Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.00

Pokud je řešením počet nějakých objektů a správná odpověď je nekonečno, napište „inf“. Pokud je řešením racionální necelé číslo, napište jej jako zlomek v základním tvaru (např. 5/7, *ale ne* 4/6*). Pokud je řešením iracionální číslo, napište jej v desetinném zápisu s tečkou zaokrouhleno na 5 desetinných míst (např.* 5.55579846 ... *jako* 5.55580*).*

1. **Brněnské hradby:** V roce 2093 se znovu začaly stavět Brněnské hradby. Extravagantní architekt navrhl stavbu ve tvaru pravidelného 2021-úhelníku s délkou strany 8 metrů. Bylo ovšem navíc potřeba ohradit oblast bývalého Hlavního nádraží, ze které se v té době stalo zvrhlé a divoké území nepřístupné běžným lidem. Proto kolem něj architekt postavil trojúhelník následujícím způsobem: nechť A, B, C jsou tři po sobě jdoucí body pravidelného 2021-úhelníka. Uvažujme body X, Z ležící na polopřímkách opačných k polopřímkám $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}$. Navíc délka $|BX|$ je rovna (v metrech) roku, kdy se Brno za třicetileté války podruhé ubránilo švédskému obléhání, a délka $|CZ|$ je rovna (v metrech) roku, kdy Josef II. trvale přiznal Brnu status hlavního moravského města.

   Jaká je v metrech vzdálenost $|XZ|$?

2. **Kolik je Davidovi?** Anně je třikrát tolik co Báře. Za dvacet let bude Anně polovina toho, co tou dobou Čendovi. David je o čtyři roky mladší než Čenda, a je mu desetkrát tolik co Báře. Kolik bude Davidovi za dvacet let?

3. **Korálky:** Mějme 2021 dětí bydlících v domech s čísly 1 až 2021 (v každém domě bydlí právě jedno). Kolika způsoby můžeme mezi tyto děti rozdělit 2021 nerozlišitelných korálků za podmínky, že pokud dítě v nějakém domě nedostane žádný korálek, tak už žádný korálek nedostane ani žádné dítě v domě s libovolným vyšším číslem. Jako odpověď zadejte poslední dvojčíslí daného čísla.

4. **Potká Jan Annu?** Janovi se Anna líbí a on se rozhodl, že ji konečně pozve na rande. Má k tomu ideální příležitost, protože je neděle a on ví, že Anna chodí v neděli ráda do parku. Když svítí sluníčko, vydá se tam s pravděpodobností $3/4$, když je zataženo tak s pravděpodobností $1/2$ a když prší, tak pouze s pravděpodobností $1/10$. O zítřejší předpovědi víte následující: s pravděpodobností 50 % bude svítit slunce, s 30% bude zataženo a s 20% pravděpodobností bude pršet. Pokud půjde Anna do parku, potkají se. S jakou pravděpodobností se Jan s Annou setká?

5. **Na krychli:** Uprostřed jedné hrany krychle se nachází Kouma s Ňoumou. Ňouma se vydal na výlet po hranách krychle. Každé dvě po sobě jdoucí hrany v jeho výletu spolu sdílely vrchol. Celkem udělal pět skoků z hrany na hranu, přičemž žádné dva skoky nekončily na stejné hraně. Kolik takových výletů bylo možných, pokud víme, že skončil opět na hraně, kde stojí Kouma?

6. **Grill party:** Šest přátel (Adam, Bertík, Cyril, David, Emil a Filip) chce uspořádat Grill party. Mají 6 židlí rovnoměrně rozprostřených kolem stolu (očíslujme je 1-6) a jeden grill. Grill se nachází mezi židlemi s čísly 1 a 2 a dosáhnout se na něj dá jen z těchto dvou židlí. Kouři z grillu jsou vystaveny pouze tyto dvě židle. Kolik je možností, jak si mohou kolem stolu sednout, pokud mají platit následující podmínky?

   - Jenom Bertík je expert na grilování, takže musí sedět hned vedle grillu.
   - Cyril s Bertíkem chtějí sedět vedle sebe.

- Adam s Emilem chtějí sedět vedle sebe.
- Cyril ani David nechtějí sedět v kouři.
- Bertík nechce sedět ani vedle Emila, ani vedle Filipa.
- Emil nechce sedět naproti Cyrilovi.

7. **Rozdíl:** Pro každé přirozené n označme $V(n)$ následující součet:

$$V(n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor.$$

Najděte nejmenší přirozené x takové, že $V(x+1) - V(x) = 2021$. Jako odpověď zadejte číslo, které vznikne tak, že rozložíte číslo $x+1$ na prvočísla a sečtete všechny exponenty, které se v rozkladu vyskytují.

8. **Semafor:** Když k semaforu přijde chodec a je zelená, okamžitě přejde na druhou stranu silnice, a když je červená, tak čeká, dokud se semafor nepřepne na zelenou, a pak přejde. Na semaforu je vždy 55 sekund červená, pak 5 sekund zelená, pak opět 55 sekund červená atd. V každém z těchto minutových cyklů přijdou k semaforu přesně dva chodci, oba v náhodné, na sobě nezávislé okamžiky (pro každý interval délky k sekund je pravděpodobnost, že chodec přijde někdy v tomto intervalu, $k/60$). Když Sam přišel k semaforu, byla červená a už tam čekal Čeněk. Jaká je pravděpodobnost, že Sam musel čekat víc než 10 sekund?

9. **Euclidea:** Hloupětínský mudrc Neuklides se živí prodáváním geometrických operací v rovině.

   - Body rozdává zdarma, avšak je povoleno je umístit pouze na průsečíky již zakoupených objektů.
   - Dva určené body spojí přímkou za 1 Hloupar.
   - Kružnici kolem daného bodu procházející jiným daným bodem sestrojí za 10 Hlouparů.

   Bubla přišla za Neuklidem se čtyřmi body udávající čtverec o straně a (však beze stran) a potřebovala narýsovat čtyři přímky vymezující čtverec o straně $2a$. Kolik nejméně Hlouparů musela utratit? Jiné operace než ty Neuklidovy nejsou povoleny.

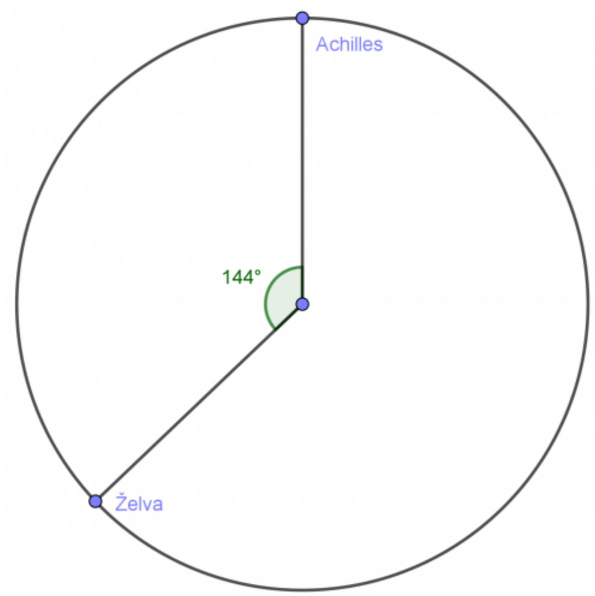
10. **Divoká funkce:** Neznámá funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ splňuje následující dvě vlastnosti pro každé a a b: $f(ab) = f(a) + f(b)$ a $f(a) < a$. Jaká je nejvyšší možná hodnota $f(8!)$? ($\mathbb{N}_0$ je množina všech přirozených čísel a nuly.)

11. **L jako lehké, L jako lichoběžník:** Máme tětivový lichoběžník $ABCD$. Víme, že velikost úhlu ABC je $63°$ a velikost úhlu DAC činí $21°$. Označme si průsečík úhlopříček v našem lichoběžníku jako S. Kolik stupňů měří úhel BSC?

12. **Šlunce, Žemě a Mněšíc:** Šluneční soustava je podobná té naší, sluneční soustavě – Žemě obíhá kolem Šlunce a Mněšíc kolem Žemě, ale Mněšíc je ve dvakrát větší vzdálenosti od Žemě než Žemě od Šlunce. Mněšíc oběhne celou Žemi za jeden mněšíc, Žemě oběhne Šlunce za dvanáct mněšíců. Mněšíc obíhá Žemi po směru hodinových ručiček, zatímco Žemě obíhá Šlunce proti směru. Kolikrát za dvanáct mněšíců tvoří Žemě, Mněšíc a Šlunce pravoúhlý trojúhelník?

13. **Injektivní polynom:** Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je prostá funkce daná předpisem $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Najděte nejmenší možnou hodnotu výrazu $\frac{1}{a^2} + b$.

14. **Ach, žel...** Achilles a želva se pohybují po kružnici o poloměru $\frac{1}{2\pi}$ metrů; želva jde stálou rychlostí $\frac{1}{5}$ m/s proti směru hodinových ručiček (pr. h.). Achilles běží zprvu rychlostí $\frac{2}{5}$ m/s pr. h., ale po každé sekundě se jeho rychlost sníží na polovinu, tj. první sekundu běží $\frac{2}{5}$ m/s, druhou sekundu $\frac{1}{5}$ m/s atd. Počáteční poloha Achilla i želvy je vidět na obrázku. Určete čas v sekundách, kdy se Achilles a želva poprvé setkají.



15. **Čtverce z papíru:** Honzík si stříhá čtverce z papíru A4. Vždy odstřihne jediným rovným řezem čtverec, jehož délka strany (a tedy strana samotná) je stejná jako kratší strana papíru. Pokračuje se zbytkem papíru bez odstřiženého čtverce, dokud mu vznikají obdélníky (pokud rozstřižením vzniknou dva čtverce, končí). Kolik čtverců takto získá? Pozn.: papír A4 má rozměry 297 x 210 mm.

16. **Vzájemná dominance:** 2021 týmu hraje turnaj, v němž se každý s každým utká právě jednou. Řekneme, že trojice týmu A, B, C je ve *vzájemné dominanci*, pokud A porazil B, B porazil C a C porazil A. Předpokládejme, že mezi týmy jsou BRKOSTEAM a aMATHéři. Víme, že počet trojic, které jsou ve vzájemné dominanci a obsahují BRKOSTEAM je maximální možný. Kolik nejvíce může existovat trojic, které jsou ve vzájemné dominanci a obsahují aMATHéry?

17. **Hodnota Brkosu:** Na obrázku je daná jednoduchá rovnice: ŠOKY+BRNO=BRKOS. Nahraďte písmena ciframi, kde dvě rozdílná písmena představují různé cifry. Jakou hodnotu má Brkos? (Pozn.: S a Š jsou rozdílná písmena.)

$$\begin{array}{ccccc} & \text{Š} & \text{O} & \text{K} & \text{Y} \\ & \text{B} & \text{R} & \text{N} & \text{O} \\ \hline \text{B} & \text{R} & \text{K} & \text{O} & \text{S} \end{array}$$

18. **Tětiváček:** Tětivový čtyřúhelník $ABCD$ splňuje $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle ADB|$, $|AB| = 13$, $|BC| = 4$ a $|AD| = 14$. Určete velikost úsečky AC.

19. **Milionový příklad:** Máme přirozené číslo n, jehož součet dělitelů je menší než třicet milionů. Určete, kolik nejvýše prvočísel může dělit n.

20. **Dívčí válka:** Na nekonečné šachovnici je $m \in \mathbb{N}$ dam tak, že každá z nich ohrožuje alespoň $\lceil \frac{m}{2021} \rceil$ ostatních dam. Najděte největší takové m, pro které tato situace může nastat. Zápis $\lceil x \rceil$ značí horní celou část z čísla x. Dámy se ohrožují, pokud by se ohrožovaly v klasické hře šachu.

21. **Oboustranná pyramida:** Nechť $n \in \mathbb{N}$. Z kostek (krychlí) o délce hrany 1 stavíme n-pyramidu. Základna n-pyramidy má tvar čtverce a je složená z $n \times n$ kostek. Nad základnou je nadzemní část, která se skládá ze čtvercových pater. Každé další patro má hranu o 1 kratší než to předchozí (první patro má hranu délky $n - 1$). Pod základnou je podzemní část, která vypadá stejně, jako ta nadzemní. Výška pyramidy se počítá jako počet pater (nadzemních i podzemních + 1 (základna)). Kolik kostek je potřeba k postavení pyramidy výšky 99?

22. **Dlouhá suma:** Určete hodnotu $\sum_{n=1}^{20212021!} \cos(\frac{2n\pi}{2\cdot 20212021!+1})$.

23. **Fredovy půlkružnice:** Žabák Fred stojí na krajnici silnice široké 4 metry a potřebuje přeskákat na druhou stranu. Trajektorie každého jeho skoku má tvar půlkružnice a vždy skáče pouze směrem dopředu. Nazvěme „pozemskou délku skoku“ jako vzdálenost místa odrazu a místa dopadu; dále pak „délku trajektorie skoku“ jako délku půlkružnice, kterou Fred skáče. Jak velké skoky bude Fred dělat, závisí na různých faktorech.

- První Fredův skok má pozemskou délku 2 metry.
- Pozemská délka každého dalšího skoku je definována takto:
  - pokud Fredův skok je (pozemsky) kratší než 30 centimetrů, jeho další skok bude mít pozemskou délku stejnou, jako třetina délky trajektorie předchozího skoku;
  - jinak má jeho skok pozemskou délku poloviční, než pozemská délka předchozího kroku.
- Pokud by měl Fred přeskočit přes hranici cesty, neudělá to a skočí raději menší skok tak, aby dopadl přímo na hranici cesty.

Jaký je součet (v metrech) délek trajektorií všech Fredových skoků při přeskakování této silnice?

24. **Vítek, Tom, Tom a Tom:** Vítek, Tom, Tom a Tom hrají hru. Všichni čtyři stojí v kruhu a střídají se v házení kostkou. Hráč, který je právě na tahu, vždy vyzývá hráče po své levici. Oba hodí šestistennou kostkou. V případě remízy házou znovu a to do té doby, dokud jeden nezvítězí. Pokud vyhrál vyzyvatel, stává se vítezem celé hry a hra končí. V opačném případě se vyzvaný hráč stává novým vyzyvatelem a opět hraje s hráčem po své levici. Prvním vyzyvatelem je Vítek. Jaká je pravděpodobnost, že se stane absolutním výhercem hry?

25. **Součet kořenů:** Mějme normovaný polynom P(x) stupně 42, který má 42 celočíselných kořenů (každý počítán tolikrát, jaká je jeho násobnost) a platí P(0)=97. Jaké nejmenší kladné hodnoty může nabývat součet všech jeho kořenů?

26. **Klobouk:** Petr a Lucka vyvíjejí následující aktivitu. Petr na stůl vyskládal jednokoruny, dvoukoruny, pětikoruny a desetikoruny na hromádky, na každé hromádce je v součtu hodnota 11 korun a každá možná kombinace mincí, která dá v součtu 11, je zastoupena právě jednou. Každou z hromádek pak smete do vlastního pytlíku a tyto pytlíky umístí do klobouku. Lucka pak naslepo vytáhne právě jeden z pytlíků a po jedné postupně mince vytahuje. Jaká je pravděpodobnost, že poslední vytažená mince bude desetikoruna?

27. **Doodle:** Deset lidí hlasuje o termínu srazu. K dispozici je osm termínů. Každý z hlasujících dal primární hlas třem termínům a sekundární hlas dvěma. Každému termínu smí dát nanejvýš jeden hlas. Zvolen bude ten termín, jenž bude mít nejvíce primárních hlasů, v případě shody rozhodnou hlasy sekundární (v případě trvající shody je vybrán jeden z vítězných termínů). Označme počet primárních hlasů vítězného termínu p, a počet sekundárních hlasů vítězného termínu s. Určete nejmenší možnou hodnotu tohoto výrazu: $17p + 2s$.

28. **Už zase geometrie:** Je dána kružnice k. Body L a M vytnou na kružnici k tětivu délky 28. Kružnice l a m mají vnitřní dotyk s kružnicí k v bodech L a M, přičemž kružnice l a m mají menší poloměr, než k. Na kružnicích l a m jsme zvolili body A a B takové, že existuje Bod C ležící v průniku úseček AB a LM. Jaká je největší možná hodnota $|AC| \cdot |BC|$?

29. **Šneci na mřížce:** Na šachovnici 2021x2021 (sloupce a řádky jsou indexovány 1-2021) se uprostřed každého pole nachází šnek (uvažujme bod). Každý šnek se pohybuje rovnoměrným pohybem rychlostí jedno pole za minutu jedním ze čtyř základních směrů. Na začátku se šnek začínající na souřadnici $[i, j]$ pohybuje ve směru závislém na zbytku čísla $i + j$ po dělení 4: 0-nahoru, 1-dolů, 2-doleva, 3-doprava. V tomto směru pokračuje, dokud nenarazí do jiného šneka. Pokud se střetnou dva šneci, odrazí se od sebe následujícím způsobem. Pokud směřovali přímo proti sobě, každý z nich se otočí o 180° vzad a pokračuje dál. Pokud se střetnou pod úhlem 90°, každý z nich se otočí o 90° směrem od toho druhého a pokračují dál. Pokud se srazí 4 šneci ze 4 směrů, každý se otočí o 180° vzad a pokračuje. V případě srážky tří šneků se vzad otočí pouze dva šneci, kteří šli proti sobě a třetí pokračuje dál. Po kolika minutách poslední šnek opustí poslední hrací pole šachovnice?

30. **Zmrzlina:** V Hloupětíně je vyhlášený italský zmrzlinář. Jeho zmrzlina se skládá z koule o poloměru 5 cm a kornoutu ve tvaru kužele, který se koule dotýká (tzn. povrchové úsečky kužele jsou tečny ke kouli, které začínají ve vrcholu kužele a končí v bodě dotyku. Základna kužele je pak kruh vymezen dotykovou kružnicí). Výška celé zmrzliny je 18 cm. Určete objem kužele vymezeného kornoutem.

Mathrace Sada 3

odevzdávejte do 19.00

31. **Záře nad n-úhelníkem:** Uvažujme pravidelný 2021-úhelník s délkou strany rovnou jedné. Nechť A, B, C, D, E je libovolných 5 po sobě jdoucích vrcholů. Označme průsečík přímek AB a DE jako X. Jaká je délka úsečky CX?

32. **Potká Anna Janu?** Anna stojí na pozici [0, 0] a dívá se na sever, zatímco Jana na pozici [1, 2021] a dívá se též na sever. Máme speciální telefon, kterým můžeme dávat Anně a Janě soubor instrukcí pro to, aby se potkaly. Jedna instrukce zní vždy „<jméno> <povel>“, kde <jméno> je buď Anna či Jana a <povel> je buď Left (otoč se doleva o 90 stupňů), Right (otoč se doprava o 90 stupňů), anebo Forward (jdi o jeden krok dopředu). Telefonní zařízení je však rozbité a když dáme dívkám celý soubor instrukcí, bude se tento soubor opakovat stále dokola.

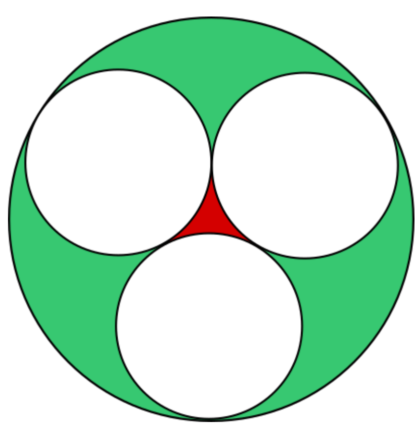
    Například, pokud soubor instrukcí bude „Anna Forward, Anna Forward, Jana Left“, Anna udělá krok dopředu na pozici [0, 1], poté druhý krok na [0, 2] a Jana se otočí na západ. Poté Anna udělá další dva kroky dopředu na pozici [0, 4] a Jana udělá otočku na jih, atd. Po dalších 1010 cyklech Anna projde kolem Jany, ale nebudou nikdy stát na stejném políčku, takže se nepotkají. Počet instrukcí v takovém souboru je 3.

    Jaký je nejmenší počet instrukcí, které dívkám máme dát v souboru instrukcí tak, aby se ve stejnou chvíli potkaly na stejném políčku?

33. **Copak jmelí, ale kostka!** Kolikrát nejméně musíme hodit dvanáctistěnnou kostkou (s čísly 1-12), abychom hodili alespoň jednu dvanáctku s pravděpodobností alespoň $1/2$?

34. **Pirátský poklad:** Skupina pirátů objevila poklad tvořený sedmi druhy drahokamů. Kapitán přemýšlel, jak poklad rozdělit, a tak každého člena své posádky požádal, aby seřadil druhy drahokamů od toho, kterého si cení nejvíce, po ten, kterého si cení nejméně. Každý pirát tak udělil 1 až 7 bodů (čím víc tím líp) každému druhu (každému jiný počet). Kapitán si všiml, že každý pirát uvedl jiné pořadí. Poté všechny tyto body sečetl a získal tak sedm hodnot, pro každý druh jednu. Všiml si, že mezi těmito sedmi hodnotami je přesně šest různých (dva druhy tedy mají stejné skóre). Dále si všiml, že pokud by kterýkoli pirát zemřel a jím udělené body by se odečetly, tak by byla každá z nových hodnot jiná. Kolik bylo pirátů? Uveďte nejvyšší možnou hodnotu.

35. **Obsah plochy:** Na obrázku se nachází tři kružnice s poloměrem 1, které se navzájem dotýkají, a jedna kružnice, která se dotýká každé z nich. Jaký je poměr obsahů zelené a červené oblasti?



36. **Ples:** Vojenského plesu se účastní 2^{2021} důstojníků a 2^{2021} důstojnic. Každý důstojník má jinou úroveň od 1 do 2^{2021} a to samé platí pro důstojnice. Pokud se potká náhodný důstojník s důstojnicí a rozdíl jejich úrovní je nejvýše 2^{2020}, mají pravděpodobnost $1 - \frac{R}{2^{2020}}$, že spolu budou tančit, kde R je absolutní hodnota rozdílu jejich úrovní. Pokud je rozdíl jejich úrovní větší, určitě spolu tančit nebudou. Jaká je pravděpodobnost, že náhodný důstojník bude tančit s náhodnou důstojnicí? **Odpovězte, jako by byl výsledek iracionální číslo**.

37. **Hydrant:** Janča bojuje s hydrou. Jako každá správná hydra měla na začátku sedm hlav, označených 1, 2, ... 7; a vždycky, když jí jednu z hlav usekla, vyrašily z krku dvě nové hlavy. Tyto hlavy si Janča označila podle klíče **předchozí | nová** , kde *předchozí* je jméno hlavy, kterou usekla, a *nová* je jedno z čísel 1, 2. Tedy když usekne hlavu 1|2, na jejím místě vyraší hlavy **1|2|1** a **1|2|2**. Janča ví, že v boji usekla hlavy **1|2|2|1**, **4|1|1**, **7|2** a **1|2|2|2|2**. Jaký je nejmenší počet hlav, který v tomto okamžiku hydra může mít? (Předpokládáme, že všechno useknuté doroste „okamžitě“, tzn. „v tomto okamžiku“ má hydra všechny hlavy dorostlé).

38. **Celočíselný obsah:** Nechť $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník se základnami AB a CD. Označme S průsečík jeho úhlopříček. Určete, jaký nejmenší celočíselný obsah může mít, pokud platí následující:

    - $|\angle ABD| = 60°$,
    - $\frac{|CS|}{|AS|} = \frac{3}{4}$,
    - $|AB|^4$ je celé číslo.

39. **Poslušné posloupnosti:** Posloupnost $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nazveme *poslušnou*, pokud se jedná o jednoprvkovou posloupnost (1), anebo pokud platí následující podmínky:

    - jedná se o permutaci posloupnosti $(1, 2, \ldots, n)$, tedy, že $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$, a zároveň
    - posloupnost absolutních hodnot rozdílů sousedních prvků je též poslušná posloupnost, tedy že posloupnost $(|a_2 - a_1|, |a_3 - a_2|, \ldots, |a_n - a_{n-1}|)$ je poslušná posloupnost.

    Určete, kolik existuje poslušných posloupností.

40. **Zábava s pravidelnými 2^n-úhelníky:** V rovině je dán čtverec o délce strany 1. Opišme mu pravidelný osmiúhelník tak, aby každý vrchol čtverce byl středem každé druhé strany pravidelného osmiúhelníku. Osmiúhelníku stejným způsobem opišme pravidelný šestnáctiúhelník, tomu pravidelný dvaatřicetiúhelník a tímto způsobem pokračujme do nekonečna. Jaký je nejmenší poloměr kružnice se středem v průniku úhlopříček čtverce, do které se všechny takto vytvořené 2^n-úhelníky vejdou?

41. **Trojrozdělitelnost:** Nechť je v rovině dána množina bodů M. Řekneme, že tato množina je *trojrozdělitelná*, pokud pro každou podmnožinu $N \subseteq M$ existuje trojúhelník T takový, že body z množiny N jsou vnitřními body trojúhelníka T a body v množině $M \setminus N$ jsou vnějšími body trojúhelníka T.

    Najděte velikost největší množiny bodů (takové množiny, která má nejvíce prvků), která je trojrozdělitelná.

42. **Průmět obloučku:** Uvažujme kružnici k o poloměru 1000 a nějaký její průměr AB. Dále uvažujeme oblouk AX ležící na kružnici k, jehož délka je 2021-krát menší než obvod k. Určite délku $|AY|$, kde Y je kolmý průmět bodu X na úsečku AB.

43. **Vybuchující příšerky:** Na vzdálené planetě žije několik druhů příšerek. Z námi nepochopitelných důvodů riskují své životy v tzv. výbušných kabinách. Když do kabiny vejdou dvě příšerky, může vybouchnout. To, jestli vybuchne, má každá kabina nastaveno jinak: závisí to na druhu příšerek i na tom, v jakém pořadí vešly (nemohou vejít obě najednou, dveře jsou příliš úzké). Každá kabina ale splňuje následující pravidla:

   - Když dovnitř vejdou dvě příšerky stejného druhu, kabina vybouchne.
   - Pokud kabina vybouchla, když do ní vešly dvě příšerky různých druhů, tak by nevybouchla, pokud by vešly v opačném pořadí.
   - Pokud by zmizely všechny příšerky kromě libovolných tří příšerek, stále by existoval způsob, jak může kabina vybouchnout.
   - Pokud by kabina vybouchla, kdyby do ní vešla jedna příšerka A a za ní druhá B, i tehdy, kdyby do ní vešla příšerka B a za ní nějaká třetí příšerka C, tak by vybouchla, i kdyby do ní nejdříve vešla A a za ní C.

   Každé dvě kabiny jsou různé, t.j. pro každou dvojici kabin existuje dvojice (druhů) příšerek a pořadí takové, že jedna kabina by nevybouchla, pokud by do ní vešly dané dvě příšerky v daném pořadí, a druhá ano. Na planetě je 100 výbušných kabin. Kolik minimálně musí existovat druhů příšerek?

44. **Race for the galaxy:** Kuba hrál Race for the galaxy. V tého hře může prodat novinky za 2 karty, technologie za 3 karty, geny za 4 karty a mimozemské technologie za 5 karet. Postupně za prodej získal 20 karet. (Tj. nejdříve prodal nějaké zboží, potom další, atd.) Kolika způsoby to mohl udělat? (Dva způsoby se liší pokud v jednom způsobu prodal více zboží, nebo pokud v nějakém kroku prodal jiný druh zboží.)

45. **Správná tabulka:** Mějme tabulku 3x3, do které smíme zapisovat hodnoty 0, 1. Řekneme, že vyplnění tabulky je *správné*, pokud pro hodnotu v každém políčku platí, že je rovna zbytku po dělení součtu hodnot všech sousedních polí třemi (sousední pole je takové, které se daného pole dotýká, např. prostřední pole má 8 sousedních polí). Určete, kolik existuje vyplnění, která nejsou *správná*.