Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.00

Pokud je řešením počet nějakých objektů a správná odpověď je nekonečno, napište „inf“. Pokud je řešením racionální číslo, napište jej jako zlomek v základním tvaru (např. 5/7*, ale ne* 4/6*). Pokud je řešením iracionální číslo, napište jej v desetinném zápisu zaokrouhleno na 5 desetinných míst (např.* 5.55578946... *jako* 5.55579*).*

1. V Hloupětíně zavedli novou vyhlídkovou tramvajovou linku, jejíž trasa má tvar kružnice. Ze stanice v jednom bodu kružnice v jeden okamžik vyjedou dvě šaliny, každá opačným směrem, jedna objede kružnici za hodinu a druhá za hodinu a půl, celou dobu jedou stejně rychle. Kolik minut uběhne od okamžiku, kdy se šaliny jinde na kružnici potkají do doby, kdy první z nich dorazí zpět do stanice?

2. Liběnka učila Matěje vyslovovat „I“ ve svém jméně. Měl si proto přeříkat všechna římská čísla dělitelná 3 menší nebo rovna 1000. Kolik znaků I tato čísla dohromady obsahují? Uvažme systém římských číslic, ve kterém z odečítacích pravidel můžeme používat pouze IV, IX, XL, XC, CD a CM.

3. V ranním rozhlase zněla jeden den velmi zajímavá soutěžní úloha: Nechť a, b jsou reálná čísla. Uvažme rovnici $x^3 + ax^2 + bx + b^2 = 0$ a předpokládejme, že a je kořen. Najděte nejmenší možnou hodnotu součtu kořenů.

4. V kruhu stojí 2019 obrů a každý má nějaký počet kouzelných fazolí. Když hodí obr A nezáporný počet fazolí n na obra B, přijde o ně a počet fazolí obra B se umocní na n-tou. Takto v kruhu hodí fazole první na druhého, druhý na třetího, atd. až nakonec poslední na prvního. Na konci pak mají všichni obři stejně fazolí, jako na začátku. Určete počet všech fazolí, které obři měli předtím, než se začalo házet. Pokud existuje více řešení, napište jejich součet.

5. Matěj si kupoval pravítko ve tvaru trojúhelníku ABC, kde $|AB| = 8$, $|AC| = 9$ a $|BC|$ je celé číslo. Zvolme na straně AC bod D takový, že $|AD| = 4$. Najděte největší možnou délku $|BC|$, za předpokladu, že $(\cos(|\angle BDC|) - 1)^2 \leq 1$.

6. Ňouma vytvořil pro Koumu velice zajímavou úlohu s tabulkou 5×5. Kouma ji však namísto toho ihned vyplnil čísly $1, 2, 3, 4$ a 5 s následujícími pravidly: pro libovolné i, j má políčko se souřadnicemi (i, j) stejné číslo jako políčko (j, i) a v libovolném řádku se žádné číslo nesmí opakovat. Kolika způsoby může tabulku doplnit?

7. Henryho synovci mají dětský pokoj ve tvaru deltoidu $ABCD$ s dvojicí protějších úhlů 90, 45 u vrcholů A,C a jeho průsečík úhlopříček pojmenovali S. Matěj stál někde mezi body S a B (na jejich spojnici) a hodil hopskulku rovnoběžně s úhlopříčkou AC, směrem k A, která se následně 2019 krát odrazila od stěn. Kolikrát přeletěla přes úhlopříčku AC?

8. Máme 110 rovnoběžných přímek v prostoru $\mathbb{R}^3$, kde žádné tři neleží v jedné rovině. Z toho 28 přímek je modrých, 40 červených a 42 zelených. Procházíme se mezi nimi a kdykoli uvidíme dvě přímky stejné barvy, jak v našem úhlu pohledu splynou, zapíšeme si čárku. Pokud znovu vidíme dvě přímky, které jsme si již zaznamenali, nebo splynou přímky různých barev, čárku nepřidáváme. Až se projdeme po celém prostoru, kolik čárek budeme mít zaznamenaných?

9. Kouma zná funkci $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Ňoumovi však řekl pouze toto: Pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ a pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí:
$$f(x)^a = f(x^a),$$
$$f(f(x)) = x^3.$$
To však Ňoumovi stačilo na spočítání $f(69)$. Dokážete to také? Výsledek je součet přes všechna přípustná f.

10. Kouma šel sbírat houby. Místo toho však nasbíral členy normovaného polynomu $f(x)$ s celočíselnými koeficienty, který je třetího stupně a navíc jeho ireducibilní dělitelé (tzn. nejdou rozložit na součin dvou nekonstantních polynomů) mají rovněž celočíselné koeficienty a součet těchto dělitelů je roven $f(x) - x^3$. Určete součet všech možných f. Jako výsledek zapište hodnotu tohoto součtu v bodě 2019.

11. Liběnka vybarvila každou stěnu dvacetistěnu jinou barvou. Na kolika různých stěnách může dvacetistěn stát, pokud na začátku stál na červené a Liběnka jej třikrát překulila přes hranu tak, že se nikdy neopakovala barva spodní stěny?

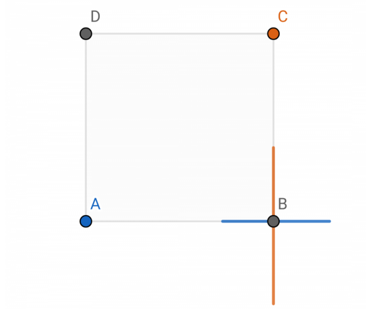
12. Bubla se z nudy rozhodla poskládat puzzle. To ji však hned přestalo bavit, a tak se zamyslela, jaký nejmenší může být obsah obdélníku, jehož výška a šířka se liší o 4 a který lze vyplnit díly $1 \times 1, 1 \times 2, \ldots, 1 \times n$ pro nějaké přirozené n, pokud každý dílek máme pouze jednou. Jaká je správná odpověď?

13. Na kruhovém hloupětínském náměstí stojí dokola dvacet domů. V každém domě bydlí jeden student. Každý student se právě jednou za den pozdraví s oběma svými sousedy a oběma svými rodiči. S každým se zdraví buď ráno, nebo v poledne, nebo večer. Platí však, že zdraví-li se dva lidé v nějakou denní dobu, pak se vždy právě jeden z těchto dvou zdraví v tuto dobu ještě s někým dalším. Nikdo se ale nezdraví v jednu dobu s více než dvěma lidmi. Kolik nejvíce dní může proběhnout, aniž by se opakovaly ty stejné dny s těmi stejnými pozdravy (rodiče se zdraví pouze se svými potomky)?

14. Na planetě Dvarsu žijí mimozemšťani. Trdlo, které má jen jednu ruku, a ostatní, kteří mají rukou pět. Kolik nejméně mimozemšťanů stačí, aby se každý z nich držel s tolika dalšími, kolik má rukou, pokud je mezi nimi i Trdlo?

15. Liběnka dostala ke svým narozeninám množiny bodů v rovině $A = \{[9426976k, 7390240l]; k, l \in \mathbb{N}, 9426976k \neq 7390240l\}$, $B = \{[a, a]; a \in \mathbb{N}\}$. Určete $\min\{|XY|; X \in A, Y \in B\}$.

16. Dva superhrdinové stojí v rozích A, C čtverce $ABCD$ o straně 6 m a v jeden okamžik začnou střílet paprsky ve tvaru úsečky do rohu B. Tripleman střelí paprsek o délce 3 m letící rychlostí 3 m/h, Kvadrapleman střelí paprsek o délce 4 m letící rychlostí 4 m/h. Kolik minut se paprsky budou pronikat?



17. Bubla se jednoho dne začala radovat. Napadla ji totiž funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že pro libovolná přirozená čísla x, y z $x < y$ plyne $f(x) < f(y)$ a navíc $f(f(x)) = x^2 + 2$. Pak z ničeho nic vykřikla číslo $f(38)$. Které to je?

18. Liběnka měla narozeniny a krájela obrovský dort ve tvaru koule. Třikrát překrojila celý dort rovinou skrz střed S tak, že průsečíkem rovin byl pouze střed S. Potom mezi hosty rozdělila čtyři z osmi kusů dortu tak, že žádné dva kusy spolu nesousedili stěnou. Henry si pak všiml, že Liběnka, Kouma a Ňouma mají dohromady čtyřikrát tolik, co on. Jak byl celý dort těžký (v kg), jestliže Henry přibral (i snědl) tři kila?

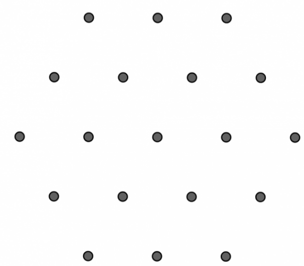
19. Henryho teta slavila 61. narozeniny, avšak Henry nesehnal svíčky ve tvaru 6 ani 1. Měli totiž pouze svíčky tvaru 4, 5 a +. Kolika způsoby mohl na dort vedle sebe umístit tyto svíčky, aby daly součet 61? Záleží i na pořadí různých druhů svíček (tzn. $\cdots+4+5+\ldots$ a $\cdots+5+4\ldots$ jsou různé možnosti) a lze tvořit i víceciferná čísla.

20. Nechť n je celé číslo, polynom $x^3 - nx^2 + kx - n = 0$ má tři celočíselné kořeny a nechť Matěj je jeho řešitel. Určete stejně jako on největší možnou hodnotu součtu $n + k$.

21. V Broumově je právě sedm domů. Každý dům má být spojen potrubní poštou právě se čtyřmi jinými různými domy. Kolik různých potrubních systémů máme možnost vytvořit?

22. Ňouma už celý týden jen hledí do země. „Co hledáš?“ zeptal se Kouma. „Hledám nejmenší přirozené číslo n, které lze zapsat právě pěti způsoby jako $n = a \cdot b$, kde a a b jsou rovněž přirozená (např. $n = 1 \cdot n$, $n = n \cdot 1$),“ odpověděl. Najděte jej také.

23. Hloupětínský lesník Lumír udržuje les v pravidelné síti, viz obrázek. Kolik existuje rovnostranných trojúhelníků s vrcholy na místě stromů?



24. Henry našel v jednom starém matematickém semináři úlohu a chtěl ji sdílet s ostatními: Vítek, Tom, Tom a Tom hrají hru. Všichni čtyři stojí v kruhu a střídají se v házení kostkou. Hráč, který je právě na tahu, vždy vyzývá hráče vedle sebe po směru hry. Oba hodí šestistěnnou kostkou. V případě remízy se vyzyvatel nemění, ale obrací se směr hry. Pokud vyhrál vyzyvatel, stává se vítězem celé hry a hra končí. V opačném případě se vyzvaný hráč stává novým vyzyvatelem a opět hraje s hráčem po aktuálním směru hry. Prvním vyzyvatelem je Vítek. Jakou má šanci, že se stane absolutním vítězem hry?

25. Kouma s Ňoumou si v truhlářství nechali objednat hromadu rámů a začali je sestavovat. Návod mluvil o obdélníku, u kterého je jedna ze stran o 3 cm kratší než druhá a zároveň jeho úhlopříčka o $\sqrt{2}$ cm kratší než úhlopříčka čtverce sestrojeného nad jeho delší stranou. Kouma neváhal a ihned spočítal jeho obvod. Udělejte to také (výsledné číslo zapište v centimetrech).

26. V hloupětínském lese se na některých stromech nachází úkryty. Některé dvojice úkrytů jsou navíc propojeny provazovými mosty tak, že mezi libovolnou dvojicí úkrytů existuje právě jeden způsob, jak mezi nimi po mostech přejít (pokud každý most využijeme maximálně jednou). V některém úkrytu se ukrývá Prvočíslo (Bubla neví kde) a Bubla s ním hraje hru. Bubla si ve svém tahu vybere dva úkryty a nahlas svou volbu ohlásí Prvočíslu. Pokud se v některém z nich nachází Prvočíslo, hra končí. V opačném případě se Prvočíslo může (ale nemusí) pohnout do některého úkrytu, který je spojen mostem s tím, ve kterém se právě nachází. Prvočíslo je moc abstraktní na to, aby šlo při svém přesunu vidět. Následně je na tahu opět Bubla a vybírá si nové (ne nutně jiné) úkryty. Určete nejmenší počet bunkrů takový, že je lze pospojovat mosty tak, aby Prvočíslo mělo šanci unikat libovolně dlouho. To znamená, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ má Prvočíslo nenulovou šanci, že bude unikat n kol bez ohledu na tahy Bubly.

27. Na hladině nekonečné hloupětínské přehrady leží dvě kružnice a tři přímky (po dvou nesplývající), které dohromady rozdělují hladinu (rovinu) na n částí. Kolik takových n existuje?

28. V jedné hloupětínské čtvrti mají domy poskládané do mřížky 8×8 očíslované ne nutně různými celými čísly. Henry bydlí na souřadnicích $[1, 1]$ a rád by věděl, jaké je jeho číslo domu. Vidí pouze, že domy na souřadnicích $[0, 0]$, $[0, 1]$ a $[1, 0]$ jsou všechny očíslovány 0. Zavolal proto telefonickou linku a dozvěděl se, že pro každý dům platí, že v jednom směru se číslo domu rovná součtu dvou před ním (např. $C([2, 3]) + C([2, 4]) = C([2, 5])$, kde $C([i, j])$ je číslo domu na pozici $[i, j]$) a ve druhém rozdílu (např. $C([2, 3]) - C([3, 3]) = C([4, 3])$). Také se dozvěděl, že součet všech čísel je 1188. Jaké číslo domu má Henry?

29. Předchozí hloupětínský režim měl ve znaku pravidelnou 2019-cípou hvězdu a dva její body A a B, jejichž spojením dostaneme osu souměrnosti oné hvězdy. Putujeme-li po hvězdě dokola, kolikrát se nám stane, že vidíme body A,B pod úhlem $90°$ (tzn. pro kolik bodů X je úhel AXB roven $90°$)?

30. Máme trojúhelník ABC, kde úhel u vrcholu A je $30°$, u B $60°$ a u C $90°$. Kouma a Ňouma stojí v bodě C. Kouma se z něj vydá konstantní rychlostí v po polopřímce dané výškou na AB, Ňouma se z něj konstantní rychlostí v' vydá po kružnici opsané trojúhelníku ABC ve směru daném tím, že dojde dřív do B než do A. Víme, že se oba potkají. Jaký je poměr rychlostí $v' : v$?

Mathrace Sada 3

odevzdávejte do 19.00

31. Matěj snídal a tu ho napadlo: Kolik existuje zobrazení z pětiprvkové do tříprvkové množiny? Zobrazení uvažujeme parciální. Parciální zobrazení $f : A \to B$ je takové, že zobrazujeme pouze nějakou podmnožinu množiny A (tedy například $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = \sqrt{x}$ je parciální, jelikož můžeme zobrazovat pouze nezáporná čísla).

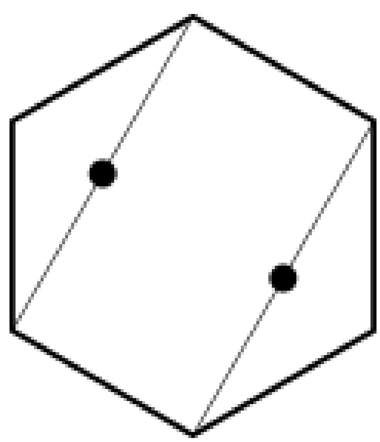
32. Bubla si vzala čtverečkovaný papír a hrací kostku, jejíž stěny jsou stejně velké jako čtverečky na papíře. Jeden čtvereček na papíře vybarvila a postavila na něj kostku. V kolika různých polohách mohla kostka skončit, když si ji Bubla chvíli koulela po papíře, přičemž po každém čtvrtém překulení se kostka nacházela ve vybarveném čtverečku a stejně tak i na konci koulení?

33. Kouma a Ňouma střílejí na terč o poloměru 2019 cm. Terč je rozdělen na 2019 mezikruží o šířce 1 cm. Prostřední mezikruží tvoří kruh o poloměru 1 cm. Oba jsou natolik dobří střelci, že se určitě trefí do terče, ale nedokážou vůbec ovlivnit kam. Šance, kam se trefí, je rovnoměrně rozdělena na celou plochu terče. Jaká je šance, že se oba trefí do stejného mezikruží, pokud každý vystřelí jednou?

34. Každý ví, že Kouma je starší než Ňouma, nikdo však neví, o kolik let. Je to nejmenší číslo takové, že pouze šestkrát za život mohou říci, že jeden je k-krát starší než druhý, pro nějaké celé číslo k. Jaké je to číslo?

35. V Hloupětíně se konaly tradiční závody králů a koní, kteří stojí na jednom poli nekonečné šachovnice. Na kolik polí se mohou dostat ve stejném počtu kroků, když obě figurky volí nejkratší cestu? Počítáme i pole, na kterém právě stojí.

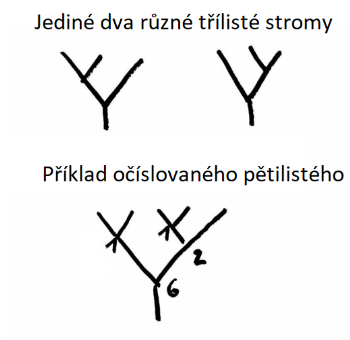
36. Finální část minigolfového hřiště má tvar pravidelného šestiúhelníku. Uprostřed dvou protilehlých příček jsou vyznačeny dva body (viz obrázek).



Hráč musí míček položit na libovolný z těchto bodů a udeřit do něj tak, aby se pohnul, odrazil nejvýše od tří stěn a následně skončil na libovolném z bodů. Krom začátku a konce se tedy v dráze míčku nesmí vyskytovat ani jeden z vyznačených bodů. Navíc míček se nikdy nesmí odrazit přímo v rohu šestiúhelníku. Kolika způsoby to hráč může udělat?

37. Celá polovina hloupětínských má na rohožkách vyšitou uzavřenou lomenou čáru (končí tam, kde začíná), jejíž úseky (úsečky mezi zlomy) mají popořadě od začátku délky $1, 2, ..., n$ pro nějaké přirozené n. Každé dva po sobě jdoucí úseky jsou na sebe kolmé. Navíc čára je nejkratší možná. Jaký obsah má vnitřní oblast útvaru, které je ohrazen takovou lomenou čarou?

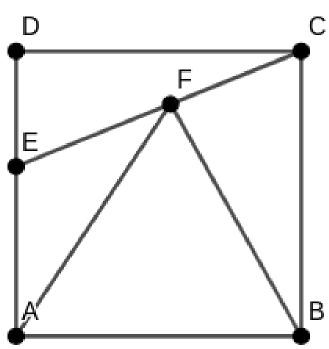
38. V Hloupětíně pěstují zajímavé matematické stromy, z kmene se v jednom místě stanou dvě větve a z každé větve se buď po čase opět stanou dvě větve, nebo větev skončí a vyroste list. Stromy také rostou pouze nahoru a dá se říci, že celý strom leží v jedné rovině. Kouma si stoupl na kraj obory a zjistil, že vidí všechny možnosti stromů, které mají až 15 listů, a každý právě jednou (například třílisté stromy viděl právě dva). Kouma pak ke každému větvení každého stromu napsal číslo, které dostal vynásobením počtu listů, které rostou nalevo od větvení krát počet listů, které rostou napravo. Kolik existuje stromů, na kterých se nachází největší číslo?



39. Uvažujme jednoho hloupětínského obyvatele a jeho oblíbený polynom $x^3 + 2px + p, p \in \mathbb{R}$. Víme, že součin dvou kořenů toho polynomu je roven jedné a třetí kořen je rovněž kořenem polynomu $x^2 + 3qx + 5q$. Určete nejmenší možné q.

40. Kouma s Ňoumou pokračovali v sestavování rámů. Tentokrát měli obdélník, jehož strany jsou v poměru 1 : 2. Pro která $n > 1$ nelze obdélník rozdělit na n menších obdélníků, jejichž strany jsou také v poměru 1 : 2 (ale nemusí být všechny stejně velké)? Výsledek zadejte jako součet všech nalezených n.

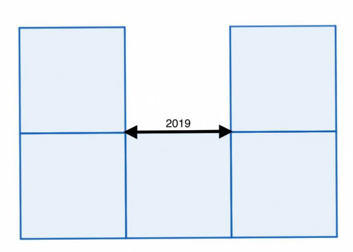
41. Když měli Kouma a Ňouma sestrojené všechny obdélníkové rámy, přešli na ty čtvercové. Nechť $ABCD$ je čtverec, E leží uvnitř úsečky AD, $|AE| = 4$ a F leží uvnitř úsečky EC. Navíc trojúhelníky DCE, EAF a BCF mají stejný obsah. Určete délku úsečky EC.



42. Na stěně Liběnčina bytu visí dvoje hodiny, které v tuto chvíli ukazují správný čas. Jedny se ovšem každou hodinu předběhnou o 1 vteřinu, druhé se za stejnou dobu zpozdí o 2 vteřiny. Za kolik dní budou opět oboje hodiny ukazovat stejný čas?

43. V celém kraji se konal turnaj jedenácti obcí, ke kterému bylo potřeba sestrojit tabulku podle speciálních pravidel. Kolika způsoby lze vyplnit tabulka 11×11 přirozenými čísly menšími než 1001 tak, aby každý sloupec i řádek tvořil aritmetickou posloupnost?

44. Na náměstí ve tvaru „U“ (viz obrázek) leží v každém bodě jeden laser a míří na mouchu, která se vznáší ve výšce 1 m nad zemí. Spočítejte objem osvětleného útvaru (protože je mlha, svítí celá stopa laseru).



45. Král Slavomír se chce stát atletem, a tak každé ráno běhá mezi hrady svých synů. Šest kruhových hradů o poloměru 1 km je takto středem položeno na vrcholech pravidelného šestiúhelníku o straně 3 km a král začne někde mimo hrad a všechny hrady postupně oběhne zprava, tak jako na obrázku. Určete nejkratší možnou královu dráhu.