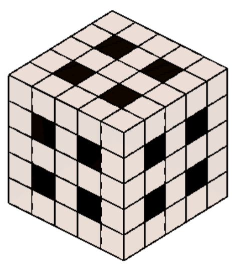
Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.40

1. Vlado má dvoje digitální hodinky (oboje ukazují čas od 0 do 24h). Jedny se každou hodinu o tři minuty předbíhají, druhé se každou hodinu o dvě minuty zpožďují. Stejný čas ukazovaly dnes ve 12.00. Jaký čas na nich bude svítit, když budou příště ukazovat stejný čas? Čas zadejte jako posloupnost cifer, které budou na hodinkách, tedy např. 13 hodin, 7 minut a 9 sekund zapište jako 130709.

2. Emu má ponožky sedmi barev, od každé dvacet párů. Pokud je po tmě loví ze zásuvky, kolik nejméně ponožek musí vytáhnout, aby měla od dvou různých barev po dvou párech?

3. Mária slepila 125 kostiček do tvaru krychle, z níž následně odebrala čtyři řady kostek v každém směru (výsledný útvar je na obrázku a skládá se z 81 kostiček). Výsledný útvar ponoříme do barvy. Počet kostiček obarvených z jedné strany označíme a, počet kostiček obarvených ze dvou stran b, počet kostiček obarvených ze tří stran c a konečně počet kostiček obarvených ze čtyř stran d. Určete $a \cdot b \cdot c \cdot d$.



4. Emu, Zbyněk a Mirek si zaparkovali koloběžky do stojanu. Víte, že

   - Zelená koloběžka je napravo od modré.
   - Mirkova koloběžka je hned vedle koloběžky s hliníkovými blatníky.
   - Mirkova koloběžka není uprostřed.
   - Emuina koloběžka je hned nalevo od modré.
   - Koloběžka s plastovými blatníky je nalevo od koloběžky s titanovými blatníky.
   - Oranžová koloběžka má větší kola než zelená.

   Najděte rozmístění koloběžek. Odpověď zadejte jako posloupnost devíti písmen (bez čárek, tedy např. EMZMOZHPT), z nichž první tři zkracují jména majitelů (E,M,Z), další tři barvu koloběžky (M,O,Z), a poslední tři typ blatníků (H,P,T) ve směru zleva doprava.

5. Najděte čísla A, B, C, D taková, že součin jakýchkoli dvou z nich je dvojmístný, součin $A \cdot B$ má na místě desítek čtyřku, $C \cdot D$ pětku, $B \cdot D$ trojku, $A \cdot D$ šestku a součin $A \cdot C$ končí dvojkou. Jako odpověď zadejte $1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D$.

6. Michal si napsal čtyřciferné číslo, jehož všechny cifry jsou různé a větší než 3. Prozradil nám o něm, že

   - S číslem 5847 má právě 3 stejné cifry, z toho právě dvě na stejných pozicích.
   - S číslem 5648 má právě 3 stejné cifry, z toho právě dvě na stejných pozicích.
   - S číslem 6479 má právě 2 stejné cifry, z toho žádnou na stejné pozici.
   - S číslem 5647 má právě 3 stejné cifry, z toho všechny tři na stejných pozicích.

   Najděte Michalovo číslo.

7. Máme trojciferné číslo. Když ho napíšeme obráceně, zvětší se o 396. Prostřední cifra tohoto čísla je ze všech jeho cifer největší a je rovna druhé mocnině jiné jeho cifry. Určete toto číslo.

8. Vezmeme ciferný součet přirozeného čísla n, od něj odečteme ciferný součet přirozeného čísla $n+2$ a z výsledku uděláme absolutní hodnotu. Kolik různých výsledků menších než 2012 můžeme získat?

9. Mějme množinu přirozených čísel M takovou, že obsahuje číslo 2012. Průměr čísel v této množině je 2000, pokud z ní číslo 2012 odstraníme, sníží se průměr na 1999. Jaké největší číslo může množina obsahovat?

   Poznámka: protože se jedná o množinu, jsou všechny její prvky různé.

10. Zbyňkovi je 24 let. Na absolventském večírku se Zbyněk zeptal svého profesora na věk. Dostalo se mu odpovědi: „Je mi třikrát více, než kolik bylo tobě, když jsem byl o čtyři roky mladší, než ty teď.“ Kolik let je profesorovi?

11. Matěj vyrobil z plastelíny čtyři duté koule. Všechny mají tloušťku stěny 1 cm. Nejmenší z nich má vnější poloměr 8 cm, druhá nejmenší 10 cm. Objem plastelíny, který spotřeboval na největší a nejmenší kouli je roven objemu plastelíny potřebnému na sestrojení zbylých dvou. Navíc víte, že největší z nich má vnější poloměr o 1 cm větší, než druhá největší. Určete vnější poloměr největší koule.

12. Víte, že
$$\left\lfloor r+\frac{19}{100}\right\rfloor+\left\lfloor r+\frac{20}{100}\right\rfloor+\left\lfloor r+\frac{21}{100}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor r+\frac{88}{100}\right\rfloor=555.$$
    Určete hodnotu $\lfloor 100r\rfloor$. Zde $\lfloor x\rfloor$ značí největší celé číslo nepřesahující x.

13. Pro kolik reálných čísel a má rovnice $x^2+ax+12a=0$ pouze celočíselná řešení?

14. Petr si myslí číslo. Prozradil nám, že toto číslo je druhou mocninou celého čísla, je čtyřmístné, na třetím místě má nulu a jeho první cifra je rovna součtu zbylých cifer. Najděte Petrovo číslo. Pokud je řešení více, zadejte jejich součet.

15. Máme dvě rovnoramenné váhy a N mincí, z nichž jedna je těžší než ostatní (všechny ostatní mají stejnou váhu). Nevíme přitom, o kolik je tato mince těžší. V každém vážení umístíme několik mincí na každou ze čtyř misek vah. Pro jaké největší N umíme nejtěžší minci najít na tři vážení?

16. Nekonečná posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ přirozených čísel splňuje $a_1+a_2=28$, $a_3+a_4=-11$ a pro všechna přirozená čísla n platí $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$. Určete $a_{12}+a_{123}+a_{1234}$.

17. Jaké je největší přirozené n takové, že existuje právě jedno přirozené m splňující $\frac{10}{37}<\frac{n}{m}<\frac{3}{11}$?

18. Na kolik nejvíce částí lze čtyřmi kružnicemi a dvěma přímkami rozdělit rovinu? (Oblast je část roviny ohraničená částmi přímek a kružnic, může být nekonečná.)

19. Jaké největší přirozené číslo nelze psát ve tvaru $42a+b$, kde a, b jsou přirozená a b je navíc složené? (Číslo nazýváme složeným, pokud jej lze psát jako součin dvou přirozených čísel větších než 1).

20. Zuzka si narýsovala trojúhelník ABC s vnitřními úhly při vrcholech A, B, C po řadě $50°$, $60°$ a $70°$. V něm si sestrojila střed I kružnice vepsané a spustila z něj kolmice na všechny strany trojúhelníka. Paty těchto kolmic označila A_1, B_1, C_1. Pak z I spustila kolmice na strany trojúhelníka $A_1B_1C_1$ a jejich paty vytvořily trojúhelník $A_2B_2C_2$. Takto postupovala stále dokola. Jaké jsou vnitřní úhly v trojúhelníku $A_{17}B_{17}C_{17}$? Jako výsledek zadejte jejich součin jejich velikostí ve stupních.