BRněnský KOrespondenční Seminář

XXXII. ročník
2025/2026

řešení 4. série

TEORIE ČÍSEL

úloha 4.1 - Najděte všechna přirozená čísla k taková, že ať si vezmeme za n libovolné přirozené číslo, bude $2^{kn}-1$ dělitelné sedmi.

řešení: Číslo $2^{kn}-1$ je dělitelné 7, právě když $2^{kn} \equiv 1 \bmod 7$.

Podívejme se, jak vypadají mocniny dvojky modulo 7: $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8 \equiv 1$, $2^4 = 16 \equiv 2$, $2^5 = 32 \equiv 4$, $2^6 = 64 \equiv 1$. Vypadá to, že se nám tvoří cyklus délky 3. Rozepišme si tedy jednotlivé možnosti podle toho, jaký zbytek dává exponent po dělení 3:

$2^{3m} = (2^3)^m = 8^m \equiv 1^m = 1 \bmod 7$,

$2^{3m+1} = 2 \cdot 2^{3m} \equiv 2 \cdot 1 = 2 \bmod 7$,

$2^{3m+2} = 4 \cdot 2^{3m} \equiv 4 \cdot 1 = 4 \bmod 7$, pro m přirozené.

Odtud už je jasné, že $2^{kn}-1$ bude dělitelné sedmi právě tehdy, když kn bude dělitelné třemi. My hledáme taková k, že n můžeme vzít libovolné, zejména to musí platit i pro $n = 1$. Z toho plyne, že k s touto vlastností musí být násobkem 3. Zároveň je jasné, že pokud k bude dělitelné 3, bude dělitelné 3 i kn, a tedy závěrem je, že hledaná k jsou právě násobky 3.

úloha 4.2 - Určete všechna přirozená čísla m pro která existuje přirozené n takové, že $\varphi(n) = \frac{n}{m}$.

řešení: Nejdříve zkontrolujeme speciální případ $n = 1 : \varphi(1) = 1 = \frac{1}{1}$, tedy dostáváme pro $m = 1$ existuje $n = 1$.

Nyní si můžeme n zapsat pomocí prvočíselného rozkladu: $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, kde $k \in \mathbb{N}$, p_i jsou pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ prvočísla a $a_i \in \mathbb{N}_0$ pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Ze vzorečků z pomocného textu můžeme odvodit následující vzorec (druhá rovnost platí díky nesoudělnosti prvočísel):

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \varphi(p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}) \\ &= \varphi(p_1^{a_1}) \cdot \varphi(p_2^{a_2}) \dots \varphi(p_k^{a_k}) \\ &= (p_1 - 1)p_1^{a_1-1} \cdot (p_2 - 1)p_2^{a_2-1} \dots (p_k - 1)p_k^{a_k-1}\end{aligned}$$

Dosadíme do vztahu $\varphi(n) = \frac{n}{m}$ a upravíme:

$$\begin{aligned}(p_1 - 1)p_1^{a_1-1} \cdot (p_2 - 1)p_2^{a_2-1} \dots (p_k - 1)p_k^{a_k-1} &= \frac{p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}}{m} \\ m \cdot (p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) \dots (p_k - 1) &= p_1 \cdot p_2 \dots p_k \\ m &= \frac{p_1 \cdot p_2 \dots p_k}{(p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) \dots (p_k - 1)}\end{aligned}$$

Všimněme si, že m není závislé na mocninách, ve kterých prvočísla byla v rozkladu n.

Nyní využijeme znalosti, že 2 je jediné sudé prvočíslo a naši situaci si rozdělíme dle výskytu 2 v prvočíselném rozkladu n.

1) n je liché

   V tomto případě by číslo m nebylo přirozené, jelikož čitatel v našem vyjádření m by byl lichý, ale ve jmenovateli by byla pouze sudá čísla.

2) $n = 2^a$

   Pro tento případ máme $m = \frac{2}{2-1} = 2$.

3) $n = 2^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$

   Dostáváme $m = \frac{2 \cdot p_2 \dots p_k}{(p_2-1)\dots(p_k-1)}$. Víme, že $p_2, \dots p_k$ jsou všechna lichá, a tedy všechna čísla ve jmenovateli budou sudá. V čitateli máme 2 pouze v první mocnině, a proto v prvočíselném rozkladu n může být kromě 2 jen jedno další prvočíslo. Máme $m = \frac{2p_2}{p_2-1}$. p_2 je dělitelné pouze 1 a samo sebou, proto $(p_2 - 1) \mid 2 \wedge p_2 > 2 \Rightarrow p_2 = 3$. Tudíž $m = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$ pro $n = 2^a \cdot 3^b$, kde $a, b \in \mathbb{N}$.

Celkem máme $m = 1$ pro $n = 1$, $m = 2$ pro $n = 2^a$ a $m = 3$ pro $n = 2^a \cdot 3^b$.

Úloha 4.3 - Na tabuli jsou napsána 3 celá čísla. Lojza se nudí, a tak si v každém kroku vybere dvě čísla z tabule která buď sečte, nebo odečte a výsledek napíše místo libovolného čísla na tabuli. Za jakých podmínek bude schopný takto po konečně mnoha krocích vytvořit libovolné celé číslo které si vymyslí?

Řešení: Nejprve ukážeme, že pokud mají všechna tři čísla společný dělitel větší než 1, nezvládneme to. Označme tento společný dělitel d. Poté součet i rozdíl libovolných dvou čísel bude opět dělitelný d. Tedy každé číslo které vytvoříme bude dělitelné d, tedy nezvládneme vytvořit například jedničku.

Naopak, pokud největší společný dělitel všech tří čísel je 1, ukážeme, že se nám to podaří. Označme čísla na tabuli a, b, c. Začněme s čísly a, b. Použitím Eukleidova algoritmu dosáhneme toho, že na tabuli budou čísla $0, nsd(a, b), c$. Konkrétně z čísel a, b nahradíme to, které má větší absolutní hodnotu číslem, které vznikne jako rozdíl (resp. součet) tohoto čísla s druhým číslem, pokud je druhé číslo stejného (resp. opačného) znaménka. Například z trojice $(5, 7, 13)$ uděláme trojici $(5, 2, 13)$ odečtením, ale z trojice $(-5, 7, 13)$ uděláme trojici $(-5, 2, 13)$ přičtením. Celkově tedy snižujeme absolutní hodnoty součtu, než se po konečném počtu kroků dostaneme do stavu, $(0, nsd(a, b), c)$. Stejný postup uděláme pro čísla $nsd(a, b)$ a c a po konečném počtu kroků dojdeme do stavu $(0, 0, nsd(nsd(a, b), c)) = (0, 0, nsd(a, b, c)) = (0, 0, 1)$. (resp. $(0, 0, -1)$). Jedničku už můžeme kolikrát chceme přičíst a odečíst k nule a získat libovolné celé číslo.

Úloha 4.4 - Pro přirozené číslo definujeme jeho *pm součet* podobně jako ciferný součet, akorát cifru na pozici jednotek přičteme, cifru na pozici desítek odečteme, cifru na pozici stovek přičteme atd. *Pm součet* záporného čísla je *−pm součet* jeho absolutní hodnoty. Určete *pm součet pm součtu pm součtu* čísla $2026^{2025 \times 2027}$.

Řešení: libovolné číslo x můžeme zapsat jako

$$x = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + 10^3 a_3 \dots,$$

kde a_i jsou jeho cifry. Když si nyní označíme *pm součet* čísla x jako $pm(x)$, dostáváme:

$$pm(x) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \dots.$$

Z kritéria dělitelnosti číslem 11 víme, že $x \equiv 0 \pmod{11} \leftrightarrow pm(x) \equiv 0 \pmod{11}$. Podíváme se tedy na to obecně. Zřejmě $10 \equiv -1 \pmod{11}$ a tedy $10^n \equiv (-1)^n$ bude kongruentní s 1 pro sudá n a s -1 pro lichá n. Dostáváme:

$$x = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 \cdots \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \cdots = pm(x) \pmod{11}$$

a tedy

$$pm(pm(pm(x))) \equiv pm(pm(x)) \equiv pm(x) \equiv x \pmod{11}.$$

Pro výpočet nyní využijeme fakt, že $x \equiv y \pmod{m} \to x^k \equiv y^k \pmod{m}$ a Malou Fermtovu větu (chcete-li, můžete použít Eulerovu ;)), ze které plyne, že $x^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. Dostáváme tedy:

$$2026^{2025\times 2027} \equiv 2^{2025\times 2027} = 2^{2026^2-1} \equiv 2^{6^2-1} \equiv 2^5 \equiv 10 \pmod{11}.$$

Nyní víme, že náš výsledek musí dávát zbytek 10 po dělení 11. Je potřeba ho nějak omezit. Zřejmě $2025 < 2026 < 2027 < 10^4$, tzn.

$$2026^{2025\times 2027} < 10^{4\times 10^4\times 10^4}.$$

Číslo $10^{4\times 10^8}$ má $4 \times 10^8 + 1$ cifer a je nejmenší takové a tedy naše číslo $2026^{2025\times 2027}$ má nejvýše 4×10^8 cifer. Jakou hodnotu tedy může mít $pm(2026^{2025\times 2027})$? Nejvyšší hodnota by nastala, kdyby na všech sudých pozicích (tzn. a_n pro n sudé) byly devítky a na těch lichých naopak nuly. Pro to nejmenší by to bylo analogicky, ale prohozené pozice. Dostáváme tedy:

$$|pm(2026^{2025\times 2027})| \leq 9 \times \frac{4\times 10^8}{2} = 18 \times 10^8 < 2 \times 10^9.$$

Aplikací prvního *pm součtu* se nám tedy snížil počet cifer už jen na 10. Stejnou úvahou dostáváme:

$$|pm(pm(2026^{2025\times 2027}))| \leq 9 \times \frac{10}{2} = 45,$$

tzn. 2 cifry a poslední aplikací *pm součtu* získáváme:

$$|pm(pm(pm(2026^{2025\times 2027})))| \leq 9 \times \frac{2}{2} = 9.$$

Náš výsledek je tedy někde v množině $\{-9,-8,\dots 8,9\}$ a dává zbytek 10 po dělení jedenácti. Jediné takové číslo je -1.

Úloha 4.a - Přístroj věštce Devěta fungoval tak, že se do něj připojí dva lidé a těm se prohodí jejich mysli (tzn. např. Lojzova mysl pak žije v Radinině těle a naopak). Nicméně pak se do výměny zapojili další studenti Brkosovic, kterých je celkem n. Po čase je to ale omrzelo a chtěli se pomocí stejného přístroje vrátit zpátky. Kolik nejméně sezení u věštce Devěta si musí zabukovat, aby se určitě vrátili zpátky, ať už bylo předchozí prohození libovolné?

Řešení: Nejprve ukáži strategii, která pomocí nejvýše $n-1$ výměn dokáže vrátit všem n lidem jejich duši, ať už je počáteční rozestavení jakékoliv.

Postupně budu procházet těla lidí a pokud některé nebude mít svoji duši, vezme si ji. Pokud na začátku mělo každé tělo cizí duši, po $n-1$ krocích bude mít těchto $n-1$ těl svoji duši. Na poslední tělo zbývá poslední duše, která musí být jeho, tudíž každé tělo má svoji duši. Pokud by na začátku mělo k těl svoji duši, stačilo by nám dokonce jen $n-1-k$ výměn. Ovšem nestačilo by méně než $n-1$ výměn?

Pojďme si to ukázat na příkladě, kdy se lidé postaví do kruhu a každý dá svoji duši tomu po pravici. V tomto případě vznikne cyklus délky n, kde žádné tělo nemá svoji duši.

Pokud dojde k jakékoliv výměně, rozpadne se cyklus na dva menší cykly délek k a l, pro které platí $k+l=n$.

Teď indukcí dokážeme, že libovolný cyklus délky n lze vyřešit nejméně $n-1$ výměnami.

Báze: Pro cyklus délky 1 potřebujeme 0 výměn. Pro cyklus délky 2 potřebujeme 1 výměnu.

Indukční předpoklad: Pokud pro každý cyklus délky $m<n$ platí, že jej lze vyřešit nejméně $m-1$ výměnami, tak lze cyklus délky n vyřešit nejméně $n-1$ přeměnami.

Důkaz: Jak jsme si již ukázali, jakoukoliv výměnou se cyklus délky n rozdělí na dva cykly délek k a l, kde $k+l=n$. Tyto cykly jsou menší než n, tudíž z indukčního předpokladu víme, že je lze vyřešit nejméně $k-1$, respektive $l-1$ výměnami. Jelikož jsme použili jednu výměnu k rozdělení cyklu na dva, dostáváme celkem

$$(k-1)+(l-1)+1=k+l-1=n-1$$

výměn.

Tudíž jsme dokázali, že cyklus délky n lze v vyřešit nejméně $n-1$ výměnami a na začátku jsme ukázali, že libovolné rozpoložení n duší lze určitě vyřešit pomocí $n-1$ výměn. Výsledek je tudíž $n-1$.

Úloha 4.b - Dokažte, že pro libovolný trojúhelník s vrcholy A, B, C existují tři kružnice se středy v bodech A, B, C takové, že se po dvou dotýkají (každá dvojice kružnic má právě jeden společný bod). Dokažte, že jsou tyto kružnice určeny jednoznačně.

Řešení: Nechť a,b,c značí délky stran trojúhelníka ABC protilehlé vrcholům A,B,C. Označme r_A,r_B,r_C poloměry hledaných kružnic se středy v těchto bodech. Bod dotyku dvou kružnic vždy leží na spojnici středů kružnic, proto budou body dotyků ležet na stranách trojúhelníka a jejich poloměry musejí splňovat následující rovnice:

$$\begin{aligned} r_A+r_B&=c\\ r_A+r_C&=b\\ r_B+r_C&=a \end{aligned}$$

Sečtením všech tří rovnic získáme $2(r_A+r_B+r_C)=a+b+c$. Označme si délku $s=\frac{a+b+c}{2}$, platí: $r_A+r_B+r_C=s$.

Odečtením původních rovnic (1), (2) a (3) od tohoto součtu dostáváme jednoznačné vyjádření poloměrů: $r_A=s-a,\quad r_B=s-b,\quad r_C=s-c$

Nyní potřebujeme ukázat, že tyto délky jsou vždy kladné a hledané kružnice tedy existují. Zaměřme se na poloměr r_A:

$$
\begin{aligned}
0 &< r_A \\
0 &< s - a \\
0 &< \frac{a+b+c}{2} - a \\
0 &< \frac{-a+b+c}{2} \\
0 &< -a+b+c \\
a &< b+c
\end{aligned}
$$

Po úpravě této nerovnosti jsme získali nerovnost $a < b+c$, přičemž se nejedná o nic jiného než trojúhelníkovou nerovnost, kterou délky stran trojúhelníka vždy splňují. Analogicky jsme schopni z nerovností $0 < r_B$ a $0 < r_C$ dostat $b < a+c$ a $c < a+b$.

Vzhledem k nejednoznačnosti našeho zadaní, není jednoznačnost těchto kružnic plně zajištěna. Při vymýšlení této úlohy jsme brali v potaz pouze vnější dotyk kružnic, jak je řešení ukázáno výše. V tomto případě jsou kružnice dány jednoznačně (vzhledem k délkám stran trojúhelníka). Pokud však povolíme vnitřní dotyk kružnic, úloha nebude mít jednoznačné řešení.

Pokud povolíme vnitřní dotyk, změní se podmínky pro délky poloměrů. Tato situace geometricky odpovídá konfiguraci, kdy jedna kružnice vnitřně obepíná zbývající dvě. Bod dotyku kružnic bude stále ležet na spojnici středů kružnic (vrcholů trojúhelníka), ale tentokrát mimo stranu. Pro případ, kdy kružnice se středem A obepíná ostatní, dostáváme soustavu:

$$
\begin{aligned}
r_A - r_B &= c \\
r_A - r_C &= b \\
r_B + r_C &= a
\end{aligned}
$$

Řešením této soustavy (a jejích symetrických variant) získáme další tři řešení:

$$(r_A, r_B, r_C) \in \{(s, s-c, s-b), (s-c, s, s-a), (s-b, s-a, s)\}$$

Kladnost těchto délek máme již dokázanou. Celkem tedy existují právě čtyři trojice kružnic splňující podmínku dotyku (jedna vnější a tři vnitřní).

ÚLOHA 4.C - Devět se rozhodl si přebarvit rubikovu kostku 3×3×3. Obarvuje jednotlivé čtverečky pomocí šesti barev. Vždy, když dva sousední (hranou) čtverečky budou mít stejnou barvu, dostane Devy bod. Kolik nejvíce může získat bodů, jestliže každou barvu musí použít alespoň jednou?

ŘEŠENÍ:

ÚLOHA 4.D - Mějme pravidelný dvanáctistěn s hranou délky 1. Do něj vepíšeme dvacetistěn tak, že spojíme středy sousedních stěn. Do takhle vzniklého dvacetistěnu vepíšeme dvanáctistěn tak, že opět spojíme středy sousedních stěn. Tímto způsobem postupně vytvoříme nekonečně mnoho střídajících se dvanáctistěnů a dvacetistěnů. Sečtěte objemy všech vzniklých těles.

BRKOS Team

Řešení: Vzorové řešení bylo inspirováno postupem Petra Starého, děkujeme za pěkné řešení.

Naším cílem je spočítat objem pravidelného dvacetistěnu. K tomu si jej rozdělíme na 20 trojbokých jehlanů, jejichž podstavy budou stěny dvacetistěnu a společný vrchol je střed dvacetistěnu. Ze znalosti vzorce pro objem jehlanu tak dostáváme vzorec:

$$V = 20\frac{1}{3}Ah$$

Podstava je rovnostranný trojúhelník, který má obsah:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Pro výpočet výšky jehlanů si spočítáme poloměr koule opsané dvacetistěnu, který označíme r. Dále vybereme libovolný pětiboký jehlan tvořený trojúhelníky okolo jednoho vrcholu. Jeho výšku označíme v a poloměr kružnice opsané podstavy s. Tento poloměr určíme jako poloměr kružnice opsané pětiúhelníku se stranou a. Ze znalosti velikosti vnitřního úhlu pravidelného pětiúhelníku zřejmě platí:

$$\sin(\frac{72^\circ}{2}) = \frac{\frac{a}{2}}{s}$$

A tedy:

$$s = \frac{a}{2\sin(36^\circ)}$$

Nyní známe délku s v závislosti na a a můžeme z Pythagorovi věty dopočítat v:

$$a^2 = v^2 + s^2$$

$$v = a\sqrt{1 - \frac{1}{4\sin^2(36^\circ)}}$$

Díky pravému úhlu u středu pravidelného pětiúhelníku lze dostat ještě další rovnice a máme tak soustavu:

$$v^2 + s^2 = a^2$$
$$s^2 + (r - v)^2 = r^2$$

Úpravami obou rovnic dostaneme:

$$a^2 = 2rv$$

Následně můžeme konečně vyjádřit r jen v závislosti na a:

$$r = \frac{a^2}{2v} = \frac{a}{2}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4\sin^2(36^\circ)}}}$$

Nyní můžeme dopočítat i v pomocí Pythagorovy věty:

$$v = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{3}}$$

BRKOS Team

Využijeme toho, že $\sin^2(36°) = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$ a dostáváme dosazením do našeho vzorce pro objem:

$$V = \frac{5}{12}(3+\sqrt{5})a^3$$

Dále určíme vzdálenost středů dvou sousedících stěn pravidelného dvacetistěnu, abychom dostali délku hrany pravidelného dvanáctistěnu. K tomu využijeme výpočtu nejdelší úhlopříčky pětiúhelníku, který tvoří základnu našeho pětibokého jehlanu. Pak lze z podobnosti trojúhelníků ukázat, že spojnice středů dvou sousedících stěn pravidelného dvacetistěnu je oproti úhlopříčce třetinová. Samotná úhlopříčka má délku:

$$a' = 2a\cos(36°),$$

přičemž

$$\cos(36°) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Okamžitě tedy vidíme, že spojnice středů má délku:

$$b = \frac{1+\sqrt{5}}{6}.$$

U dvanáctistěnu budeme postupovat podobně, pouze zjistíme objemy pětibokých jehlanů. Použijme známý fakt, že správně zvolené vrcholy tvoří krychli. Střed dvanáctistěnu označíme X. Vyberme libovolnou stěnu a její vrcholy označme postupně $ABCDE$. Poté lze vzdálenost AX rčit pomocí délky úhlopříčky AC.

$$AX = \frac{\sqrt{3}}{2}AC.$$

Pokud H je střed $ABCDE$, tak AH odpovídá poloměru kružnice opsané, takže z Pythagorovy věty určíme výšku XH. Obsah pětiúhelníku je známý, tedy stačí celý dvanáctistěn opět rozdělit na shodné pětiboké jehlany.

$$V = 12\frac{1}{3}Ah = a^3\frac{15+7\sqrt{5}}{4}$$

Závěrem ještě určíme vzdálenost středů sousedních stran. K tomu určíme z Pythagorovy věty a kružnice opsané poloměr r kružnice vepsané stěně. Následně si určíme úhel, který dvě stěny svírají:

$$\tan(\phi/2) = \frac{XH}{r}$$

Konečně pomocí kosinové věty a kružnice vepsané určíme vzdálenost středů:

$$b = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}a$$

Nyní již známe všechny potřebné informace pro výpočet součtu objemů. Délky hran těles zjevně klesají lineární, dostáváme tak geometrickou posloupnost. Nejprve určíme koeficient q změny objemů dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti, kde jeden člen posloupnosti je součet objemů po sobě jdoucího dvacetistěnu a dvanáctistěnu. Zdůrazněme ještě, že to bude třetí mocnina koeficientu změny délek hran, jelikož objem se mění se třetí mocninou délky hran.

$$q = (\frac{5+3\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{6})^3 = (\frac{5+2\sqrt{5}}{15})^3$$

Ještě určeme počáteční objem V čistě dosazením. První člen výrazu je objem dvanáctistěnu s délkou hrany 1, druhý člen je objem dvacetistěnu s délkou hrany rovnou spojnici středů stěn tohoto dvanáctistěnu.

$$V = \frac{15+7\sqrt{5}}{4} + \frac{5(3+\sqrt{5})}{12}\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)^3$$

Posledním krokem je použít vzorec pro součet nekonečné geometrické řady s výše spočítaným počátečním objemem a kvocientem menším než 1:

$$S = \frac{V}{1-q} = \frac{503055+229995\sqrt{5}}{68176} \doteq 14.9223.$$

Zadání neuvádí jednotku délky, proto je řešení v obecných jednotkách krychlových.

BRKOS Team