Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.00

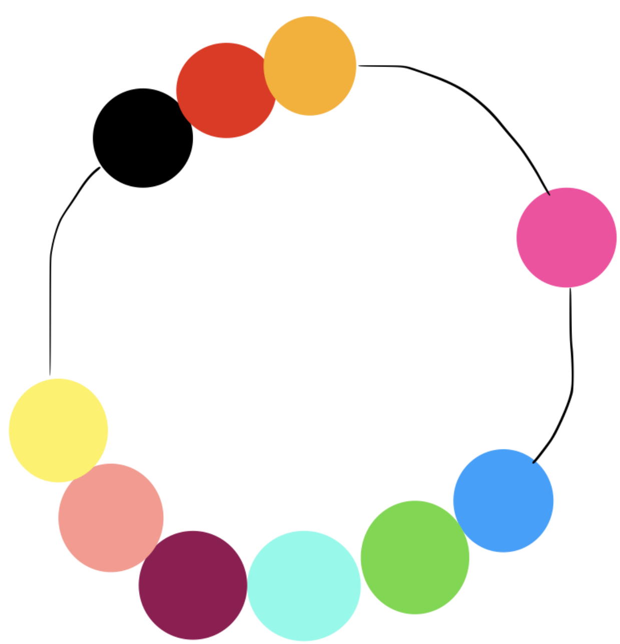
Pokud je řešením počet nějakých objektů a správná odpověď je nekonečno, napište „inf". Pokud je řešením racionální necelé číslo, napište jej jako zlomek v základním tvaru (např. 5/7*, ale ne* 4/6*). Pokud je řešením iracionální číslo, napište jej v desetinném zápisu s tečkou zaokrouhleno na 5 desetinných míst (např.* 5.55579846 . . . *jako* 5.55580*).*

1. **Cesty do Říma:** Do Říma vede 2022 cest, které jsou nějak (ne nutně různě) dlouhé. Když je očíslujeme přirozenými čísly od 1 do 2022, nastane právě jedna z následujících situací:

   - Právě jedna z cest je delší než druhá (tj. s číslem 2)
   - Právě jedenáct cest je delších než druhá
   - Právě sto jedenáct cest je delších než druhá
   - Právě tisíc sto jedenáct cest je delších než druhá
   - Žádná cesta není delší než druhá

   Navíc každá ze situací určitě nastane v alespoň jednom očíslování. Vybereme očíslování rovnoměrně náhodně. Určete pravděpodobnost druhé nejpravděpodobnější situace.

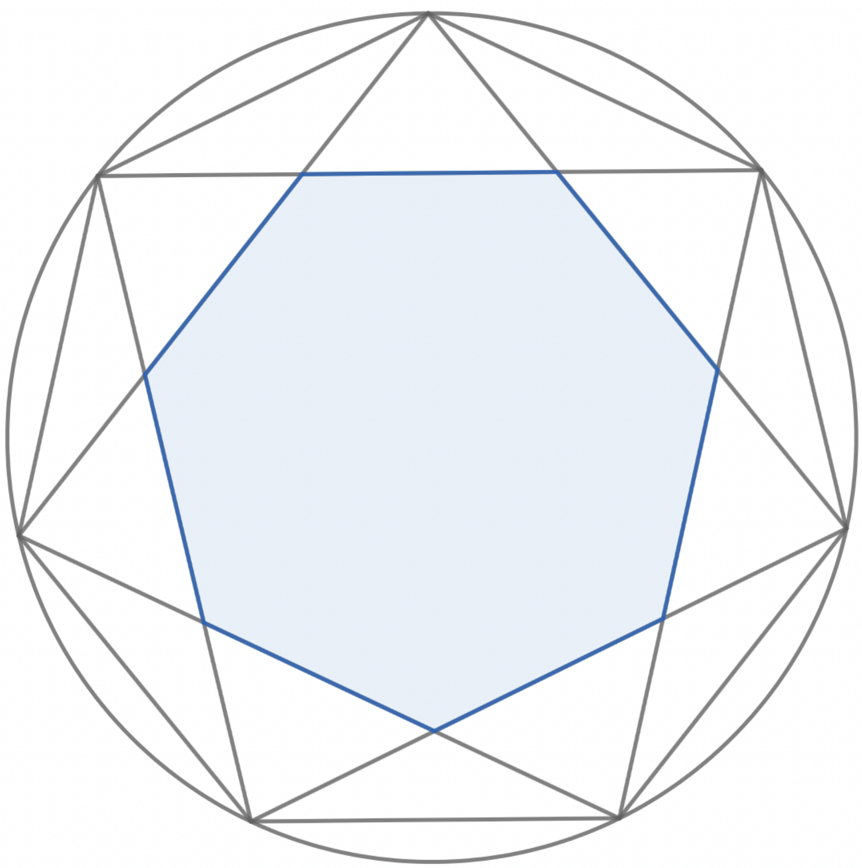
2. **Korálky:** Ernesto má k dispozici 10 barevných korálků, kde každé 2 korálky mají jinou barvu. Těchto 10 korálků si navlékl na provázek a ten zavázal, čímž si vytvořil náramek. Sousední korálky poté různě poslepoval k sobě tak, jak je vyznačeno na obrázku. Vznikly mu tak na náramku skupiny slepených korálků - skupina může čítat 1 až 10 korálků. Měl dlouhý provázek, tedy ať slepil korálky libovolně (klidně všech 10 za sebe do řetízku), vždy zůstaly nějaké dva sousední korálky neslepené. Kolik různých náramků takto mohl získat? Dva náramky považujeme za stejné, pokud pomocí otočení nebo nasazení na ruku opačným směrem zjistíme, že mají korálky nasazené ve stejném pořadí a zároveň mají korálky poslepovány stejným způsobem.



3. **Kruté zvolání:** Dalík se procházel parkem, když najednou zakopl o kámen. Při tom zvolal: "Mám funkci splňující $f(1) = f(2) = 1$ a $f(n+2) = 2^{f(n+1)} + 2^{f(n)}$ pro každé přirozené $n \geq 1$." Určete zbytek, který dává číslo $f(23)$ po dělení číslem 42.

4. **Mašinka Tomáš:** Mašinka Tomáš projíždí trasu, která má devět zastávek, začíná v první z nich a končí v poslední, celkem tedy projede osm úseků. Pokud na každé zastávce nastoupí stejný počet lidí a každý cestující si po nástupu na vlak náhodně zvolí zastávku (před ním), na které vystoupí, v kolikátém úseku bude vlak průměrně nejplnější?

5. **Pekelný obsah:** Bubla si nakreslila pravidelný 2023-úhelník a opsala mu kružnici, nazvěme ji k. Z 2023-úhelníka pak vytvořila 2023-gram tak, že spojila všechny dvojice vrcholů 2023-úhelníka, které měly stejného souseda. Zjistila, že z těchto nových čar se jí vytvořil druhý, menší pravidelný 2023-úhelník s obsahem 10^6 uvnitř původního 2023-úhelníka. Jaký byl obsah původní kružnice k? Na obrázku je analogická situace pro heptagram, modře je vyznačen nově vzniklý pravidelný sedmiúhelník.



6. **Hloupý, ale funkční robot:** Čtvercový stůl je rozdělený na čtyři stejně velké čtvercové části. Na každé z těchto částí je nakreslena šipka směřující k nějaké straně stolu. Hloupý robot se po stole pohybuje tak, že když přijde na nové políčko, pokračuje po směru šipky. Může se ovšem stát, že

přejde přes hranu stolu a spadne na zem. Určete, kolik existuje rozmístění šipek na stole takových, že můžeme robota postavit na stůl tak, aby nikdy nespadl.

7. **Cifry šifry:** Kolik existuje devíticiferných čísel s ciferným součinem 72 a ciferným součtem 20?

8. **Kouzelná operace:** Na přirozených číslech bez nuly je definována operace $\ominus : a \ominus b = |a - b| + 1$. Kolik různých čísel je možné vytvořit pomocí čísel 102299, 84099, 3606 a operace $\ominus$?

9. **Mírumilovná míra:** Mějme krychli o délce strany 1. Označme její vrcholy podle konvence jako A, B, C, D, E, F, G, H. Dále označme střed hrany AE jako A', střed hrany BF jako B', střed hrany CG jako C' a střed hrany DH jako H'. Uvnitř každé z úseček $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ a $D'A'$ vyberme bod rovnoměrně náhodně. Uvnitř stěn krychle $ABCD$ a $EFGH$ vybereme opět bod rovnoměrně náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že všech těchto šest náhodně vybraných bodů tvoří těleso v prostoru s objemem $V < \frac{1}{6}$?

10. **Součin mnoha polynomů:** Uvažujme polynom $p(x) = \prod_{n=2}^{2022}(x^{t(n)} - n)$, kde $t(n)$ je největší k takové, že k-tá odmocnina z n je celé číslo. Určete počet různých normovaných polynomů prvního stupně s celočíselnými koeficienty, které dělí p.

11. **Sociální úzkost:** Šest studentů matematiky, označme je A, B, C, D, E, F, se snaží vejít do dveří s pořadím první, druhý až šestý. Mají ale ke vstupu určité podmínky spojené s pořadím, ve kterém vejdou.

    - C chce vejít na prvočíselné pozici
    - Jestli B vejde před D, pak A vejde po E
    - F určitě nevejde hned po C
    - A vejde hned po B právě tehdy, když F vejde jako poslední
    - Součet pořadí vstupu A a B musí být 7
    - E vejde po A
    - A vejde před B právě tehdy, když 4 dělí součet pořadí E a D

    Najděte všechna možná pořadí, ve kterých můžou vstoupit. Sečtěte pořadí A ve všech řešeních, totéž pro B, C, D, E, F a výsledek zadejte jako součin těchto šesti čísel.

12. **Protivná funkce:** Pro každé přirozené číslo s prvočíselným rozkladem $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, kde $a_1, a_2, \dots, a_k \geq 1$, definujme funkci splňující $\hat{\text{log}}(n) = p_1 a_1 p_2 a_2 \dots p_k a_k$ a $\hat{\text{log}}(1) = 1$. Určete nejvyšší prvočíslo, které dělí
$$\sum_{d|N} \hat{\text{log}}(d)$$
pro $N = 2^{69} 3^{69} 11^{420} 7^{1492}$.

13. **Lidobodi:** Jenda a Čenda jsou lidobodi a nejlepší kamarádi. Oba dva žijí na stejném jednotkovém čtverci, tedy se můžou pohybovat jen po stranách tohoto čtverce, a oba dva mají na tomto čtverci svůj dům, přičemž jejich domy jsou také body. Jenda zjistil, že když se k Čendovi vydá ze svého domu jedním směrem, bude cesta mít $\frac{2}{3}$ délky cesty, která vede z jeho domu k Čendovi druhým směrem. Jaká je největší přímá vzdálenost, ve které se domy kamarádů mohou nacházet?

14. **Přelidněný ostrov:** Na ostrově žije 200 100 050 025 domorodců, každý z nich buď mluví pravdu, nebo lže. Milan každému z nich přiřadil číslo: prvnímu jedničku, druhému dvojku atd. Každý domorodec pak řekl: „Všichni, kdo mají menší číslo než já, lžou, kromě k z nich, kde k je počet nul v desítkovém zápisu mého čísla.“ Kolik z nich mluví pravdu?

15. **Vtipný trojúhelníčky:** Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s celými délkami stran $|AB| > |AC| > |BC|$ a obsahem nejvýše 100, pro které lze číslo $\tan(|\sphericalangle BAC|)$ vyjádřit jako podíl dvou přirozených čísel lišících se o 7. Jako řešení zadejte součet všech obvodů těchto trojúhelníků.

Mathrace Sada 2

odevzdávejte do 18.00

16. **Zrádný poměr:** V kartézské souřadné soustavě je dán trojúhelník s vrcholem A v bodě $[0,0]$, vrcholem B v bodě $[1,0]$ a vrcholem C v bodě $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$. Nalezněte vnitřní bod X tohoto trojúhelníka takový, že obsahy trojúhelníků ACX, ABX a BCX budou v poměru $1:2:3$. Jako výsledek zadejte součin x-ové a y-ové souřadnice bodu X.

17. **Posloupnosti k nakousnutí:** Definujme posloupnosti $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ tak, že $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}$, $b_1 = 1, b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pro každé $n \geq 1$ platí

$$a_{n+2} = a_{n+1}b_n + b_{n+1}a_n, \qquad b_{n+2} = b_{n+1}b_n - a_{n+1}a_n.$$

Pro $N = 3^{58} \cdot 10$ určete $a_N + 2b_N$.

18. **Pravděpodobná přátelství:** Na Přírodovědecké fakultě se koná zahradní párty od 14:00 do 18:00. David by rád potkal svých 5 kamarádek: Anetu, Bereniku, Cecílii, Danielu a Emmu. Bohužel ale může na párty být pouze od 16:00 do 17:00. Každá dívka si rovnoměrně náhodně zvolila časy t_1 a t_2 z intervalu 14:00 a 18:00, přišla v dřívějším z těchto náhodně zvolených časů a odešla v pozdějším. Jaká je pravděpodobnost, že David potkal alespoň jednu z nich?

19. **Desetimístné číslo:** Představme si desetimístné číslo, kde první číslice udává počet nul v čísle, druhá počet jedniček apod. Najděte nejmenší takové číslo.

20. **Zábava se soustavami:** V osmnáctkové soustavě řešte následující rovnici pro cifry $a, b, c, d \in \{0, 1, \ldots, 17\}$:

$$\overline{ab}_{18} \cdot \overline{ba}_{18} = \overline{cdcd}_{18}.$$

Jako odpověď zadejte součet všech možných různých hodnot $\overline{cdcd}_{18}$ v desítkové soustavě.

21. **Součiničetitel:** Vojta má množinu $M = \{a, b, c\}$ tří přirozených čísel. Rozhodl se, že spočítá její součiničetitel jako $S = abc(a+b)(a+c)(b+c)(a+b+c)$. Když to Marťa uviděl, tak zakřičel: "HAHAHA, je ti ale jasný, že každej ví, že součiničetitel tvý množiny je dělitelnej přirozeným číslem k?" Jaké největší k mohl Marťa zakřičet, aby jeho tvrzení bylo pravdivé pro každou M?

22. **Závodník:** Závodník běží na okruhu délky 290 metrů první kolo, když tu uvidí lišáka a zeptá se ho, na kolikátém metru se nachází (jedná se o celé číslo). Lišák odpoví: „Až uběhneš od místa, kde se momentálně nacházíš, šestkrát tolik, kolik jsi zatím uběhl, budeš na 50. metru.“ Na kolikátém metru se závodník nachází?

23. **Komplexní rovnice:** Přirozené číslo n nazveme "husťácké a drsné", pokud existuje komplexní číslo x s absolutní hodnotou 1 splňující

$$x^n + 2x^{n-1} + 3x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Kolik existuje husťáckých a drsných čísel, která jsou nejvýše 2022?

24. **O čtyřech vrcholech:** Mějme v rovině čtyři body A, B, C, D, které tvoří tětivový čtyřúhelník takový, že polopřímky AD, BC mají průnik. Platí $|AB| = 1, |\sphericalangle CAB| = \left(\frac{1}{2022}\right)^\circ$ a $|\sphericalangle DBA| = \left(\frac{20219}{2022}\right)^\circ$. Dále označme průsečík polopřímek AD a BC jako E. Nechť $|\sphericalangle AEB| = 10^\circ$. Určete velikost poloměru kružnice opsané bodům A, B, C, D.

25. **Glogloglo:** Určete hodnotu výrazu

$$\left(2022^{2022}\right)! \cdot \log_2(\sqrt{2022}) \cdot \prod_{n=3}^{2022^{2022}} \prod_{k=n}^{n^n} \log_k(k-1)$$

26. **Osud:** Luke napsal na tabuli čísla $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2023}$. Mia pak provádí následující proces: V každém kroku vybere dvě z čísel a, b právě na tabuli, smaže je a místo nich napíše číslo $ab + a + b$. Takto postupuje, až dokud na tabuli nezbyde jediné číslo. Ať $\frac{p}{q}$ je v základním tvaru nejvyšší možná hodnota, kterou může Mia na tabuli napsat. Jaká je hodnota $p + q$?

27. **Prvočíselné sudoku:** Do mřížky 5x5 jsou rozmístěna čísla 2, 3, 5, 7, 11 tak, že v každém řádku i sloupci je každé právě jednou. Dále platí, že čtverec 2x2 v levém horním rohu má součet 10, čtverec 2x2 v pravém horním rohu má součet 28, čtverec 2x2 v pravém dolním rohu má součet 19 a čtverec 3x3 přímo uprostřed (tj. nedotýká se okraje mřížky) obsahuje číslo 11 tolikrát, kolik je číslo v jeho středu. Určete spodní řádek mřížky; zapište jej jako šesticiferné číslo, podle jeho obsahu čteného zleva doprava.

28. **Hromada polynomů:** Polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ lze napsat jako součet 1012 normovaných polynomů s kořeny právě $1, 2, ..., 2022$ (každé z těchto čísel je kořenem právě jednou). Určete největší možný součet $a + b + c$.

29. **Vzdálenosti:** Kouma dal Ňoumovi k narozeninám čtyřrozměrnou krychli s délkou strany 1. Jaká je průměrná vzdálenost dvou jejích různých vrcholů?

30. **Ovčáci čtveráci:** Čtyři bratři našli kouzelnou studnu. Když se do ní hodí k zlatých mincí, dostanou jich zpátky k^4. Má to ale háček: ze získaných mincí je potřeba vrátit právě jednu zpět do studny a zbytek rozdělit rovným dílem mezi všechny lidi, kteří se u studny zrovna nachází, jinak všechny mince zmizí. Studnu nelze použít opakovaně.

    Bratři se začali dohadovat, s kým vším se rozdělí - každý chtěl mezi ně přibrat jiný nenulový počet lidí. Shodli se ovšem na tom, že pro návrh každého bratra platí: Nechť a je počet dílů, na které nabyté jmění rozdělí (tedy nechť se u studny nachází a lidí, kde $a > 4$). Pak existují právě čtyři přirozená čísla menší než a, která jsou s a nesoudělná.

    Určete největší počet mincí, které mohli do studny hodit, aby se mohli řídit návrhem libovolného bratra a mince nezmizely. Bratři mají k dispozici 66 zlatých mincí.

Mathrace Sada 3

odevzdávejte do 19.00

31. **Super součet:** Označme $\mathcal{A}_n$ množinu všech konečných posloupností $a_1, a_2, \ldots, a_n$ délky právě n, kde $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Pro posloupnost $A : (a_i)_{i=1}^n \in \mathcal{A}_n$ označme její "super součet"jako

$$s(A) = 1 + a_1 + a_1a_2 + \ldots + a_1a_2 \cdots a_n.$$

Kuba si zvolí $n \in \mathbb{N}$ a poté náhodně vybere posloupnost $A \in \mathcal{A}_n$. Označme $P_n(A)$ pravděpodobnost, že super součet posloupnosti A je sudý. Ke kterému číslu se bude $P_n(A)$ přibližovat, pokud bude Kuba volit větší a větší n?

32. **Žijeme sportem:** V databázi "Vše O Fotbale" najdeme u každého týmu mimo jiné údaj "Výhernost", který udává poměr všech dosud vyhraných zápasů ku celkovému počtu odehraných zápasů daného týmu počítáno kumulativně přes všechny odehrané sezóny. Určete nejmenší počet zápasů, které mohl tým během čtrnácti sezón odehrát, jestliže začal hrát v první sezóně a po první sezóně měl výhernost přesně 5%, po druhé 10%, po n-té přesně n·5%, po poslední přesně 70%. Tým může ve dvou sezonách odehrát různý počet zápasů.

33. **Zábava s tiskárnou:** Kouma si pořídil 3D tiskárnu. Vytiskl si pravidelný čtyřstěn s délkou hrany 1 cm. Všiml si, že když si vybere nějaký roh čtyřstěnu a na všech třech hranách z něj vedoucích vyznačí čárku ve vzdálenosti $k \cdot 1$ cm, tyto tři nové čárky s původním vrcholem vytvoří nový čtyřstěn s délkou hrany k. Tento nový čtyřstěn označil za rohový a vytiskl si 4 nové rohové čtyřstěny, jeden za každý roh původního čtyřstěnu. Tento proces opakoval do nekonečna pro každý nový čtyřstěn, který si vytiskl, tedy například pro každý rohový čtyřstěn s délkou strany k si vytiskl 4 nové s délkou strany $k \cdot k$ a tak dál. Všiml si, že ho to stálo celkem $\frac{9\sqrt{2}}{106}$ cm^3 materiálu. Jaké si zvolil k?

34. **Zacyklené cyklostezky:** Starosta Brkolandu pověřil Koumu s Ňoumou stavbou moderního systému cyklostezek propojujícího všech 10 měst, které se v Brkolandu nachází. Starosta požaduje, aby se pomocí tohoto systému dalo z libovolného města dostat do libovolného jiného města. Dále chce, aby systém cyklostezek obsahoval právě jednu kružnici, a to délky 5. To znamená, že bude existovat právě jedna pětice měst například A, B, C, D, E, kde existuje cyklostezka mezi A a B, B a C, C a D, D a E, E a A a nebude existovat žádná jiná trojice, čtveřice, pětice, šestice, sedmice, osmice, devítice ani desetice měst s touto vlastností. Kolika způsoby mohli Kouma s Ňoumou tuto síť postavit? Každá cyklostezka je obousměrná.

35. **Zahradní posloupnost:** Terka a Tonda našli na zahradě tři kladná celá čísla a, b a k. S nimi Terka zavedla aritmetickou posloupnost $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ s diferencí k a $a_1 = a$ a Tonda si vytvořil geometrickou posloupnost $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ s kvocientem k a $b_1 = b$. Všimli si, že součet prvních čtyř členů Terčiny posloupnosti je 102 a součet prvních čtyř členů Tondovy posloupnosti je 400. Zadejte součet všech možných součinů a_5b_5.

36. **Konečně geometrie!** Kuba si nakreslil na zem tečnový čtyřúhelník $ABCD$, jehož strana AB má délku 16 a kružnice vepsaná k má střed I. Pak přišel Kuba a protl úsečky BI,CI,DI s k v bodech po řadě B_0, C_0, D_0.

Tečna v bodě B_0 ke k protíná strany AB, BC po řadě v bodech B_1, B_2. Obdobně tečna v C_0 protíná strany BC, CD v bodech C_1, C_2 a tečna v D_0 protíná strany CD, DA v bodech D_1, D_2. Kubové si pak všimli, že obvody trojúhelníků BB_1B_2, CC_1C_2 a DD_1D_2 jsou po řadě 17, 20 a 13. Jak dlouhá je strana AD?

37. **Rozbitá světýlka:** Viktorka našla v dědově garáži 2022 zhasnutých světýlek, ke kterým je připojeno 2022 vypínačů. Děda Viktorce řekl pouze to, že každý vypínač změní stav nějaké podmnožiny všech světýlek (klidně i prázdné), tedy rozsvítí zhasnutá a zhasne rozsvícená světýlka z této podmnožiny. Na nic dalšího si už nevzpomněl. Určete, jaká je pravděpodobnost, že pomocí těchto vypínačů bude Viktorka schopna rozsvítit jakoukoliv podmnožinu světýlek, kterou si zamane. Předpokládejte, že každý vypínač může rozsvítit libovolnou podmnožinu se stejnou pravděpodobností. **Odpovězte, jako kdyby byl výsledek iracionální číslo.**

38. **Zoufalé rozvody:** 300 ženatých kamarádů se chce co nejrychleji rozvést. Jsou čtyři možnosti, jak se dá rozvést: u soudu, dopisem, přes portál občana a u notáře.

    - Napsání dopisu je náročné, a tak s tím každý muž potřebuje pomoc jednoho dalšího kamaráda a dohromady jim to zabere jeden den. Pošta je navíc pomalá, a tak může být odesláno jen deset dopisů denně.
    - Jedno zasedání soudu trvá týden a může rozvést až 4 páry: každý rozváděný muž ale potřebuje dva svědky (všichni tři musí u soudu strávit celý týden, nikdo nemůže být svědkem dvou rozvodů najednou). Může zasedat až 10 soudů najednou (zasedání může začít kdykoli, ale pokud zasedání začne s méně než čtyřmi páry, nemůže se k němu další pár přidat).
    - Rozvést se přes portál občana zabere 1 den a není k tomu potřeba pomoc, ale ovládat ho umí pouze 130 mužů (každý musí rozvést sám sebe).
    - Notář může rozvést 9 mužů denně, ale pouze tehdy, když probíhá 40 rozvodů u soudů.
    - Nikdo nemůže dělat více činností najednou (činnosti jsou: psaní dopisu (svého i výpomoc), přítomnost u soudu (i jako svěděk), práce s portálem občana, setkání s notářem).

    Kolik nejméně potřebují kamarádi dnů, aby se všichni rozvedli?

39. **Miluju kružnice:** V rovině jsou dány 3 kružnice s poloměry r, s, t, které se všechny navzájem dotýkají, tedy každá dvojice těchto kružnic má právě jeden společný bod. Nalezněte úhel v radiánech, který svírá střed kružnice s poloměrem t se středy zbylých dvou kružnic, jestliže platí $r+s+t = \frac{2rs}{t}$.

40. **Dělitelé:** Definujme zobrazení $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ následovně: Nechť m, n jsou přirozená čísla. Poté je $f(m, n)$ rovno nule, pokud jsou m, n nesoudělná, v opačném případě je $f(m, n) = \frac{1}{nsd(m,n)}$. Určete hodnotu výrazu
$$\left\lfloor \sum_{i=1}^{2^{32}-1} f(i, 2^{32}) \right\rfloor$$

41. **Schody:** Vítek má před sebou 10 schodů. Jelikož má dlouhé nohy, může udělat krok o jeden, dva nebo dokonce tři schody. Kolika způsoby může Vítek zdolat schody?

42. **Převrácená prvočísla:** Eris hraje následující hru. Na papír píše v libovolném pořadí jedno po druhém racionální čísla z intervalu (0,1), která jsou v základním tvaru a jejich jmenovatel je menší nebo roven číslu N, určenému před začátkem hry. Kdykoliv napíše číslo, které s žádným číslem dosud zapsaným nemá rozdíl tvaru $\left(\frac{1}{\text{prvočíslo}}\right)$, přičte si bod. Určete minimální součet bodů, které Eris získala z her pro $N = 20$ a $N = 22$.

43. **Triangl:** Mějme čtverec s vrcholy A, B, C, D. Zvolme rovnoměrně náhodně jeden bod na straně AB a označme ho X, rovnoměrně náhodně jeden bod na straně CD a označme ho Y. Dále označme střed úsečky BC jako Z. Jaká je pravděpodobnost, že trojúhelník XYZ má tupý úhel u vrcholu Z?

44. **Šatna:** Patnáct nahých, naprosto identických lidí vejde do šatny, v níž je:

- 5 modrých, 5 zelených a 5 červených triček,
- 4 černé, 7 modrých a 4 růžové kalhoty,
- 2 zelené, 10 černých a 3 žluté klobouky.

Každý si oblékne právě jedno tričko, jedny kalhoty a jeden klobouk (zároveň se nemůže více lidí obléct do téhož kusu oblečení). Následně počítají, kolik různých řad patnácti lidí můžou vytvořit. Kolik napočítají, pokud se oblékli tak, aby tento počet byl co nejmenší?

45. **Slavný návrat:** Nechť f je zobrazení z množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ do množiny $\{1, 2\}$ zadané předpisem:

$$f(1) = f(2) = 1,$$

$$f(3) = f(4) = 2.$$

Kolik existuje dvojic (g, h) zobrazení $g\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ a zobrazení $h\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2\}$ takových, že f se dá napsat jako složení $f(x) = h(g(x))$?