sebe.

Buďte a délka cesty z Motorové Lhoty do Volantova, b z Volantova do Karburátořína a c z Karburátořína zpět do Lhoty, a $L = a + b + c$ (délky cest bereme v hodinách). Různé hodnoty a, b, c se můžou sečíst na totéž L ; najděte tu L , pro která existuje nejvíc možných trojic takových a, b, c . Jako řešení zadejte součin nejkratší a nejdelší takové celočíselné délky v hodinách.

9. Čtyřúhelník

Jsou dány kružnice $k(S_1, 8 \text{ cm})$ a $l(S_2, 15 \text{ cm})$. Z bodu A vedeme tečny ke k a z bodu C vedeme tečny k l . Tyto tečny tvoří tečnový čtyřúhelník s kružnicí ve středu S . Určete $\frac{|AS_1|}{|CS_2|}$, pokud $\frac{|AS|}{|CS|} = 3$.

10. Princ Markov zabíjí draka v řetězech

Princ Markov seká hlavy trojhlavému drakovi. Když usekne 1. hlavu, je 70% pravděpodobnost, že mu naroste zpátky. Když se mu povede useknout 2. hlavu, je pravděpodobnost 50 %, že mu obě hlavy narostou zpátky a 50 %, že zůstanou useknuté. Když usekne 3. hlavu, tak je pravděpodobnost 30 %, že mu všechny tři narostou zpátky a 70 %, že všechny zůstanou useknuté. Když zůstanou všechny tři useknuté, tak drak konečně umře. Jaká je šance, že do pěti seknutí je drak mrtev?

11. Hráčská

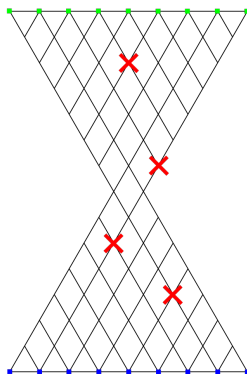
Dalibor hodil třemi šestistrannými kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že hodil v součtu na kostkách alespoň 10?

12. Posloupnost Posloupností

Máme posloupnost posloupností, tedy pro libovolné $i \in \mathbb{N}$ máme posloupnost $\{a_{i,j}\}_{j=1}^{\infty}$. Všechny členy všech těchto posloupností jsou nezáporná celá čísla. Tyto posloupnosti splňují vlastnost $a_{i,j} = a_{i,j-1} + a_{i,j-2}$ pro libovolné $i \in \mathbb{N}$ a $j \geq 3$, stejně tak $a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i-2,j}$ pro libovolné $j \in \mathbb{N}$ a $i \geq 3$. Určete, čemu se rovná $a_{1,1} \cdot a_{2,2}$, jestliže platí $a_{1,2} = a_{2,1} = 0$, $a_{19,19} = 68488939$ a $a_{20,20} = 179306347$.

13. Přesýpací hodiny

Martin má speciální přesýpací hodiny, ve kterých mohou zrnka písku padat jen po vyznačených úsečkách (vždy jen směrem šikmo dolů, ne vodorovně). Navíc se na průsečících označených červenými křížky nachází černé díry, které zrnko zachytí a dál už nepropustí. Kolika různými způsoby mohou zrnka písku propadnout z vrchu hodin (zeleně označené průsečíky) až úplně dolů (modře označené průsečíky)?



14. Skoro odmocniny

Kolik existuje uspořádaných dvojic (x, y) celých čísel splňujících $\lfloor \sqrt{|x|} \rfloor + \lfloor \sqrt{|y|} \rfloor = 200$?

15. AZ kvíz

Klasický hrací plán na AZ kvíz (pyramida ze šestiúhelníků) má jednotlivá pole po řádcích označena čísly 1 až 28. Vybarvěte několik políček jednou barvou tak, aby hráč (hrající za tuto barvu) podle klasických pravidel AZ kvízu vyhrál a aby:

Každé vybarvené políčko sousedilo hranou s právě 2 dalšími vybarvenými políčky.

Na každé ze tří hran trojúhelníkové pyramidy byla vybarvena právě 2 políčka.

Ze všech možných řešení vyberte to, kde je součet čísel z vybarvených políček maximální a tento součet vynásobený počtem všech řešení napište jako výsledek úlohy.



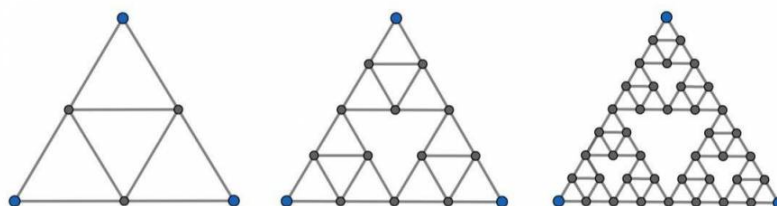
Mathrace Sada 2

odevzdávejte do 18.00



16. Brkodort

Brkos slaví 30 let od vzniku. Na oslavě je dort a 2023^{23} účastníků. Dort je ve tvaru trojúhelníku a protože matematici jsou kreativní krájí tento dort velice specifickým způsobem. Nejprve provedou řezy jako střední příčky toho trojúhelníku, tím dostaneme čtyři kousky. V druhém kole provedou řezy jako střední příčky těch okrajových trojúhelníků. Ve třetím kole provedou řezy jako střední příčky v těch nově vzniklých trojúhelnících, které jsou na kraji původních okrajových trojúhelníků. A tak budou pokračovat dál. Kdyby pokračovali do nekonečna dostali by Sierpienského trojúhelník. První 3 řezy vidíte na obrázku. Kolik kol řezání musí provést, abychom nakrmili všech 2023^{23} účastníků?



17. Babylon

Přijel jsem do města s 2023^2 obyvateli, z nichž $\frac{1}{7}$ mluví pouze jedním jazykem, $\frac{1}{7}$ dvěma, a tak dále, až po znalce 7 různých jazyků. Celkově je v tomto městě 2023 různých jazyků, každým z nich mluví alespoň jeden člověk. Kolika nejméně jazyky se musím naučit mluvit, jestliže se chci porozumět s každým ve městě (ať už přímo či nepřímou)?

18. Casino

V casině jsou dvě neprůhledné nádoby A, B s černými a bílými kuličkami. Na začátku jsou v nádobě A dvě bílé a v nádobě B tři černé kuličky. Stroj na míchání každých pět minut vezme jednu kuličku z každé nádoby a vymění je. Jaká je pravděpodobnost, že když přijdeme v náhodnou chvíli k nádobám, tak budou v nádobě A dvě černé kuličky?

19. Lapač snů

Nechť $n > 1$ je přirozené číslo. Mějme kružnici o poloměru 1 cm a v ní vepsaný pravidelný n -úhelník. Přes takovýto „lapač snů“ chceme prostrčit kouli o poloměru 0.99 cm, přičemž předpokládáme, že úsečky tvořící n -úhelník, koule i kružnice jsou nezdeformovatelné. Jaké je největší n takové, že příslušným n -úhelníkem (ještě) nejde koule prostrčit?

20. Sirková

Kuba a Kuba hrají následující hru: Na dvou hromádkách leží sirky. Hráč který je na tahu si vybere hromádku a vezme si z ní jednu až tři sirky. Hráč který je na tahu a nemůže vzít další sirku(y) vyhrává. Kuba má až 50 sirek, ze kterých jde připravit hru - může tedy vzít $n \leq 50$ sirek a vytvořit z nich 2 hromádky. Poté hru zahájí druhý Kuba. Kolika způsoby může první Kuba rozmístit sirky na stůl tak, aby měl výherní strategii?

21. Vítkových 2023 kružnic

Vítek kreslí mandalu, protože se nudí ve vlaku. Nakreslil kružnici o poloměru 10 cm, která bude jeho základ. Potom chtěl dovnitř nakreslit po okraji 2023 stejně malých kružnic, aby se nepřekrývaly a zároveň se každá dotýkala v jednom bodě velké kružnice a dotýkala se dvou malých kružnic. Aby mohl tyto kružnice nakreslit, potřebuje znát jejich poloměr. Určete tento poloměr v cm.

22. Domino

Marťa si hraje s kostkami domina. Každá kostka má 2 políčka, na jednom políčku je 0 až 6 teček. Na kostkách jsou všechny možné dvojice políček, každá dvojice je na právě jedné kostce. Kolika způsoby může Marťa vybrat dvojici kostek takovou, že tyto kostky lze přiložit k sobě (tzn. na obou kostkách je políčko se stejným počtem teček)?

23. Poly-poly-polynom

Zapište polynom $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ ve tvaru $A(x+1)^4 + B(x+1)^3 + C(x+1)^2 + D(x+1) + E$. Jako výsledek zadejte šesticiferné číslo, které vznikne, když za sebe poskládáte druhé mocniny čísel A až E, tzn číslo $A^2B^2C^2D^2E^2$.

24. Myslím si číslo

Tonislav si myslí číslo x mezi 0 a 1 včetně (náhodně vybrané). Radácie s Leonardou se ho snaží uhodnout. Radácie náhodně tipuje číslo y a Leonarda číslo z , opět mezi 0 a 1. Jaká je pravděpodobnost, že holky tiply čísla taková, že $y \leq x$, $z \leq x$ a $z \leq y/3$?

25. Čtverylka

Vodník Česílko má v řadě 50 hrníčků, očíslované čísla $1, 2, \dots, 50$. Do každého z hrníčků poté hodil jeden kus papíru s číslem z množiny $\{1, 2, \dots, 50\}$, žádné dva papírky neobsahovaly stejné číslo. Všiml si pak ukrutné náhody – součin čísel každého hrníčku a papírku v něm byla druhá mocnina celého čísla. Kolika způsoby mohl papírky rozmístit, aby bylo toto splněno?

26. Rovnice s velkým číslem

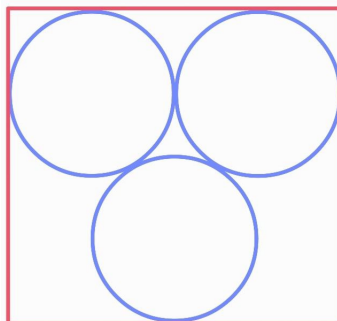
Označme si k -té prvočíslo jako p_k a uvažujme číslo

$$N = p_2^2 p_3^4 \cdots p_{23}^{44} = \prod_{k=2}^{23} p_k^{2k-2}.$$

Určete počet řešení (x, y) rovnice $x^2 - y^2 = N$ takových, že x, y jsou nezáporná celá čísla.

27. Tři kružnice v obdélníku

Mějme tři kružnice o stejném poloměru dotýkající se po dvou v jednom bodě a obdélník jim „opsaný“, který se dotýká všech tří kružnic (viz obrázek). Určete obsah obdélníku v cm^2 , pokud víte, že poloměr kružnic je 1 cm .

**28. Záhadná funkce**

Je dána funkce $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ splňující pro nějaké číslo k následující: $f(n) = n+1$ pro $n < k$, $f(k) = k'$ kde $k' < k$ a $f(n) = n$ pro $n > k$. Dále o funkci víte, že $f^4(n) = f^{2314}(n)$ pro libovolné n . Určete kolik funkcí $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ vyhovuje definici f .

29. Mafie

V Brně se hraje hra Mafie. V rámci ní jsou hráči seřazeni do (orientovaného) kruhu, kde každý „loví“ právě jednoho hráče (svou oběť, v kruhu před ním) a „je loven“ právě jedním hráčem (v kruhu za ním). Jakmile je někdo uloven, je vyřazen z kruhu a ten je zmenšen o 1 tak, že původní oběť uloveného se stává obětí jeho lovce. Hra skončí ve chvíli, kdy v ní zůstane jen jediný hráč.

Předpokládejme, že v jednu chvíli může být chycen/uloven jen jeden hráč (jako kdyby se hrálo po kolech). Všichni hráči mají stejnou pravděpodobnost, že uloví svou oběť. Jaká je pravděpodobnost, že při hře 2023 hráčů uloví každý až na prvního uloveného právě jednoho hráče? Výslednou pravděpodobnost vynásobte 10^n pro nějaké n a zadejte ve tvaru $x.y_1y_2y_3y_4y_5$, kde x je první nenulová cifra desetinného rozvoje a zaokrouhlete na 5 desetinných míst (i kdyby vám vyšlo racionální číslo).

30. Hranolky

Tonda s Davidem šli do McDonaldu a objednali si hranolky. Protože s sebou měli dvě temperky (modrou a červenou), začali hranolkám obarvovat vrcholy. Je důležité poznamenat, že jejich hranolky byly ve tvaru hranolu s podstavou pravidelného 6-úhelníku. Kolik existuje obarvení dvěma barvami jedné hranolky, když dvě obarvení považujeme za stejná, pokud jedno můžeme dostat z druhého nějakým otočením (symetrií) hranolky?



31. Kanoistika

Tobiasova kánoe je od pobřeží vzdálená 14 km (pobřeží má tvar přímky). Tobias dokáže pádlovat rychlostí 6 km/hod a jít pěšky po břehu rychlostí 10 km/hod. Chce se co nejrychleji dostat na místo na pobřeží, které je od něj přímkou čarou vzdálené 22 km. Kolik km od cíle se musí vylodit, aby se do něj dostal co nejrychleji?

32. Dětský obvodřák

V ostroúhlém trojúhelníku ABC s obvodem o_{ABC} , kde $|AC| = |BC| > |AB|$ uvažme K, L, M paty výšek na strany BC, AC, AB . Víme, že

$$\frac{|ML| + |MK|}{o_{ABC}} = \frac{11}{36}.$$

Kolik je $\frac{|AB|}{|AC|}$?

33. Platónská postupka

Máte k dispozici hrací kostky ve tvaru platónských těles, každé právě jednou. Hrací kostky jsou spravedlivé a jejich stěny očíslované $1 - n$. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu všemi naráz padnou čísla $1 - 5$, každé právě jednou?

34. Pegas

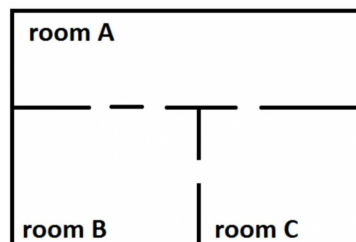
Lea má šachovou figurku pegase a pro každé $n \in \mathbb{N}$ šachovnici velikosti $n \times n$. Pegas se narodil od normálního koně pohybuje o 4 pole v jednom směru a o 1 pole ve směru kolmém na ten první. Lea vzala fixu a začernila na každé šachovnici všechna pole, na která se s pegasem nedostane, pokud bude začínat v levém horním rohu (může se při pohybu pegasem vracet i na pole, na kterých už byla). Kolik polí takto začernila?

35. Digitální hodiny

Představme si digitální display zobrazující čísla klasickým sedmissegmentovým displayem se čtyřmi pozicemi pro cifry (mohou tedy vzniknout až čtyřciferná čísla). Každé dva segmenty v rámci jedné cifry svítí různými barvami a každé dva segmenty na stejné pozici v různých cifrách svítí stejnými barvami. Kolik existuje čísel takových, že při jejich zobrazení bude svítit stejný počet segmentů od každé barvy (tedy každá barva svítí alespoň jednou)? Pro účely úlohy uvažujeme jedničku jako dva rozsvícené segmenty v levé hraně obdélníku. Pokud display zobrazuje menší než čtyřciferná čísla, NEdoplňuje zleva nuly.

36. Myš v domě

Myš žije v domě se třemi místnostmi a dveřmi mezi nimi (viz obrázek). V domě je bezpečnostní zvonek, který zazvoní jednou každou hodinu. Pokaždé, když zazvoní, myš náhodně změní místnost, přičemž má stejnou pravděpodobnost pro každé z dveří vedoucích z dané místnosti, že použije právě ty. Myš začíná náhodně v jedné z místností a žije nekonečně dlouho. Jakou část svého života stráví ve které z místností? Jako odpověď zadejte součin pravděpodobností pro jednotlivé místnosti.



37. Rozdíly

Je daná funkce $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ splňující $f(11) = 111$, $f(111) = 11$ a $f(x) - 2f(x+1) + f(x+2) = x + 1$ pro každé přirozené x . Kolik je rozdíl $f(2) - f(1)$?

38. Přechody přes přechod

Robert má pod oknem přechod, přes který každý den přejde stejný počet lidí. Robert neví, kolik lidí to je, jenom ví, že je to číslo mezi 30 až 60 včetně. Rozhodne se zjistit, kolik lidí přejde za rok, a tak do přechodu vbuduje čítačku, která se zvýší o jedna pokaždé, když někdo přejde. Čítačka má ale jen tři cifry, a tedy jakmile přejde tisíc lidí, ukazuje opět 0 a počítá odznovu. Jednou na konci dne k čítačce Robert přijde, podívá se na číslice a uvědomí si, že z nich nepozná, kolik lidí přes přechod od instalace čítačky přešlo. Kolik nejméně dní čítačka počítala?

39. Devítky

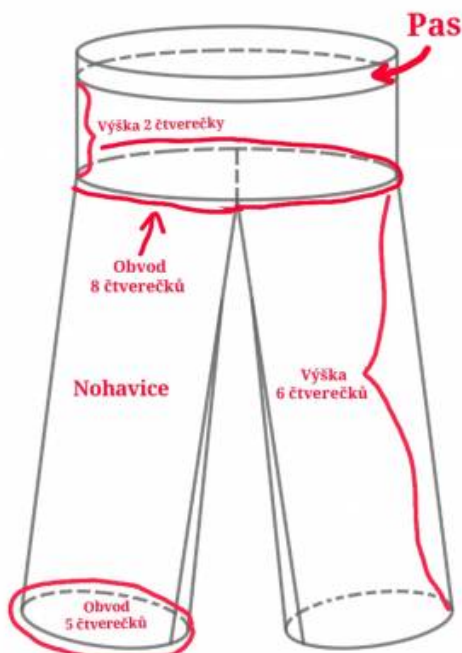
Mějme binární operace plus, mínus, krát a děleno. Kolik čísel od 1 do 50 jsme schopní vytvořit, když máme čísla 3 a 9, závorky a vždy použijeme právě pět čísel?

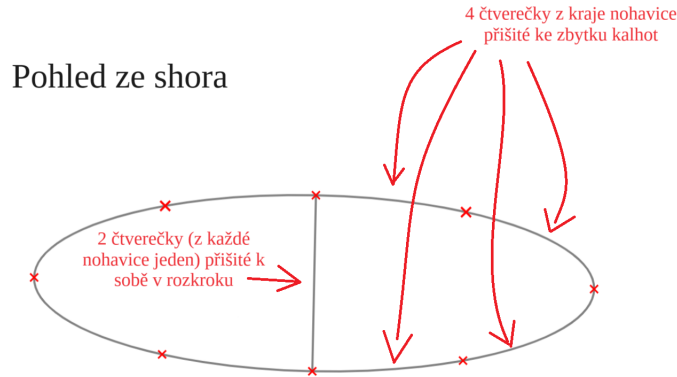
40. Škaredá čísla, hezký polynom

Lukáš si hraje s číslem $\sqrt[3]{\sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2}}$. Povedlo se mu na zemi najít polynom dvanáctého stupně, který má všechny koeficienty racionální a vedoucí koeficient je 1, který má toto číslo za kořen. Jakou hodnotu dostane, když do tohoto polynomu vloží $\sqrt{3}$?

41. Kalhoty

Lea si háčkuje kalhoty. Aby to měla lehčí, připraví si prvně několik čtverečků a z nich poté kalhoty sešije. Uháčkovat jeden čtvereček jí trvá 40 minut. Vypočítala si, že okolo stehna jí stačí 5 čtverečků a na délku 6. Jedna nohavice bude tedy ve tvaru pláště válce bez podstav o výšce 6 čtverečků a obvod podstavy bude 5-krát délka strany čtverečku. Na zbytek kalhot si udělá podobný válec o výšce dva čtverečky a obvodu podstavy 8-krát délka strany čtverečku. Potom je sešije následovně: nohavice sešije tak, že si na každé z nich vezme jeden čtvereček a ty spojí. Nyní má „navrchu“ nohavic 8 „volných“ čtverečků a ty přišije ke zbylé části. Aby jí kalhoty nepadaly, musí ještě uháčkovat pas, který přišije z vrchu kalhot. Ten jí zabere uháčkovat 270 minut a pak ho musí ještě přišít. Kolik minut bude Lea kalhoty vyrábět pokud víte, že sešítí dvou čtverečků (sousedících jednou hranou) jí trvá 1 minutu?





42. Osamělý hráč

Karel nemá kamarády, tak si vymyslí hru pro jednoho hráče: Na stůl vyskládá do řady 11 mincí, první z nich vezme do ruky a hodí s ní. Pokud padne panna, hodí s ní znovu a opět se řídí tímto pravidlem. Padne-li orel, odloží minci na konec stolu a dál s ní už nehraje. Pokud mu ještě mince nedošly, vezme si další v řadě a opakuje postup s ní. Kolik hodů provede Karel průměrně v jedné hře? (Mince jsou spravedlivé a zanedbáváme možnost, že dopadne na hranu.)

43. O nosičích rýže

Král Bramboromil po svém nástupu na trůn nechal z královského hradu vyhnat všechny rýžonoše, neboť neměl rýži rád. Jako odstupné dal nejméně zkušenému rýžonoši jeden pytel rýže a k -tému nejméně zkušenému vždy o 30 % více rýže, než dal $(k - 1)$ -tému nejméně zkušenému.

Protože byl Bramboromil zákeřný, namíchal do pytlů kulatozrnou a dlouhozrnou rýži dohromady. Když to rýžonoši zjistili, rychle se jali zrnko po zrnku rýži třídit do nových pytlů (stejně velkých jako předtím). Při tom objevili, že když kulatozrnou rýži rozdělí na hromady po sedmnácti pytlích, devět jim zbude; pokud na hromady po dvanácti pytlích, zbydou jim tři; a pokud na hromady po sedmi pytlích, zbyde jim pytlů pět. Nakonec je spočítali po jednom a počet pytlů kulatozrné rýže označili n .

Víme-li, že číslo n je jednoznačně zadáno, kolik nejvýše rýžonošů mohlo být vyhnáno?

44. Proces

Kouma s Ňoumou stojí v kartézské souřadné soustavě v bodě se souřadnicemi $(0, 0)$. Nejprve hodí klasickou šestistěnnou kostkou (očíslovanou 1 až 6) Kouma a oba se posunou o tolik jednotek doprava, jako mu padlo na kostce. Poté hodí stejnou kostkou Ňouma a oba se posunou o tolik jednotek nahoru, jako mu padlo na kostce. Kolikrát musí tento proces opakovat, aby měli alespoň 50% pravděpodobnost, že se budou nacházet ve vzdálenosti alespoň 2023 od počátku? Jako jeden proces se počítá Koumův i Ňoumův hod dohromady.

45. Krycí jména

Kolik je různých validních kartiček ve hře Krycí jména? To znamená, kolik existuje různých neorientovaných polí 5×5 , obsahující 7 červených polí a 8 modrých polí (anebo 7 modrých a 8 červených) a k tomu ještě jedno černé políčko.