Mathrace Sada 1

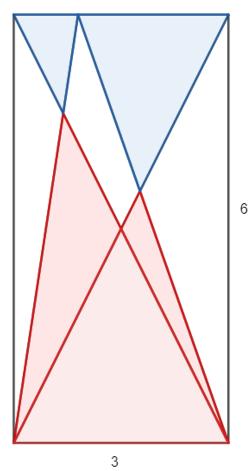
odevzdávejte do 17.00

1. Kolik existuje různých dvojic vrcholů pravidelného dvanáctistěnu, které nejsou spojeny hranou?

2. Tom a Alča hráli hru. Tom napsal na tabuli všechna čísla od 1 do 2018 (v nějakém pořadí) a Alča napsala nad každá dvě sousední čísla velikost jejich rozdílu (vždy větší mínus menší). Tom pak všechna Alčina čísla sečetl. Jaké největší číslo mu mohlo vyjít?

3. Na líných ručičkových hodinách máme dvě ručičky, minutovou a hodinovou. Každá z nich vždy ukazuje na číslo dané minuty nebo hodiny. Tedy o půl deváté hodinová ručička ukazuje na 8 hodin (nikoli mezi 8 a 9). Jaký je součet nejčastějších úhlů, které ručičky svírají? (Úhly počítáme ve stupních a nejsou orientované - nejvyšší úhel, který je mezi ručičkami, je 180°)

4. Pokud je obsah modrého útvaru π, kolik je obsah červeného útvaru?



5. Určete součet součtů všech trojic prvočísel, která vyhovují následující rovnosti:

$$136 = \frac{165}{p} + \frac{189}{q} + \frac{53}{r}.$$

6. Matouš měl kvádr o objemu 2018. Když jej rozpůlil na dva shodné kvádry, byly podobné s tím původním. Jak dlouhá byla nejkratší strana původního kvádru?

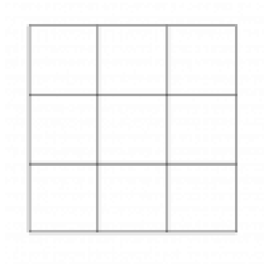
7. Tom měl 2019 kartiček s čísly 0 až 2018 a uspořádal je takto: Začal s čísly 0 a 1, pak následovala vzestupně všechna kladná čísla dělitelná dvojkou. Poté ze zbylých kartiček vybral ty, které byly dělitelné třemi a opět je vzestupně zařadil do posloupnosti. Podobně pokračoval s čísly dělitelnými čtyřmi, pěti, . . . , dokud mu žádné kartičky nezbyly. Určete, na které pozici je číslo 5.

8. Dominik dostal k Vánocům slovo $ABCCBA$, ale rád by si z něj udělal slovo ABC. Naštěstí dostal i manuál, který mu dovolil dělat s písmeny následující úpravy:

   - AB lze zaměnit za BC a naopak
   - CB lze zaměnit za BA a naopak
   - BB lze zaměnit za B a naopak
   - $ACAC$ lze zaměnit za CA.

Kolik nejméně úprav musí provést, aby se dostal k slovu ABC?

9. Z kolika (nejméně) přímek zvládnete nakreslit právě 100 čtverců? Např. na obrázku je 14 čtverců nakreslených pomocí 8 přímek.



10. Barča měla pravidelný čistý osmistěn, a tak na jeho stěny nalepila čísla od jedné do osmi. Pak z nudy označila všechny hrany číslem, které vzniklo součtem čísel nalepených na stěnách, které tuto hranu sdílí. A protože ještě neměla dost, označila všechny jeho vrcholy součtem čtyř stěn a čtyř hran (celkem tedy osmi čísel), jejichž je vrchol součástí. Potom sečetla všechny vrcholy, hrany a stěny. Jaké největší číslo mohlo Barče vyjít?

11. Kolik je trojúhelníků s celočíselnými délkami stran a obvodem 31, pokud podobné trojúhelníky počítáme pouze jednou?

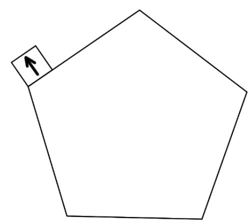
12. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ a kružnice k opsaná trojúhelníku BCD. Kružnice k protíná úsečku AB v bodě $P \neq B$. Víme, že $|\measuredangle DPB| = 120^\circ$, AD je tečna na k, $|AD| = 4, S_{\triangle ABD} = 9$. Určete obsah kruhu vymezeného kružnicí k.

13. Určete součin všech celočíselných x takových, že pro nějaké prvočíslo p platí, že $\frac{x^3+8}{x+p+2} = 9$.

14. Máme čtvercovou mřížku 3×3 (s 16 mřížovými body). Kolik existuje rovnoramenných trojúhelníků, jejichž vrcholy leží právě v mřížových bodech?

15. Najděte trojici přirozených čísel a, b, c takovou, že polynom $P(x) = ax^2 + bx + c$ má 2 různé reálné kořeny, polynom $Q(x) = bx^2 + cx + a$ má dvojnásobný reálný kořen, polynom $R(x) = cx^2 + ax + b$ nemá reálné kořeny a součet $a + b + c$ je co nejmenší.

16. Je dán pravidelný pětiúhelník o straně délky 2018 a na jednom konci jeho libovolné strany (označme ji s) je zvenku položen čtverec o straně délky 1. Na čtverec nalepíme červenou šipku (mířící kolmo na stranu s a zároveň pryč od pětiúhelníku). Nyní budeme kutálet čtverec po pětiúhelníku po směru hodinových ručiček tak dlouho, dokud se nedostane na svoji původní pozici, tzn. šipka musí ukazovat tak jako na začátku (můžeme tedy „obkutálet“ pětiúhelník vícekrát). Kolikrát se čtverec otočil kolem svého středu?



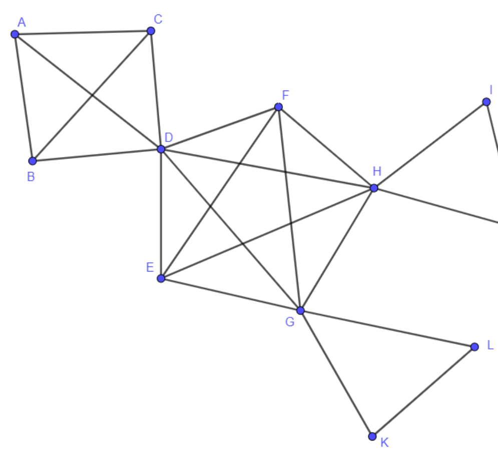
17. Sněhurka jede na nostalgický výlet za (sedmi) trpaslíky. Ti se od doby, co bydlí Sněhurka s princem, osamostatnili a každý bydlí ve svém lesním domečku. Sněhurka má naplánováno, že u nich stráví 10 nocí a žádné dvě po sobě jdoucí noci nebude u stejného trpaslíka. Kolika způsoby může tento výlet provést (dva výlety jsou různé, pokud se alespoň jednu noc liší Sněhurčin nocleh), pokud je domluvená s Prófou, že u něj bude první noc a poslední noc bude u Kejchala, kde je závěrečná party?

18. Určete součet všech kladných celočíselných x takových, že $(x+3)|(x^2+2x+5)$.

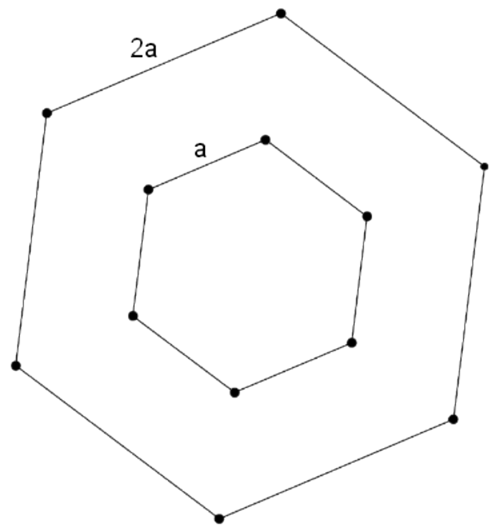
19. Matouš potřeboval zaházet jámu o rozměrech $4\times4\times4$. Měl k dispozici 16 stejných kvádrů o rozměrech $1\times1\times4$. Kolika způsoby to mohl udělat (řešení A a B považujeme za různá, pokud v A aspoň jeden kvádr zabírá prostor, který není v B zabrán jediným kvádrem)?

20. Tom a Vítek si mysleli každý jedno přirozené číslo. Jejich největší společný dělitel byl 2018, jejich nejmenší společný násobek 24 216. Určete součet všech čísel, které si Vítek mohl myslet.

21. Tom přišpendlil na nástěnku několik špendlíků a mezi některými dvojicemi špendlíků natáhl gumičky jako na obrázku. Poté přišla Alča a popřesouvala špendlíky na nástěnce (i s gumičkami, které na ně byly navázané) tak, že výsledný obrazec vypadal stejně jako předtím. Kolika způsoby to mohla provést? (Alča nemusela hnout všemi špendlíky, vždy ale přesunula alespoň jeden)



22. 12 bodů v rovině tvoří 2 soustředné pravidelné šestiúhelníky se stranami a a $2a$, přičemž oba jsou stejně natočené. Kolik různých přímek zadává těchto 12 bodů?



23. Uvažme číslo $0,x5y1x5y1x5y1x5y1...$, kde x, y jsou nějaké číslice. Toto číslo lze vyjádřit ve tvaru $47/n, n \in \mathbb{N}$. Zapište součet $x + y + n$.

24. Dva bratři mají za úkol naskládat do prázdného kontejneru o rozměrech $n \times n \times n$ (kde n je nějaké přirozené číslo) menší krabice o rozměrech $1 \times 1 \times 1$. Ještě než začnou, domluví se, že si zahrají hru. Ve skládání se budou střídat, začíná Dominik, který může do kontejneru vždy vložit jednu, dvě, nebo tři krabice. Poté skládá silnější Matouš, který do kontejneru může vložit jednu až čtyři krabice. Hra končí, až je kontejner úplně naplněn a vyhrává ten, který vložil krabici jako poslední. Kolik existuje $n < 20$ takových, že má Matouš šanci vyhrát, jestliže je Dominik velmi chytrý a vždy ví, kolik krabic má naskládat?

25. Minh, Viki a Tom si kupují každý stejný mobil, ale budou ho platit postupně na splátky. Hned první splátku zaplatila Minh 1300 Kč, Viki 1000 Kč a Tom 880 Kč. Na dalších splátkách platili přesně: Minh 180 Kč, Viki 240 Kč a Tom 280 Kč. Kolik nejméně mohl mobil stát?

26. Podle legendy se kdysi MathRace bodovala tak, že za každou úlohu dostal jeden bod jen ten tým, který ji vyřešil jako první. Tzn. jeden tým mohl mít na konci 45 bodů. Bylo ale možné i to, že úlohy byly těžké a po urputném zápolení žádný tým nevyřešil ani jednu úlohu (všichni byli na nule). Kolik bylo možných výsledkových listin, pokud MathRace řešilo jen 5 různých týmů?

27. Je dán rovnostranný trojúhelník s obsahem S a kružnice jemu připsaná s obsahem T. Určete poměr T/S.

28. Matouš našel dva hlemýždě a začal je chovat. Každý měsíc se z každé stávající dvojice hlemýžďů vyklubali dva další (např. ke čtyřem by jich přibylo dalších dvanáct). Za kolik nejméně měsíců bude hlemýžďů víc než lidí na celém světě, kterých uvažujeme 8 000 000 000?

29. Na vrchol hory ve tvaru kužele vede přímo vzhůru lanovka. Uprostřed dráhy lanovky je přestupní stanice. Martin se rozhodl půl hory vyjít a nechat se vyvézt až z přestupní stanice. Zároveň by chtěl obejít celou horu dokola, aby se pokochal výhledem a určitě nechce nikdy klesat. Jakou nejmenší vzdálenost musí ujít ze spodní stanice do přestupní stanice, pokud je hora vysoká $h = 400$ metrů a má obvod u úpatí $O = 600\pi$ metrů?

30. Martin hledá optimální patro v 320patrovém mrakodrapu pro rozbíjení ořechů. Je to nejnižší patro, ze kterého se ořech při pádu rozbije. To znamená, když hodí ořech z nižšího patra, nerozbije se, když hodí z vyššího, ořech se rozbije. Martin má dva ořechy (tj. alespoň dva pokusy, pokud se oba rozbijí). Kolik nejméně hodů stačí na to, aby ať je optimální patro kterékoli, Martin bude po těchto hodech vědět, které patro je optimální?

Mathrace Sada 3

odevzdávejte do 19.00

31. Matouš dostal k Vánocům pravidelný 2018-úhelník. Zapojil ho do zásuvky, každá jeho strana se prodloužila do přímky a všechny průsečíky těchto přímek zářily. Kolik bylo průsečíků?

32. Tom má v hlavě největší číslo, které jsme schopni vytvořit z číslic 0-9 tak, že z každé souvislé neprázdné podposloupnosti cifer lze vybrat nějakou číslici, která se v ní vyskytuje právě jednou. Kolik má Tomovo číslo cifer?

33. Kolik existuje přirozených čísel n takových, že 2018 dává po dělení číslem n zbytek 3?

34. Matěj stojí v rohu místnosti se zrcadlovými stěnami s půdorysem ve tvaru čtverce o straně délky 2018 metrů. Jeden metr od protějšího rohu na stěně sedí moucha. Matěj vystřelí laserový paprsek na mouchu, ta po čase odletí a paprsek se začne odrážet, až nakonec trefí Matěje do oka. Kolikrát se laser odrazí, než se vrátí zpět? Začátek a konec střely nepočítáme jako odraz a když letí paprsek do rohu, vrátí se stejným směrem.

35. Na jednom políčku šachovnice, 100×100, se nachází Blob, ale jeho poloha není známa. Martin postupně střílí na různá políčka šachovnice, aby ji vyčistil. Vždy si vybere jedno políčko a v případě, že trefí Bloba, se Blob rozpadne na čtyři Žloby. Každý ze Žlobů se vydá jiným směrem rovnoběžným s osou x nebo y a zarazí se až na okraji šachovnice. Pokud některý Žlob zůstane na místě, kde stál Blob, okamžitě zmizí. V případě, že Martin trefí Žloba, Žlob zmizí a již se nedělí. Kolikrát musí Martin nejméně vystřelit, aby měl jistotu, že trefí Bloba i všechny Žloby, pokud nezná jejich polohu?

36. V Bílovicích nad Svitavou plánují vystavět 2018 tramvajových zastávek. Kolik nejméně tramvajových linek je potřeba, jestliže každá linka navštíví právě 10 zastávek a z každé zastávky se občané budou moci dostat na jakoukoliv jinou zastávku pomocí nejvýše jednoho přestupu?

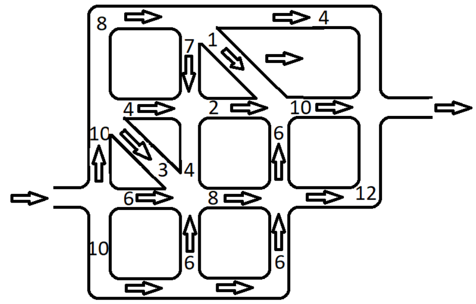
37. Průměr 2018 různých přirozených čísel je 2018. Jaké je největší číslo, které se mezi nimi může nacházet?

38. Alena si zvolí náhodné číslo v intervalu od 0 do 0.75. Cyril si zvolí náhodné číslo v intervalu od 0.25 do 1. Bohouš si zvolí číslo z intervalu od 0 do 1. Jaká je pravděpodobnost, že Bohoušovo číslo leží mezi Cyrilovým a Aleniným číslem?

39. Podle legendy kdysi v MathRace figurovala i náhoda. Bylo jen 10 úloh, za které šlo získat 1 nebo 2 body (kolik to bylo, určila náhoda). Jaká byla pravděpodobnost, že tým A měl po vyřešení těchto 10 úloh více bodů jak tým B, jestliže tým B měl v ten moment v součtu 15 bodů za tyto úlohy? (Řešení uveďte jako zlomek v základním tvaru s lomítkem.)

40. Linda si hrála s nulou a postupně ji upravovala. V každém kroku své číslo buď vynásobila dvěma, nebo přičetla dva. Na kolik nejméně kroků mohla z nuly získat číslo 2018?

41. Na ostrově Brkostrově mají všechny silnice jednosměrné a každý pátek to tu vypadá stejně. Silnice jsou plné aut a každý se chce dostat z ostrova ven, jenže z Brkostrova vede jediný most. Na obrázku je nakresleno schéma silnic. Čísla značí, kolik nejvíce aut zvládne danou silnicí projet za sekundu. 2 červené body značí výjezd z parkoviště, kde všichni parkují, a vjezd na most. Kolik nejvíce aut se může dostat na venkov za minutu (pokud od začátku počítání jsou již silnice plné)?



42. Konferenční místnost má tvar rovnostranného trojúhelníku s obsahem $2018m^2$. V tkalcovně se spletli a ušili koberec ve tvaru rovnostranného trojúhelníku s obsahem $1009m^2$. Koberec položili do rohu místnosti (trojúhelníky mají společný vrchol a dvě strany). Kolik metrů byl okraj třetí okraj koberce vzdálený od třetí stěny místnosti?

43. Dominik vymyslel novou řeč, jejíž slova jsou poskládány libovolně z písmen A a B a jsou libovolné délky (např. $AABAAABBBBAABA$). Ondrovi se nelíbilo, že je slov nekonečně mnoho, a proto zavedl tato pravidla: místo $AAAA$ budeme psát AA, místo BBB budeme psát B, místo BAB budeme psát AB a místo AAB budeme psát B. Naopak pravidla neplatí, slova vždy zkracujeme dokud to jde. Kolik nezkratitelných slov má Ondrova řeč?

44. Tom napsal na tabuli dvanáct různých přirozených čísel takových, že každé bylo dělitelné tím předchozím, načež přišla Linda se svým přirozeným číslem a při pohledu na tabuli překvapeně prohlásila: „Ale to jsou přesně všichni dělitelé mého čísla!“ Jaké nejmenší číslo si Linda mohla přinést?

45. Najděte nejmenší kladné celé číslo takové, že když přesuneme jeho poslední číslici na začátek, dostaneme trojnásobek původního čísla. Zadejte 8 posledních cifer nalezeného čísla.