

BRněnský KOrespondenční Seminář



XXXII. ročník
2025/2026

ŘEŠENÍ 3. SÉRIE

POSLOUPNOSTI

ÚLOHA 3.1 - Mějme rekurentně definovanou posloupnost

$$T_0 = 0, T_1 = 1, T_2 = -1$$

$$T_n = T_{n-2} - T_{n-3}.$$

Dokažte, že se v posloupnosti vyskytuje pouze konečně mnoho nul.

ŘEŠENÍ: Vypíšeme si prvních pár členů posloupnosti:

$$T_0 = 0, T_1 = 1, T_2 = -1, T_3 = 1, T_4 = -2, T_5 = 2 \dots$$

Vidíme, že při výpočtu dalších a dalších členů posloupnosti nastane vždy jeden ze dvou případů: buď od kladného čísla odečítáme záporné, nebo od záporného čísla odečítáme kladné. Nabízí se tedy tvrzení, které už jednoduše dokážeme indukcí.

Tvrzení: Pro $n \in \mathbb{N}$ je $T_{2n-1} > 0$ a $T_{2n} < 0$.**Důkaz:** Bázový krok $n = 1$: $T_1 = 1 > 0, T_2 = -1 < 0$

Předpokládejme, že tvrzení bylo dokázáno pro všechna $n \in \{1, 2, \dots, k\}$ a my ho nyní chceme dokázat pro $n = k + 1$.

$T_{2(k+1)-1} = T_{2k+1} = T_{2k-1} - T_{2(k-1)}$ Z předpokladů ale víme, že $T_{2k-1} > 0$ a $T_{2(k-1)} < 0$. Celkem tedy dostáváme $T_{2(k+1)-1} = T_{2k-1} - T_{2(k-1)} > 0$.

$T_{2(k+1)} = T_{2k+2} = T_{2k} - T_{2k-1}$ Z předpokladů ale opět už víme, že $T_{2k} < 0$ a $T_{2k-1} > 0$. Celkem tedy máme $T_{2(k+1)} = T_{2k} - T_{2k-1} < 0$, čímž je tvrzení dokázáno.

Od indexu 1 budou členy posloupnosti tedy vždy buď kladné (pro liché indexy), nebo záporné (pro sudé), nikoli však nulové. Posloupnost tedy obsahuje konečný počet nul a to konkrétně jednu $T_0 = 0$.

ÚLOHA 3.2 - Množinu M přirozených čísel nazveme skibidi, jestliže každý její prvek kromě dvou lze jednoznačně vyjádřit jako součet jiných dvou prvků. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho nekonečně velkých skibidi množin.

ŘEŠENÍ: Definujme posloupnost $a_1 = 1, a_2 > 1 \in \mathbb{N}, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, pro $n > 2$. Ukážeme, že množina M prvků této posloupnosti je skibidi. Posloupnost je zřejmě rostoucí a každý člen přirozený. Proto existují nejmenší dva prvky množiny M , jsou jimi právě a_1, a_2 . Tyto nejdou zapsat ve tvaru součtu jiných prvků z množiny M . Každý další lze vyjádřit ve tvaru součtu jako $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. *Předpokládejme, že lze jiným způsobem. Buď jeden z operandů musel být větší nebo rovný a_n , potom by i součet byl větší než a_n . V opačném případě budou oba sčítance menší nebo rovny než a_{n-1} , tudíž jejich součet bude menší než a_n . Vyjádření součtu je tedy jednoznačné, proto je M skibidi.*

Množina M je zjevně nekonečně velká.

Nekonečné množství těchto nekonečných skibidi množin zaručíme nekonečným množstvím možností pro volbu a_2 .

ÚLOHA 3.3 - Mějme rekurzivně definovanou posloupnost: $a_{n+1} = \left(\frac{n!}{a_n}\right)^{(-1)^n}$ a víme, že $a_{2025} = \frac{2025!}{a_1}$. Jakých všech hodnot může nabývat a_1 ? Výsledek nemusíte vyčíslit.

ŘEŠENÍ: Uvažujme a_n liché a vyjádřeme jeho pomocí další členy:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n}{n!}, \\ a_{n+2} &= \frac{(n+1)!}{a_{n+1}} = \frac{n!(n+1)!}{a_n}, \\ a_{n+3} &= \frac{a_{n+2}}{(n+2)!} = \frac{n!(n+1)!}{(n+2)!a_n}, \\ a_{n+4} &= \frac{(n+3)!}{a_{n+3}} = a_n \frac{(n+3)!(n+2)!}{n!(n+1)!} = a_n(n+1)(n+2)^2(n+3) \end{aligned}$$

Vidíme, že lze poměrně elegantně vyjádřit a_{n+4k} pomocí a_n . To se nám hodí, neboť $4|(2025-1)$ a můžeme takto vyjádřit a_{2025} pomocí a_1 . Celkem máme dvě různá vyjádření pro vztah mezi a_1 a a_{2025} :

$a_{2025} = \frac{2025!}{a_1}$ a $a_{2025} = a_1(2 \cdot 3^2 \cdot 4)(6 \cdot 7^2 \cdot 8) \cdots (2022 \cdot 2023^2 \cdot 2024)$, jejich spojením a úpravami dostáváme

$$a_1^2 = \frac{2025!}{(2 \cdot 3^2 \cdot 4)(6 \cdot 7^2 \cdot 8) \cdots (2022 \cdot 2023^2 \cdot 2024)} = \frac{5}{3} \frac{9}{7} \cdots \frac{2025}{2023} \Rightarrow a_1 = \pm \sqrt{\frac{5}{3} \frac{9}{7} \cdots \frac{2025}{2023}}$$

pozn. Uznávali jsme i řešení bez vykrácení faktoriálů - výsledek je pak tvaru $a_1 = \pm \sqrt{\frac{2025!2022!2021!2018! \cdots 2!1!}{2024!2023!2020! \cdots 4!3!}}$

ÚLOHA 3.4 - Máme nekonstantní posloupnost A 2025 čísel. V prvním kroku vytvoříme novou posloupnost B tak, že jako i -tý člen vezmeme minimum i -tého člene předchozí posloupnosti a aritmetického průměru jeho dvou sousedních členů, tedy $b_i = \min\left\{a_i, \frac{(a_{i-1}+a_{i+1})}{2}\right\}$. (Bereme to tak, že první a poslední člen spolu sousedí.) V druhém kroku vytvoříme stejným způsobem posloupnost C z posloupnosti B , pak D z C a tak dále. Řekneme, že posloupnost se ustálí, pokud už se v dalších krocích nemění. Po kolika krocích se může posloupnost ustálit?

ŘEŠENÍ: Nejdřív se podívejme, jak může vypadat ustálená posloupnost. Je zřejmé, že konstantní posloupnost je ustálená, a sporem dokážeme, že žádná jiná už ne. Pripusťme, že máme posloupnost, která je ustálená, ale není konstantní. Potom v takové posloupnosti existuje maximální prvek (největší nebo jeden z největších) x_i takový, že $x_{i+1} < x_i$. Jelikož je posloupnost ustálená, znamená to, že

$$\min\left\{x_i, \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2}\right\} = x_i,$$

tedy že

$$x_i \leq \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2}.$$

Spolu s $x_{i+1} < x_i$ z toho vyplývá $x_{i-1} > x_i$, což je ale spor s tím, že x_i je maximální prvek.

Nyní nám zbývá vyšetřit, po kolika krocích se z nekonstantní posloupnosti může stát konstantní. Určitě to může nastat po jednom kroku – třeba v posloupnosti, která obsahuje jednu jedničku a jinak samé nuly. Naopak existují posloupnosti, které se neustálí nikdy,

stačí vzít posloupnost se dvěma sousedícími jedničkami a samými nulami jinde. Nulové členy se v každém kroku zmenší na polovinu zprůměrováním s nulou a ke konstantní posloupnosti sice budeme konvergovat, ale v konečném počtu kroků ji nedosáhneme.

Mějme posloupnost a předpokládejme, že se po několika krocích ustálí. Označme y její minimální prvek. Proces tvoření nových posloupností je nerostoucí pro každý člen, proto minimální prvky budou vždy menší nebo rovny y a jistě nemůžeme dosáhnout menšího prvku než y zprůměrováním nějakých větších. Proto se posloupnost musí ustálit tak, že všechny prvky budou rovny y .

Aby se člen různý od y změnil na y , musí průměr jeho sousedů být y . Jelikož jde o minimální prvek celé posloupnosti, musejí oba sousedé být rovni y . Máme-li na začátku dva sousedící prvky, které jsou oba ostře větší než y , nemohou nikdy na odpovídajících místech vzniknout y . Došli jsme k tomu, že aby se posloupnost někdy ustálila, musí minimální prvek y být nejméně na každém druhém místě. Taková posloupnost se zřejmě ustálí v jediném kroku.

Závěrem tedy je, že pokud se posloupnost ustálí, je to vždy po právě jednom kroku.

ÚLOHA 3.A - $P(x)$ je polynom s celočíselnými koeficienty a konečným počtem členů. Platí pro něj $xP(x+1) = (x+1)P(x+3)$. Najděte všechny vyhovující polynomy.

ŘEŠENÍ: Dosadíme $x = 0$:

$$\begin{aligned} xP(x+1) &= (x+1)P(x+3) \\ 0 &= P(3) \end{aligned}$$

Z čehož vyplývá, že 3 je také kořen. Ukážeme, že lichá čísla větší než 2 jsou kořenem. Jak? Matematickou indukcí.

Bázový krok: Pro $2k+1 = 3$ je 3 kořenem.

Indukční krok: Předpokládejme, že pro všechna $1, \dots, k$ jsou $3, 5, \dots, 2k+1$ kořenem polynomu $P(x)$. Pak dosadíme za $x = 2k$

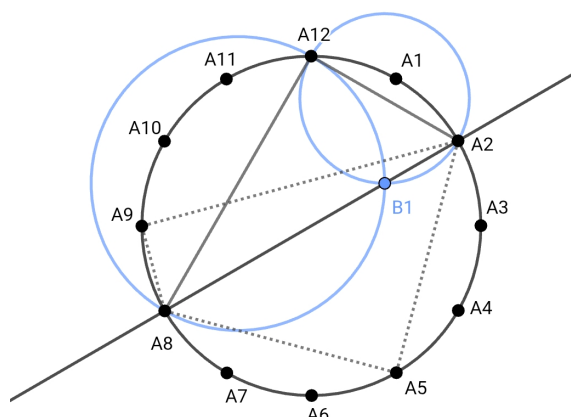
$$\begin{aligned} 2kP(2k+1) &= (2k+1)P(2k+3) \\ 0 &= (2k+1)P(2k+3) \end{aligned}$$

Protože $2k+1$ bylo kořenem polynomu tak je levá strana nulová. Protože navíc $2k+1$ je kladné, dostáváme $P(2k+3) = 0$, tedy, že $2k+3$ je kořenem. Polynom má kořen ve všech lichých číslech. Víme, že polynom n -tého stupně má nejvýše n kořenů. Jediný polynom s nekonečně mnoha kořeny je polynom konstantně nulový.

ÚLOHA 3.B - Máme hodiny. Zaznačíme si body $A_{12}, A_2, A_5, A_8, A_9$, kde index určuje pozici na ciferníku. Označme si bod B_1 jako druhý průsečík kružnic nad úsečkami A_2A_{12}, A_8A_{12} (jako první průsečík bereme společný bod úseček). B_2 bude druhý průsečík kružnic nad A_2A_5, A_5A_8 . B_3 druhý průsečík kružnic nad A_8A_9 a A_2A_9 . Ukažte, že B_1, B_2 a B_3 leží na jedné přímce.

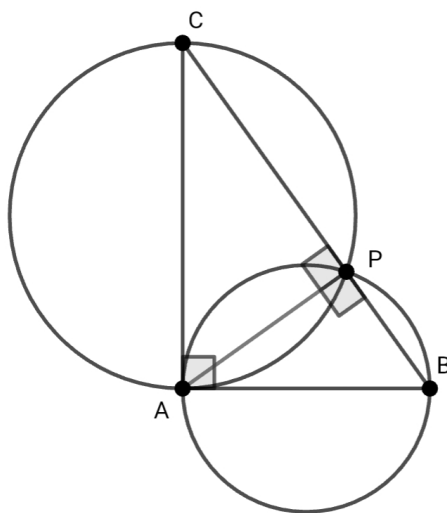
Pozn.: sestavení kružnice nad úsečkou znamená, že střed kružnice bude ve středu úsečky a krajní body úsečky leží na dané kružnici (úsečka tvoří průměr kružnice)

ŘEŠENÍ: Máme náčrt našeho příkladu.



Díky pravidelnosti ciferníku víme, že úsečka A_2A_8 je průměrem našeho ciferníku. Také si můžeme všimnout, že všechny zadané trojice bodů $(A_2, A_{12}, A_8; A_2, A_5, A_8; A_2, A_9, A_8)$ obsahují body A_2, A_8 . Thaletova věta nám říká, že trojúhelníky tvořené těmito trojicemi budou pravoúhlé a mají společnou přeponu A_2A_8 .

Nyní se podíváme na libovolný pravoúhlý trojúhelník.



Obě odvěsny jsou průměry nových Thaletových kružnic a jejich průsečík P splňuje $|\angle APB| = 90^\circ = |\angle APC|$. Úhel $\angle BPC$ je rovinný a průsečík P leží na přeponě trojúhelníku.

Při návratu k původnímu problému můžeme naši myšlenku aplikovat na všechny tři trojúhelníky. Tím dostaneme, že body B_1, B_2, B_3 budou ležet na přeponě příslušného trojúhelníku. A jelikož trojúhelníky mají společnou přeponu A_2A_8 , budou body ležet nejen na jedné přímce, ale na společné úsečce.

ÚLOHA 3.c - Určete přirozené číslo n takové, že platí:

$$\sum_{i=-n}^n \left\lfloor \left\lceil \frac{|i|}{2} \right\rceil \right\rfloor \sin\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \left\lfloor \frac{|i|+1}{2} \right\rfloor \cos\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2054363.$$

Pozn.: $\lceil \cdot \rceil$ představuje horní celou část

ŘEŠENÍ: Nejprve se podívám, jak se mi prvky sumy ze zadání liší pro různá n :

i je **liché** ($i = 2k + 1$), takže u kosinu dostávám $\cos(k \cdot \pi + \frac{\pi}{2})$, což je 0. Naopak sinus bude nabývat hodnot ± 1 (díky absolutní hodnotě můžu nebrat v úvahu). Nakonec se ještě zbavím zaokrouhlení nahoru. Výraz se mi tedy zjednoduší na:

$$\left| \left\lceil \frac{|i|}{2} \right\rceil \sin\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \left\lceil \frac{|i|+1}{2} \right\rceil \cos\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right| = \left| \left\lceil \frac{|i|}{2} \right\rceil \sin\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right| = \left\lceil \frac{|i|}{2} \right\rceil = \frac{|i|+1}{2} = |k| + 1$$

Tedž ukážu, že výraz bude nabývat stejných hodnot pro i a $-i$. Jediné místo, kde se i nachází mimo absolutní hodnotu, je ve funkcích sinus a kosinus. Jelikož stále bude platit, že kosinus bude roven 0, tak nám zbývá jenom sinus. Funkce sinus je lichá funkce: $\sin(-x) = -\sin(x)$. Jelikož je ale celý výraz v absolutní hodnotě, na znaménku nám nezáleží. Pro liché i tedy platí, že výraz nabývá stejných hodnot pro i a $-i$.

i je **sudé** ($i = 2k$), provedu stejné úpravy jako pro liché i . Jediný rozdíl bude ten, že tentokrát bude sinus roven 0 a kosinus bude nabývat hodnot ± 1 :

$$\left| \left\lceil \frac{|i|}{2} \right\rceil \sin\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \left\lceil \frac{|i|+1}{2} \right\rceil \cos\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right| = \left| -\left\lceil \frac{|i|+1}{2} \right\rceil \cos\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right| = \left\lceil \frac{|i|+1}{2} \right\rceil = \frac{|i|+2}{2} = |k| + 1$$

Stejně jako u lichého i ukážu, že výraz bude nabývat stejných hodnot pro i a $-i$. Tentokrát se mi vynuluje sinus a kosinus je sudá funkce: $\cos(x) = \cos(-x)$, tudíž zde rovnou dostávám, že to platí.

Jelikož jsme si ukázali, že hodnota výrazu není závislá na znaménku, můžeme sumu přepsat následovně (odečítám -1 , což je hodnota pro $i = 0$, protože ji nechci započítávat dvakrát):

$$2 \sum_{i=0}^n \left| \left\lceil \frac{|i|}{2} \right\rceil \sin\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \left\lceil \frac{|i|+1}{2} \right\rceil \cos\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right| - 1 = 2054363$$

Jelikož nám vyšla hodnota $|k| + 1$ u lichých i sudých čísel, sumu lze přepsat do aritmetické posloupnosti:

$$2(1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + \dots + x) - 1 = 2054363$$

Abychom byli schopni určit x , musíme určit, jestli je n sudé, nebo liché.

n je **sudé**, pro n dostáváme hodnotu $\frac{n+2}{2}$, pro $n - 1$ hodnotu $\frac{n}{2}$. Posloupnost vypadá tedy následovně:

$$2(1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + \dots + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + \frac{n+2}{2}) - 1 = 2054363$$

$$4(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + \frac{n}{2}) + \frac{n+2}{2} - 1 = 2054363$$

Pomocí vzorečku pro aritmetickou posloupnost upravím:

$$4 \frac{(\frac{n}{2} + 1)(\frac{n}{2})}{2} + \frac{n+2}{2} - 1 = 2054363$$

$$n^2 + 3n = 2 \cdot 2054363$$

Tato rovnice ale nemá celočíselný kořen, tudíž n nemůže být sudé.

n je liché, pro n dostáváme hodnotu $\frac{n+1}{2}$, pro $n-1$ hodnotu $\frac{n-1}{2}$. Posloupnost vypadá tedy následovně:

$$2(1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + \dots + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2}) - 1 = 2054363$$

$$4(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + \frac{n+1}{2}) - 1 = 2054363$$

Pomocí vzorečku pro aritmetickou posloupnost upravím:

$$4 \frac{(\frac{n+1}{2} + 1)(\frac{n+1}{2})}{2} - 1 = 2054363$$

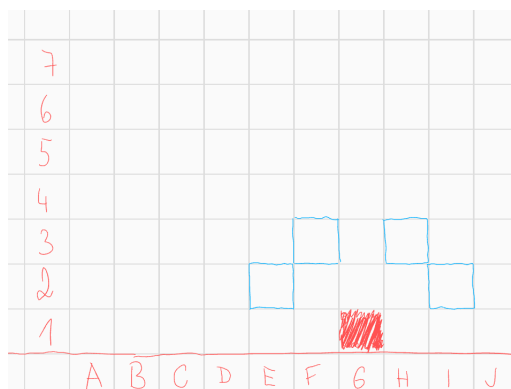
$$n^2 + 4n + 1 = 2 \cdot 2054363$$

Tato rovnice má 2 celočíselné kořeny: 2025 a -2029 . Jelikož je v zadání, že n je přirozené, máme jediné řešení $n = 2025$.

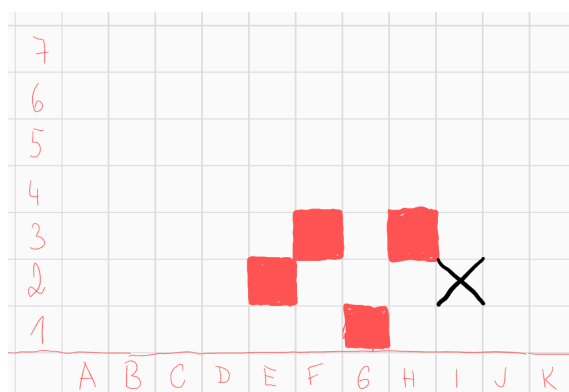
ÚLOHA 3.D - Máme čtvercovou síť a v ní souvislý (pro souvislost stačí se dotknout rohem) ohraničený útvar tvořený pouze celými čtverečky. Řekneme, že je takový útvar „čtvercově konvexní“, jestliže pro libovolné dva čtverce v tomto útvaru platí, že spojnice jejich středů leží celá v tomto útvaru. Do každého čtverečku útvaru nyní vepíšeme číslo, určující počet jiných čtverečků útvaru, do kterých se lze z daného čtverečku dostat jedním pohybem šachového koně. Nalezněte (a zdůvodněte proč další neexistují) všechny takové útvary, ve kterých jsou pouze lichá čísla. (Útvary, které jsou navzájem shodné můžete považovat za stejné).

ŘEŠENÍ: Prázdná množina vyhovuje zadání. Dále předpokládejme, že je útvar neprázdný. Jelikož je útvar ohraničený, jistě bude existovat čtvereček "nejníže" v tomto útvaru. Tedy čtvereček, který je součástí útvaru a každý čtvereček, který leží níže již není součástí našeho útvaru. Začneme tedy s ním.

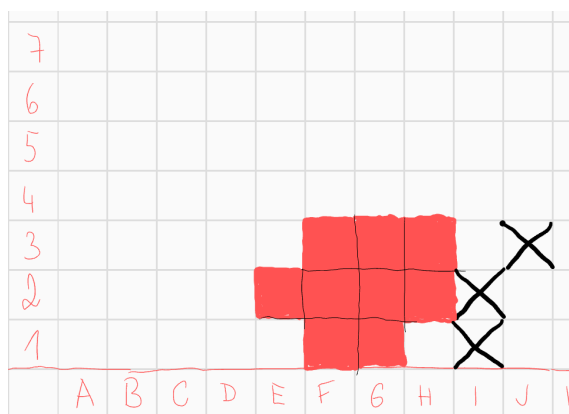
Červené vybarvení značí, že čtverec je součástí útvaru, černý křížek značí, že není. Nyní máme čtyři pole, která mohou ohrozit náš čtverec G1.



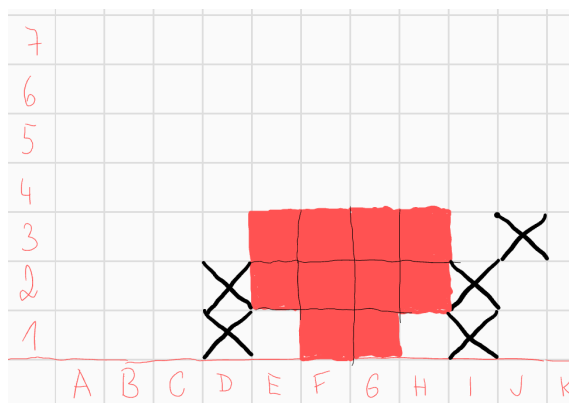
Z těchto čtyř polí musí do útvaru patřit lichý počet. Začneme tím, že rozebereme situaci, kdy do útvaru patří právě 3 z těchto polí. Pokud by do útvaru měla patřit všechna pole kromě $H3$, dostáváme okamžitě spor, neboť spojnice středů $I2$ a $F3$ prochází polem $G3$, tedy pole $G3$ musí být součástí útvaru. Potom spojnice středů čtverců $G3$ a $I2$ prochází čtvercem $H3$, což je spor s konvexností, neboť $H3$ do útvaru nepatří. Analogicky ze symetrie nemůžeme vynechat pole $F3$. Zbývají nám tedy 2 možnosti, ze symetrie stačí rozebrat jednu, předpokládejme tedy, že vynecháme čtverec $I2$.



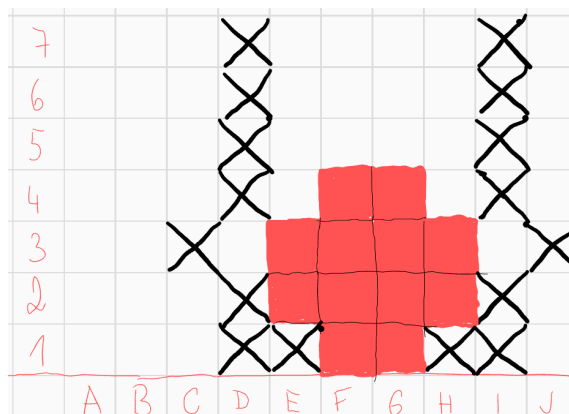
Pro konvexnost můžeme rovnou přidat a vyškrtat některá pole



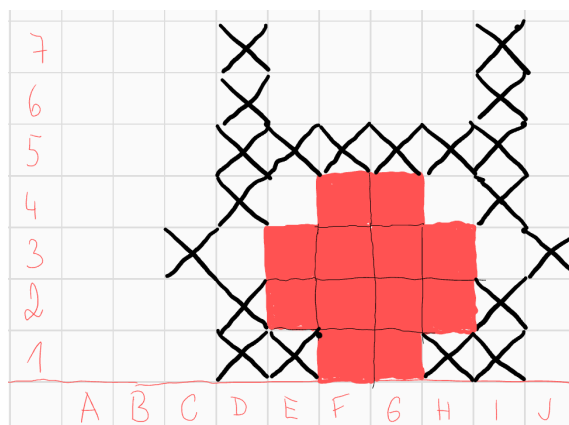
Podívejme se nyní na pole $F1$. Zatím má číslo 2. Jediná možná pole, která ještě může ohrozit jsou $D2$ a $E3$. Aby mělo liché číslo, musí do útvaru patřit právě jedno z těchto polí. Pokud by to bylo $D2$, $E3$ by do útvaru nepatřilo a dostaneme spor s konvexností. Proto $D2$ můžeme vyškrtnout a $E3$ vybarvit, poté pro konvexnost vyškrtneme i $D1$.



Zaměřme se nyní na pole $E2$. Zatím má číslo 2, do útvaru tedy musí patřit právě jedno z polí $D4$, $F4$. Pokud by to ale bylo pole $D4$, spojnice $D4$ a $H3$ prochází přes pole $F4$, které bychom vynechali, což je spor. Tedy $F4$ patří do útvaru a $D4$ ne. Ze symetrie pro pole $H2$ můžeme přidat pole $G4$ a škrtnout pole $I4$.

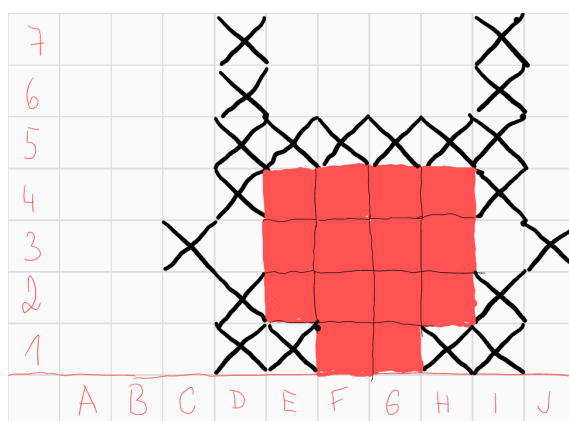


Pokud by pole $E1$ bylo součástí útvaru, mělo by zatím skóre 2. Jediné pole, které to může změnit je pole $D3$, které by však spolu s polem $E1$ porušilo konvexnost. $E1$ tedy nepatří do útvaru. Analogicky pole $H1$ nepatří do útvaru. Opět vyškrtejme nějaká pole díky konvexnosti.



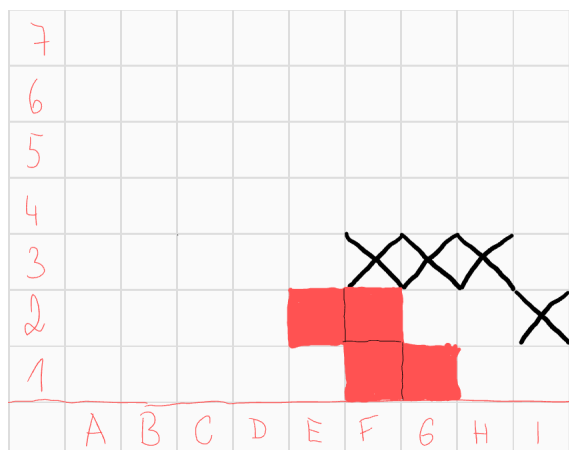
Podívejme se na pole $E3$. Nyní má skóre 3, avšak jediné pole, které by to ještě mohlo změnit je $H5$, které tedy nemůže patřit do útvaru. Analogicky díky poli $H3$ nemůže do útvaru patřit pole $G5$. Opět můžeme vyškrtnat některá pole pro konvexnost.

Pole $F3$ má nyní číslo 2, jediné pole, které to může zachránit je pole $H4$. Analogicky pro pole $G3$ musíme přidat pole $E4$.

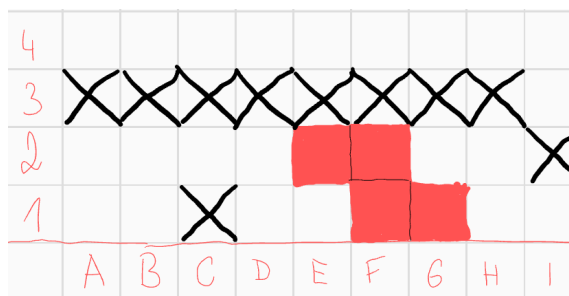


Pole $E4$ má nyní číslo 2, avšak už nemá jak svoji hodnotu změnit, čímž dostáváme spor s tím, že jsme na začátku vybrali 3 pole, která budou naše spodní políčko ohrožovat.

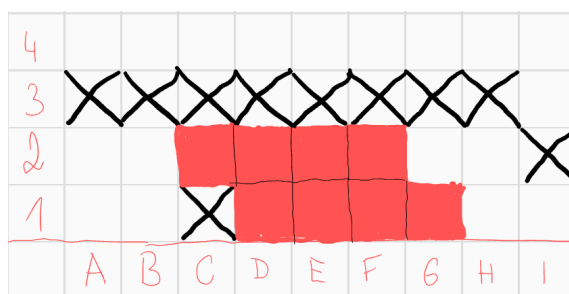
Dále tedy řešíme variantu, kde spodní pole ohrožuje právě jedno pole. Až na symetrii máme dvě možnosti, tedy pole $E2$ a $F3$. Vyřešíme nejprve případ, kdy jediné pole které ohrožuje $G1$ je pole $E2$. Rovnou můžeme z konvexnosti některá políčka přidat a některá vyškrtnout.



Rozdělme si tuhle variantu na dva podpřípady, podle pole $E3$. Nejprve předpokládejme, že do našeho útvaru nepatří. To nám umožní vyškrtnout všechna pole třetího řádku, díky konvexnosti. Pole $E2$ má nyní číslo 1, což nám umožní vyškrtnout jediné další pole, které by to mohlo změnit - $C1$.

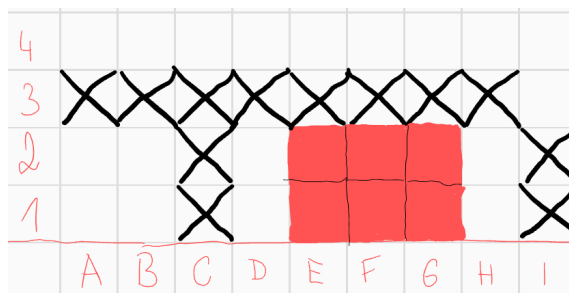


Dále si i tento podpřípad rozdělme na varianty - nejprve předpokládejme, že pole $C2$ patří do útvaru. Konvexnost vynutí následující útvar

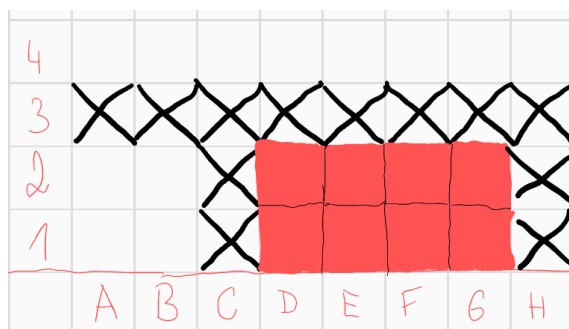


Díky poli D1 nemůžeme přidat pole B2, díky poli E2 nemůžeme přidat G2, díky poli F1 nemůžeme přidat H2 a díky poli F2 nemůžeme přidat H1. Díky konvexnosti už poté nemůžeme přidat nic. Tento útvar zároveň vyhovuje zadání.

Nyní předpokládejme, že pole C2 do útvaru nepatří. Všimněme si symetrie útvaru a toho, že kdybychom do útvaru přidali pole I1, dostaneme stejnou úvahou stejný útvar jako výše. Vyškrtněme ho tedy také. Poli F1 musíme přidat skóre 1, tedy přidat do útvaru pole D2, nebo H2. Přidáme-li pole D2, z konvexnosti musíme přidat E1, kterému poté musíme přidat pole G2. Přidáme-li H2, z konvexnosti musíme přidat G2, kterému poté musíme přidat E1. V obou případech jsme přidali pole E1 a G2, které tak musí být součástí útvaru.

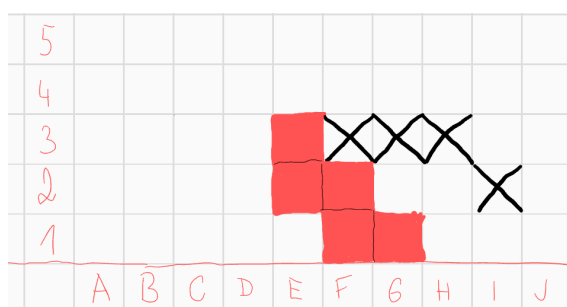


Poli F1 stále chybí skóre 1. Díky symetrii můžeme předpokládat, že mu přidáme pole D2. Pole F2 má zatím číslo 0, musíme mu tedy přidat právě jedno z polí H1, D1. Přidáním pole H2 dostaneme stejný útvar jako výše, přidáním pole D1 dostaneme útvar, který také vyhovuje zadání.

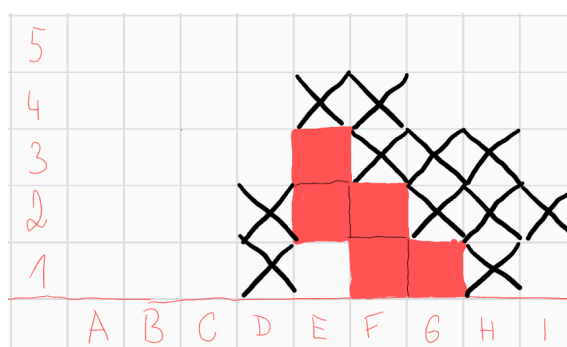


Tím jsme vyčerpali tento podpřípad.

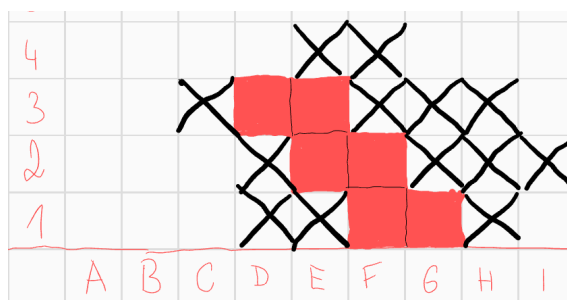
V druhém podpřípadě předpokládejme, že pole E3 do útvaru patří.



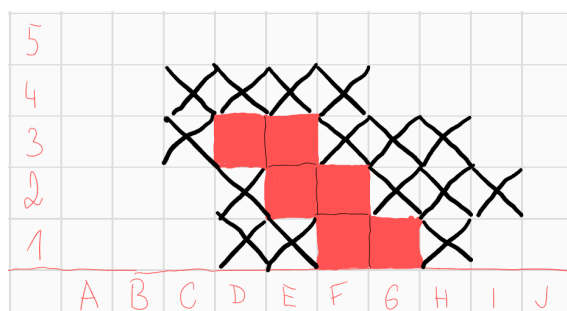
Zaměříme se na pole $F1$. Z první části víme, že neexistuje řešení, které by obsahovalo čtverec ve spodním řádku s hodnotou 3. Proto víme, že $F1$ musí mít hodnotu 1 a můžeme tedy vyškrtnout $D2$ a $H2$. Díky tomu i spoustu dalších čtverců pro konvexnost.



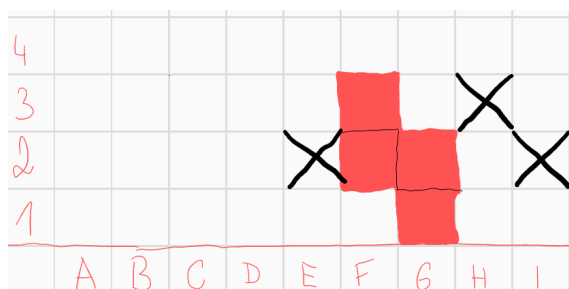
Pole $F2$ má zatím hodnotu 0. To už může spravit pouze pole $D3$, které tedy musíme přidat, poté opět něco škrtneme z konvexnosti.



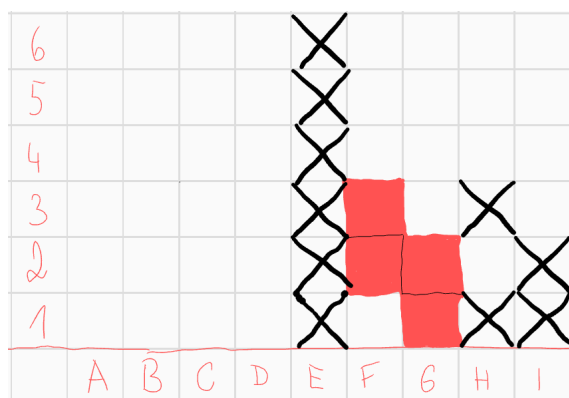
Pole $E2$ má hodnotu 1, což by mohlo pokazit pouze pole $D4$, můžeme ho proto vyškrtnout, s ním i pole $C4$ pro konvexnost. Nic víc tedy přidat nemůžeme a dostáváme další útvar, který vyhovuje zadání.



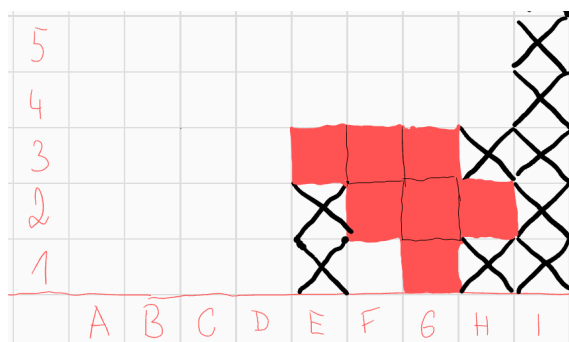
Poslední, co zbývá rozebrat je varianta, kdy úplně na začátku jediné pole, které bude ohrožovat naše spodní políčko G1, bude pole F3. Konvexnost nám vynutí pár polí.



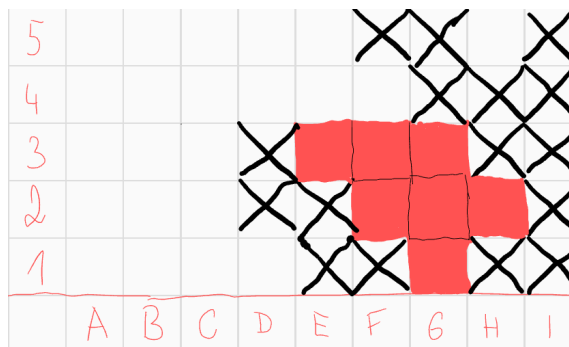
Teď přijde mega hustej argument: pokud bychom do útvaru přidali pole H1, které leží ve spodním řádku, poloha pole F2 vůči poli H1 je stejná jako v případě, který už jsme rozebrali. Mohli bychom tedy dostat pouze řešení, která už máme, neboť každý takový útvar mohl vzniknout tak, že jsme začali polem H1 ve spodní řadě a k němu přidali pole F2. Pole H1 tedy můžeme vyškrtnout a ze stejného důvodu i pole I1 díky poli G2. Rozdělme nyní i tento případ na dva podpřípady. Nejprve předpokládejme, že pole E3 není součástí útvaru. Díky konvexnosti můžeme škrtnout celý sloupec E.



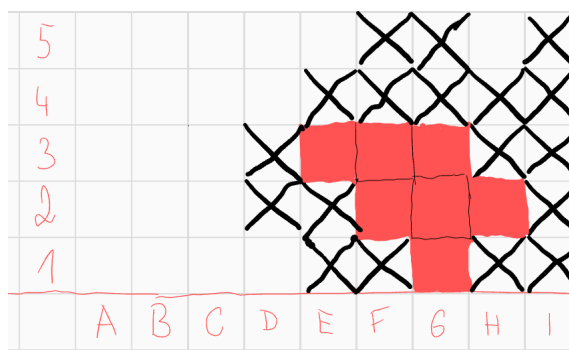
Podíváme-li se na obrázek "zleva" (hlavu položte na pravé rameno), vyškrtnutí sloupce E hraje stejnou roli jako bychom začali se spodním sloupcem. Pole F2 má jedinou možnost jak získat liché číslo - pomocí pole G4, avšak při tomhle pohledu, pole F2 leží ve spodním řádku a poloha vůči poli G4 je již vyřešená, nemůžeme tedy dostat nic nového (upgrade předchozího argumentu). Pole E3 tedy musí být součástí útvaru. Dále rozdělujeme na dva podpřípady, podle pole H2. Pokud by patřilo do útvaru, můžeme vyškrtnout celý sloupec J a přidat pole G3 díky konvexnosti.



Pole $H2$ nyní hraje roli políčka v nejspodnějším řádku při pohledu "zprava", víme, že nemůže mít skóre 3, skóre 1 už má. Můžeme tedy škrtnout pole $F1$ a $G4$. Vyškrtejme některá další pole pro konvexnost.

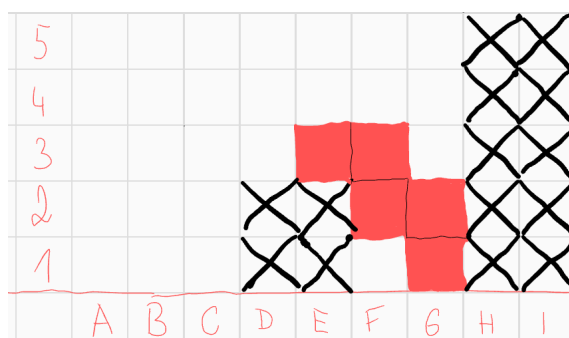


Pole $G2$ už může ohrožovat jediné pole $F4$, které tedy musíme škrtnout, neboť $G2$ už má skóre 1. Z konvexnosti škrtnáme i $E4$.



Nic už přidat nemůžeme, ale dostáváme spor například pro pole $F2$, které má skóre 0.

Druhá varianta podpřípadu je, když pole $H2$ není součástí útvaru. Z konvexnosti můžeme vyškrtnout celý sloupec H .



Sloupec G hraje roli spodního sloupce při pohledu "zprava", pole $G1$ může hrát roli začátečního políčka. Jeho poloha vůči bodu $F3$ je však ta již vyřešená (resp. s ní symetrická), proto už nemůžeme dostat žádné další řešení.

Jediná neprázdná řešení tedy až na symetrie jsou

