

BRněnský KOrespondenční Seminář



XXXII. ročník
2025/2026

ŘEŠENÍ 5. SÉRIE

USPOŘÁDANÉ
MNOŽINY

ÚLOHA 5.1 - 1 – NESPOŘÁDANÍ DĚLITELÉ

Máme uspořádanou množinu $(\mathbb{N}, |)$ přirozených čísel (0 nepovažujeme za přirozené číslo) uspořádanou pomocí dělitelnosti.

1. Najděte injektivní izotonní zobrazení množiny $(\mathbb{N}, |)$ na $(P(\mathbb{N}), \subseteq)$ množinu všech podmnožin přirozených čísel uspořádanou podle inkluze.

2. Dejte příklad nekonečné lineárně uspořádané množiny X takové, že neexistuje injektivní izotonní zobrazení $(\mathbb{N}, |) \rightarrow X$.

ŘEŠENÍ: 1. V tomto příkladu můžeme použít například zobrazení f , které každé číslo $n \in \mathbb{N}$ pošle na množinu všech jeho přirozených dělitelů, tzn. $f(n) = \{d \in \mathbb{N} \mid d|n\} \subset P(\mathbb{N})$. Největší prvek takovéto množiny bude zřejmě n samotné, což implikuje injektivitu. Fakt, že je zobrazení f izotonní, pak plyne z tranzitivity dělitelnosti, neboli pokud $y|z$ a $x|y$, pak i $x|z$. Dělitelé čísla y jsou tedy také dělitelé čísla z a dostáváme $f(y) \subseteq f(z)$.

2. Tady můžeme použít například uspořádání $(\mathbb{N}, \geq)$, tzn. jednička bude v tomto uspořádání "největší"; a řetězec bude pokračovat $\{f(1), \dots, 3, 2, 1\}$. Chceme tedy zobrazit nekonečnou množinu na množinu konečnou, což je ve sporu s injektivitou.

ÚLOHA 5.2 - 2 – SUPERMAN

Uspořádaná množina má právě jednu podmnožinu, jejíž supremum neexistuje. Ukažte, že tato podmnožina je prázdná.

ŘEŠENÍ: Je-li uspořádaná množina prázdná, pak má právě jednu podmnožinu, prázdnou, a ta nemá supremum. Dále tedy předpokládejme, že uspořádaná množina je neprázdná, označme ji U . Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje neprázdná podmnožina A , jejíž supremum neexistuje. Podmnožinou uspořádané množiny U je dozajista i prázdná množina. Z předpokladu je různá od A a má supremum. Množina horních závor prázdné množiny je celá množina U , supremum je nejmenší horní závora, z čehož tedy získáváme, že množina U má nejmenší prvek, označme si ho x . Následují dvě možnosti, množina A buď prvek x obsahuje, nebo ne.

1. $x \in A$. Pokud by x byl jediný prvek množiny A , pak by také byl jejím supremem, my však předpokládáme, že množina A supremum nemá. Musí obsahovat tedy minimálně další prvek. Uvažme množinu $\tilde{A} = A$
 x . Množina horních závor $\tilde{A}$ se odebráním nejmenšího prvku od A nemohla změnit. Protože však víme, že neexistuje nejmenší horní závora A , pak neexistuje ani nejmenší horní závora $\tilde{A}$, získáváme tedy další podmnožinu U , jejíž supremum neexistuje $\rightarrow$ SPOR!
2. $x \notin A$. Nyní vytvořme množinu $\hat{A} = A \cup x$. Kdyby množina horních závor A obsahovala prvek x , pak by i měla nejmenší prvek a tedy supremum. Určitě tedy x nebylo v množině horních závor. Přidáme-li prvek x k množině A množina horních závor $\hat{A}$

bude totožná s A , nebude existovat nejmenší prvek a ani $\hat{A}$ nebude mít supremum. Což je opět? SPOR!

Musí tedy tato podmnožina být prázdná.

ÚLOHA 5.3 - 3 – SKVĚLE USPOŘÁDANÁ MNOŽINA

Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ má tu vlastnost, že každá její neprázdná podmnožina má nejmenší i největší prvek. Ukažte, že M je konečná.

ŘEŠENÍ: Pripusťme, že M má vlastnost ze zadání a zároveň je nekonečná. Sestrojíme posloupnost $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ následovně: $x_1 = \min(M)$, $x_2 = \min(M \setminus \{x_1\})$, $\dots$, $x_n = \min(M \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\})$. Tato posloupnost je rostoucí, protože nejmenší prvek množiny se odebráním předchozího nejmenšího prvku ostře zvětší.

Jelikož M je nekonečná, můžeme v tomto procesu pokračovat libovolně dlouho, a posloupnost bude tedy také nekonečná. Protože každé x_i je prvek M , tvoří prvky posloupnosti podmnožinu M , a ta tedy musí mít největší prvek. To je ovšem spor s tím, že je nekonečná a rostoucí. Žádný prvek x_m nemůže být největším prvkem, protože x_{m+1} je větší.

ÚLOHA 5.4 - 4 – NQNQRQ

Rozhodněte:

1. Za 0,5 bodu: zda existuje dvojice izotonních zobrazení $i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ a $j: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že jejich složení (v tomto pořadí) je identita na $\mathbb{N}$,
2. Za 4,5 bodů: zda existuje dvojice izotonních zobrazení $i: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ a $j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ taková, že jejich složení (v tomto pořadí) je identita na $\mathbb{Q}$.

ŘEŠENÍ: Jedno z možných řešení, převzato od Pavla Hyánka:

1. Definujme zobrazení i, j předpisem:

$$\forall n \in \mathbb{N}, i(n) := n,$$

$$\forall q \in \mathbb{Q}, j(q) := \begin{cases} 1, & \text{amp; když } q \\ < 1 \\ \lceil q \rceil, & \text{amp; jinak} \end{cases}$$

Obě zobrazení jsou zjevně izotonní a zároveň pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $i(n) = j(n) = n$, tedy je jejich složení identita.

2. Pro spor předpokládejme, že taková dvojice zobrazení existuje.

Zaměřme se na zobrazení j , které je z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{Q}$, je izotonní a musí být surjektivní, aby složení i a j mohla být identita.

Uvažme libovolné posloupnosti $A = (a_n)_{n=0}^\infty, B = (b_n)_{n=0}^\infty$ racionálních čísel, kde A je ostře rostoucí, B je ostře klesající a obě mají stejnou iracionální limitu L .

Ze surjektivnosti j musí existovat posloupnosti reálných čísel $C = (c_n)_{n=0}^\infty, D = (d_n)_{n=0}^\infty$ takové, že pro všechna přirozená n platí $j(c_n) = a_n, j(d_n) = b_n$.

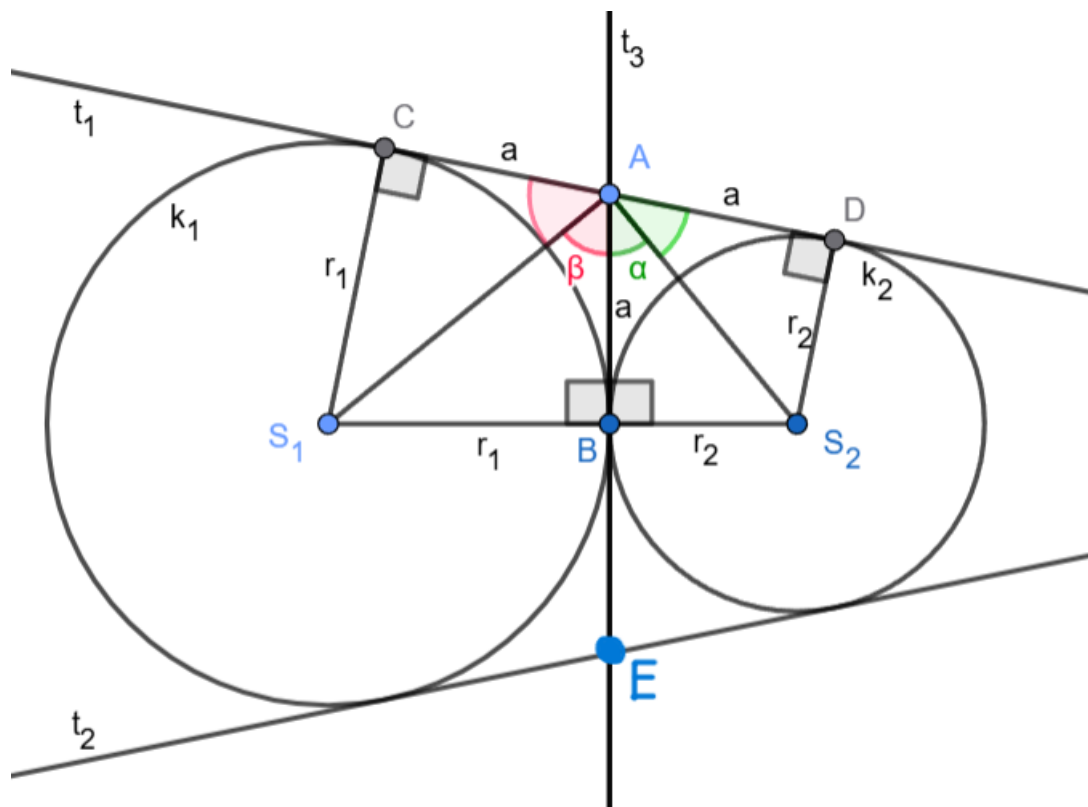
Máme že každý prvek A je menší než L je menší než každý prvek B , a proto z izotonnosti j je každý prvek C menší nebo roven každému prvku D . Proto nutně existuje nějaké m , které je větší nebo rovno všem prvkům C a menší nebo rovno všem prvkům D .

Co ale může být $j(m)$? Z izotonnosti j je to větší nebo rovno všem prvkům A a menší nebo rovno všem prvkům B . Jediné reálné číslo, co toto splňuje je, z toho jak jsme zvolili

A a B právě L . To není racionální, tudíž $j(m)$ není racionální a dostáváme spor s tím, že j je $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$, jak jsme chtěli, tedy takové řešení neexistuje.

ÚLOHA 5.A - A – SNĚHULÁK

Mějme dvě kružnice $k_1(S_1, r)$ a $k_2(S_2, \frac{2r}{3})$ s vnějším dotykem. Existují 3 tečny, které mají tyto kružnice společné, přičemž t_1 prochází bodem dotyku kružnic k_1 a k_2 . Dokažte, že body S_1 , $(t_1 \cap t_2)$, S_2 a $(t_1 \cap t_3)$ leží na jedné kružnici.



ŘEŠENÍ:

Nejprve sestrojíme kolmice k tečnám t_1 a t_3 , které procházejí středy kružnic. Vzniknou tak poloměry S_1C , S_1B , S_2A , S_2B , přičemž platí $S_1C = S_1B = r_1$, $S_2A = S_2B = r_2$.

Označme velikosti úhlů $|\angle CAS_1| = \beta$, $|\angle DAS_2| = \alpha$. Podívejme se nyní na pravoúhlé trojúhelníky $\triangle S_1CA$ a $\triangle S_1BA$. Oba mají společnou přeponu S_1A a zároveň platí $S_1C = S_1B = r_1$. Jedná se tedy o shodné trojúhelníky podle věty *Ssu*, a proto $|\angle BAS_1| = |\angle CAS_1| = \beta$. Analogicky dostáváme pro pravoúhlé trojúhelníky $\triangle S_2DA$ a $\triangle S_2BA$ jejich shodnost, ze které plyne $|\angle BAS_2| = |\angle DAS_2| = \alpha$.

Dostáváme tedy $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, a tudíž $\boxed{\alpha + \beta = 90^\circ}$.

Stejnou úvahu můžeme provést také pro spodní část náčrtku. Analogicky získáme $|\angle S_1ES_2| = 90^\circ$.

Čtyřúhelník AS_1ES_2 má tedy dvojici protilehlých úhlů $|\angle AS_1E| = 90^\circ$ a $|\angle S_1ES_2| = 90^\circ$, jejichž součet je $|\angle AS_1E| + |\angle S_1ES_2| = 180^\circ$.

Podle věty o obvodovém čtyřúhelníku je tedy čtyřúhelník AS_1ES_2 tětiový, tudíž mu lze opsat kružnici.

ÚLOHA 5.B - B – ROLLING STONES

V kružnici o poloměru R se současně kotálí dva čtverce. První čtverec má stranu délky

$2R\sin 10^\circ$, druhý čtverec má stranu délky $2R\sin 30^\circ$. Oba mají obarvený jeden vrchol. Tímto vrcholem začínají v jednom bodě – to je první setkání. Pokaždé, když se tento obarvený vrchol dotkne kružnice, zaznačí si tuto polohu a napíše k ní pořadové číslo dotyku. Jaké bude pořadové číslo odpovídajících si bodů, kde se čtverce potkají potřetí?

ŘEŠENÍ: Začněme nejprve menším čtvercem. Zajímat nás bude zejména úhel, který svírají dva jeho dotýkající se body se středem kružnice - tedy úhel ASB .

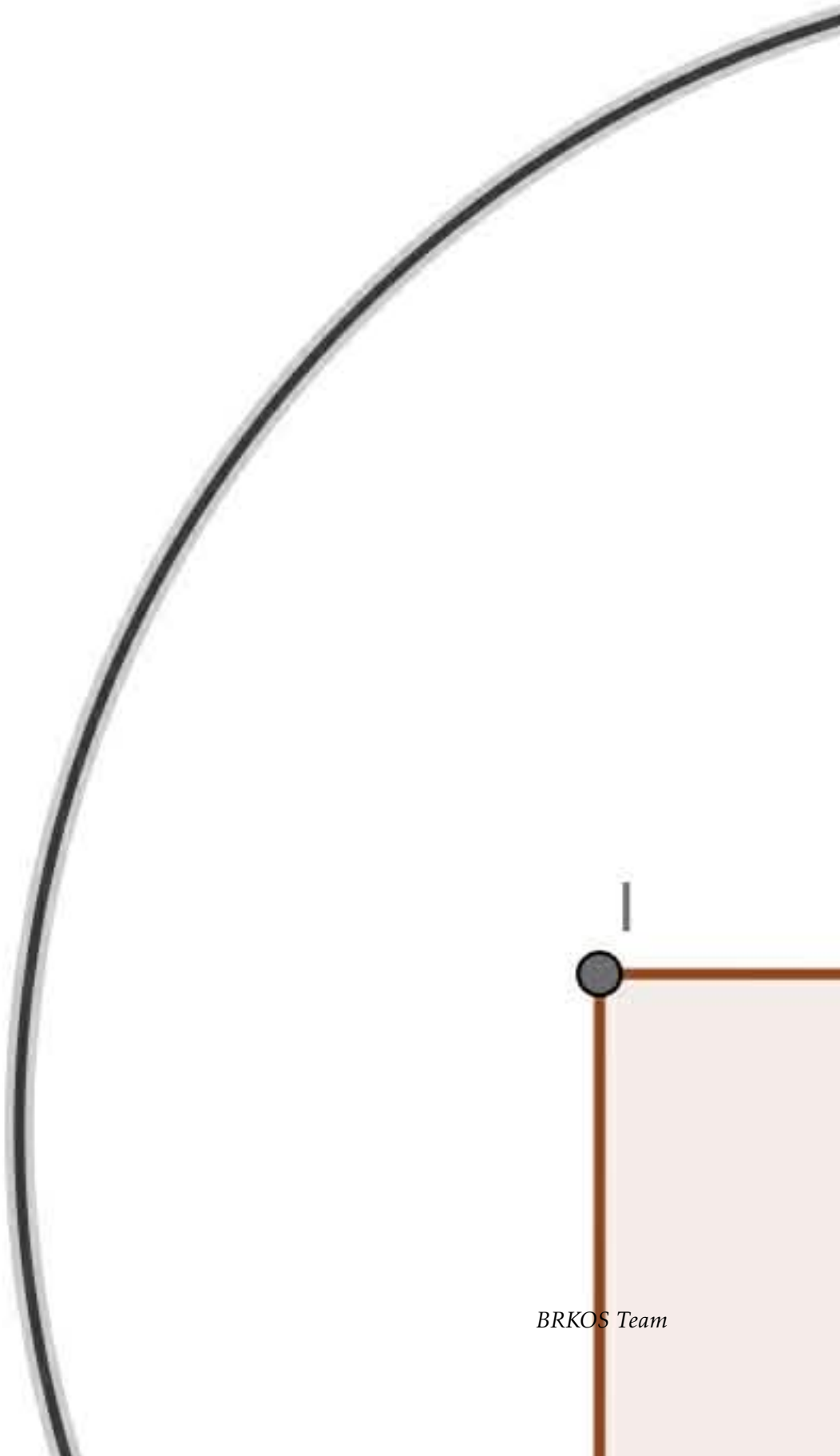


Strana $|SB| = R$, $|VB| = R \sin 10^\circ$, proto úhel

$$\sin VSB = \frac{|VB|}{|SB|} = \frac{R \sin 10^\circ}{R} = \sin 10^\circ,$$

tedy $|\sphericalangle VSB| = \arcsin(\sin 10^\circ) = 10^\circ$. Dva vrcholy menšího čtverce tedy svírají se středem kružnice úhel 20° . Rozdělíme si proto čtverec na $360/20 = 18$ dílů, tam se budou dotýkat vrcholy čtverce.

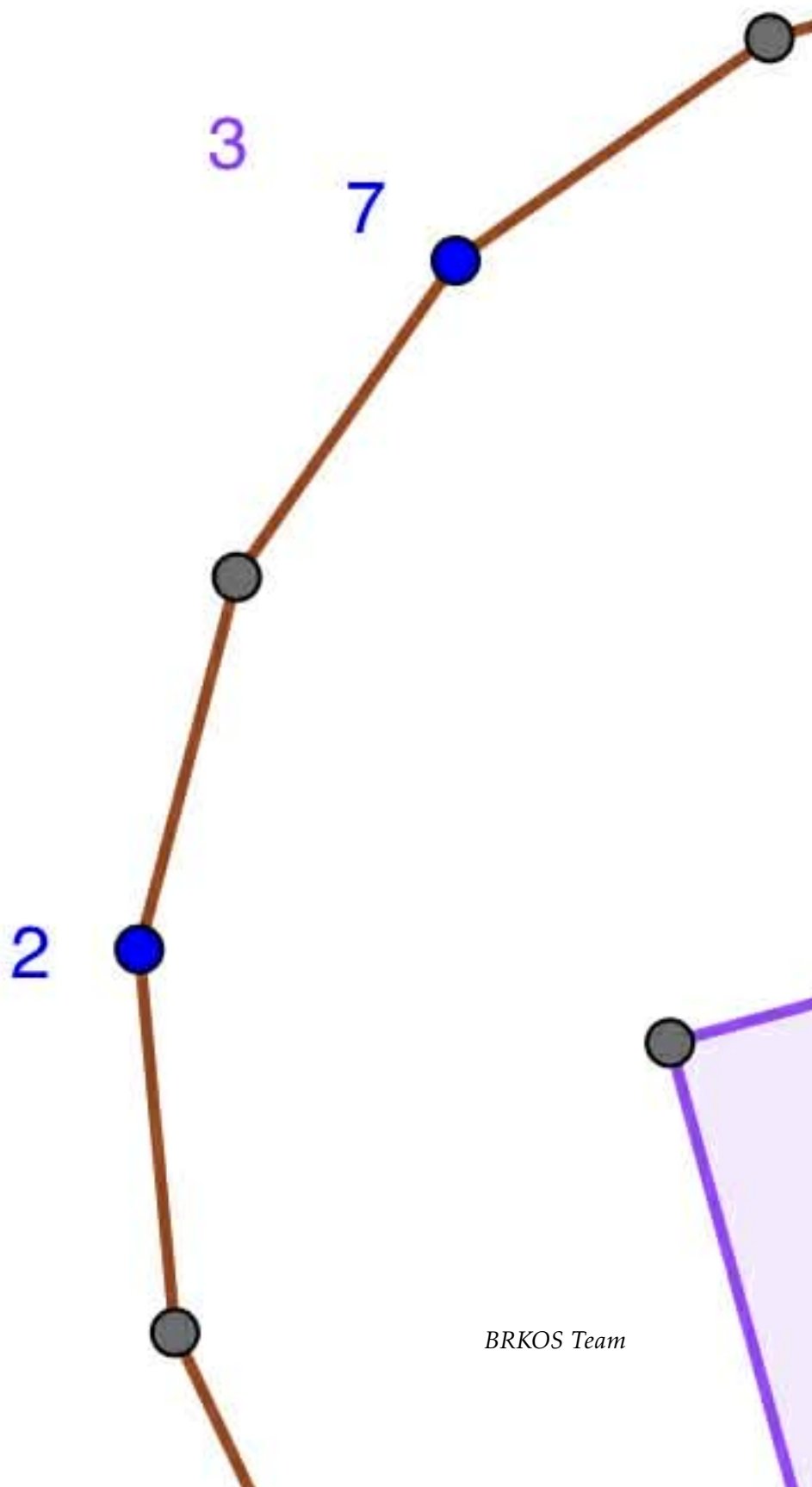
Analogicky spočítejme úhel ASB pro větší čtverec.



$$\sin \angle VSB = \frac{|VB|}{|SB|} = \frac{R \sin 30^\circ}{R} = \sin 30^\circ,$$

tedy $|\angle VSB| = \arcsin(\sin 30^\circ) = 30^\circ$. Dva vrcholy většího čtverce proto svírají se středem kružnice úhel 60° . Vrcholy čtverce se budou dotýkat vepsanému šestiúhelníku.

Popišme si pár prvních bodů, kam se zobrazí obarvený vrchol.



Obarvený vrchol většího čtverce bude střídát tři zvýrazněné vrcholy kam postupně bude vepisovat čísla se stejným zbytkem mod 3. Obarvený vrchol menšího čtverce zase bude postupně střídát 9 obarvených vrcholů, kam bude vepisovat čísla se stejným zbytkem mod 9. Tzn.

v bodě označeným teď 1,1 budou pro malý čtverec čísla kongruentní s 1 mod 9, tedy 1, 10, 19, 28, ..., pro velký čtverec zase čísla 1, 4, 10, ..., budou se tu shodovat ve všech indexech, který tu zanechá malý čtverec,

v bodě označeným 3,7 budou pro malý čtverec čísla kongruentní s 7 mod 9, tedy 7, 16, 25, 34, ..., pro velký čtverec zase čísla 3, 6, 9, ..., nebudou se tu shodovat nikdy,

v bodě označeným 2,4 budou pro malý čtverec čísla kongruentní s 4 mod 9, tedy 4, 13, 21, 30, ..., pro velký čtverec zase čísla 2, 5, 8, ..., nebudou se tu shodovat nikdy.

Potkat se stejným číslem se proto mohly pouze v počátečním vrcholu a to s indexy 1, 10, a napotřetí s indexem 19.

Vzhledem však k nejasnosti zadání (rychlosti čtverce) je samozřejmě možné počítat i s variantou, že na indexu nezáleží, jde jen o to, který bod bude jako třetí obarven oběma barvami. V tomto případě by pak řešením byl bod označený 3,7.

ÚLOHA 5.C - C – SCHODY DO NEBE

Finta s Ňoumou stojí na nekonečném schodišti. Chtějí se potkat (na stejném schodě), ale musejí se pohybovat podle určitých pravidel. Jeden z nich se pohne o 1 schod libovolným směrem. V dalším kroku se musí libovolný z nich pohnout o dvojnásobek schodů opět libovolným směrem. Kde musejí Finta s Ňoumou stát, aby se v konečném počtu kroků sešli na stejném schodě?

(Nemusejí se střídát a směr pohybu nahoru nebo dolů si můžou vybrat, nicméně pokud jeden z nich přejde po schodě, kde druhý stojí, nesmí se tam zastavit, musí splnit předepsaný počet kroků.)

ŘEŠENÍ: Označme vzdálenost mezi Fintou a Ňoumou jako d . Chceme, aby se potkali, tedy aby nastalo $d = 0$. Všimněme si, že nezáleží na tom, kdo se pohybuje – důležitá je pouze jejich vzájemná vzdálenost, která se v i -tém kroku změní o $\pm 2^{i-1}$.

Sudá vzdálenost

V prvním kroku se vzdálenost změní o 1, tedy ze sudé se stane lichá. V každém dalším kroku se mění o 2, 4, 8, ..., tedy vždy o sudé číslo. Součet nebo rozdíl lichého a sudého čísla je vždy lichý, takže vzdálenost zůstane lichá navždy. Protože 0 je sudé číslo, nemohou se Finta s Ňoumou nikdy potkat.

Lichá vzdálenost

Předpokládejme, že provádíme celkem n kroků o 1, 2, 4, ..., 2^{n-1} schodech. Každý krok přičte nebo odečte příslušný počet schodů od d . Označme P součet kroků, které provedeme směrem *k sobě*, a Q součet kroků směrem *od sebe*. Platí:

$$P + Q = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Jedná se o n -tý součet geometrické řady, kde $a = 1$ a $q = 2$. Počáteční vzdálenost d lze vyjádřit jako:

$$d = P - Q = P - (2^n - 1 - P) = 2P - (2^n - 1).$$

Ptáme se tedy, jakých hodnot může nabývat P (tj d). P je součet libovolné podmnožiny čísel $\{1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}\}$. Protože tato čísla jsou právě mocniny dvojky, každé celé číslo od 0

do $2^n - 1$ lze jednoznačně zapsat jako součet některých z nich (stejně jako v dvojkové soustavě). Tedy P může nabýt libovolné hodnoty od 0 do $2^n - 1$ a $d = 2P - (2^n - 1)$ může nabývat hodnot

$$-(2^n - 1), \dots, -3, -1, 1, 3, \dots, 2^n - 1,$$

tedy **všech lichých čísel** v intervalu $[-(2^n - 1), (2^n - 1)]$. Pro libovolně velké n pokryjeme libovolně velká lichá čísla.

Finta s Ňoumou se mohou v konečném počtu kroků potkat právě tehdy, když je jejich počáteční vzdálenost **lichá**.

ÚLOHA 5.D - D – PRSTEN MNOHOČLENŮ

Pro polynom f s celočíselnými koeficienty dokažte následující: Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že 12 dělí f^n právě tehdy, když 6 dělí každý z koeficientů.

ŘEŠENÍ: Máme dokázat ekvivalenci, rozdělíme si ji tedy na dvě implikace.

Nejprve předpokládejme, že 6 dělí každý z koeficientů f . Můžeme ji tedy vytknout a dostáváme $f = 6 \cdot g$ pro nějaký polynom g , který má též celočíselné koeficienty. Zvolme $n = 2$. Potom $f^n = f^2 = (6g)^2 = 36g^2$. Tento polynom je dělitelný 36, tedy zejména 12. Opravdu proto existuje n s takovou vlastností, třeba námi zvolená dvojka.

Naopak nechť existuje n takové, že 12 dělí f^n , tedy $f^n = 12h$ pro nějaký polynom h s celočíselnými koeficienty. Ukážeme, že potom musí 6 dělit každý z koeficientů f .

Nejprve ukažme, že 6 musí dělit absolutní člen polynomu f , označme ho a_0 . Absolutní člen b_0 polynomu f^n se bude rovnat a_0^n a my víme, že je dělitelný 12. Proto prvočísla 2 i 3 musejí dělit a_0 , tedy absolutní člen polynomu f je dělitelný 6.

Dále si uvědomme, jak budou vypadat ostatní koeficienty b_i polynomu f^n . Číslo b_i je koeficientem u mocniny x^i . To vznikne jako součet všech možností, jak vynásobit n koeficientů polynomu f , aby se součet jejich exponentů rovnal i :

$$b_i = \sum_{j_1 + \dots + j_n = i} a_{j_1} \cdot \dots \cdot a_{j_n}.$$

Už jsme ukázali, že a_0 je dělitelné 6, dále budeme postupovat induktivně k vyšším mocninám. Předpokládejme tedy, že a_i jsou dělitelné 6 pro všechna nezáporná celá $i \leq m - 1$, a dokažme, že i a_m je potom dělitelné 6.

Využijeme sumu výše pro $i = mn$. Je-li součet indexů $j_1 + \dots + j_n = mn$, mohou nastat dvě možnosti: buď jedno z j_k je menší než m , a tedy z indukčního předpokladu a_{j_k} je dělitelné 6, nebo jsou všechna $j_k = m$. Koeficient b_{mn} , o němž víme, že je dělitelný 12, je tedy součet několika součinů dělitelných 6 a součinu a_m^n . Odtud vidíme, že a_m^n musí být dělitelné 6, což stejně jako u absolutního členu implikuje, že a_m je dělitelné 6, což jsme měli ukázat.

Dohromady dostáváme, že všechny koeficienty polynomu f jsou dělitelné 6, takže i druhá implikace platí.