

BRněnský KOrespondenční Seminář



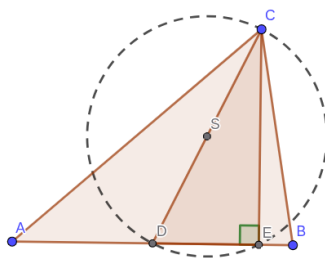
XXXII. ročník
2025/2026

ŘEŠENÍ 2. SÉRIE

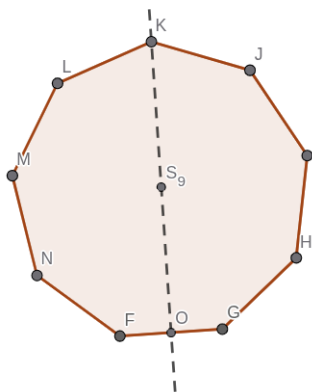
N-ÚHELNÍKY

ÚLOHA 2.1 - Dokažte, že středy stran libovolného trojúhelníka, paty výšek a středy úseček spojující ortocentrum a vrcholy nemůžou tvořit pravidelný 9-úhelník.

ŘEŠENÍ: Předpokládejme opak dokazovaného tvrzení. Pripustíme tedy, že lze najít takový trojúhelník ABC , pro nějž dokážeme zkonstruovat pravidelný 9-úhelník popsany v zadání. Pokud 9-úhelník existuje, lze mu jistě opsat kružnice. Zároveň je zřejmé, že trojice vrcholů tohoto 9-úhelníku - libovolný vrchol (C), střed protější strany (D) a pata výšky z tohoto vrcholu (E) zadaného trojúhelníku ABC - tvoří pravoúhlý trojúhelník, jehož kružnice opsaná splývá s kružnicí opsanou pravidelného 9-úhelníku. Z Thaletovy věty tak vidíme, že existuje dvojice vrcholů pravidelného 9-úhelníku, které leží na jedné přímce se středem kružnice (S) opsané tohoto 9-úhelníku. Pro spor tedy postačí ukázat, že to pravidelný 9-úhelník nesplňuje.

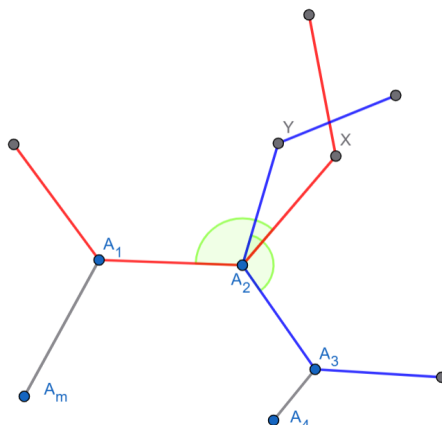


BÚNO vybereme jeden vrchol (K) devítiúhelníku. Přímka, vedená tímto vrcholem a středem kružnice opsané devítiúhelníku, zřejmě také prochází středem protější strany devítiúhelníku. Zároveň se jedná o osu souměrnosti tohoto 9-úhelníku (z vlastností pravidelného n -úhelníku pro liché n). Zřejmě neprotíná žádný další vrchol devítiúhelníku. Navíc ale libovolná osa souměrnosti v pravidelném n -úhelníku prochází středem kružnice opsané, tedy okamžitě vidíme, že neexistuje přímka, na které by ležel střed kružnice opsané a alespoň dva vrcholy pravidelného 9-úhelníku zároveň. Dostáváme tak požadovaný spor, a tedy jsme dokázali tvrzení ze zadání.



ÚLOHA 2.2 - Mějme libovolný m -úhelník $A_1A_2\dots A_m$. Ke každé straně připišeme (vně) pravidelný n -úhelník. Podívejme se na n -úhelník u strany A_1A_2 . Označme si bod X v tomto n -úhelníku, který následuje po vrcholech A_1, A_2 . Pak se podívejme na n -úhelník u strany A_2A_3 a označme si Y bod předcházející A_2, A_3 . Pro jaká všechna $3 \leq m, n \in \mathbb{N}$ platí, že $|A_1Y| = |A_3X|$? (Pořadí vrcholů je důležité.)

ŘEŠENÍ: Prvně si uděláme krásný náčrtek podle zadání: K řešení nám budou stačit body



A_1, A_2, A_3, X a Y . Pro trochu lepší představu jsem tam ale přidala nějaké další body. Z vlastnosti pravidelných n -úhelníků hned plyne, že $|A_1A_2| = |A_2X|$ a $|A_3A_2| = |A_2Y|$. Dále, protože n je stejné pro oba útvary, víme, že zelené úhly na obrázku budou stejné. Označme si je jako α . (Vzhledem k tomu, že je to vnitřní úhel pravidelného n -úhelníka, jde dopočítat jako $\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$, ale to ani nebudeme potřebovat.) Nyní už vidíme, že $|\angle A_1A_2Y| = |\angle A_3A_2X|$, protože

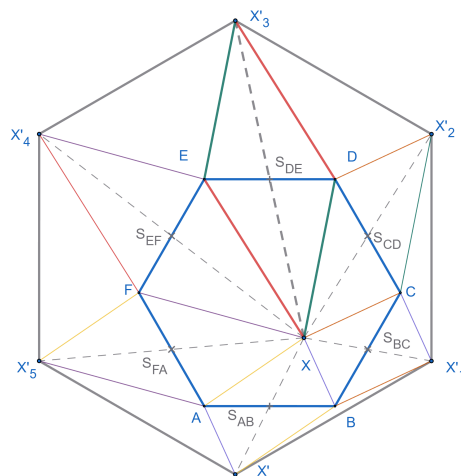
$$|\angle A_1A_2Y| = |\angle A_1A_2X| - |\angle XA_2Y| = \alpha - |\angle XA_2Y|$$

$$|\angle A_3A_2X| = |\angle A_3A_2Y| - |\angle XA_2Y| = \alpha - |\angle XA_2Y|$$

. V mém náčrtku se n -úhelníky překrývají, proto musíme od úhlu α odečítat. Kdyby se n -úhelníky nepřekrývaly, úhly by se stále rovnaly, jen by tam místo $-$ bylo $+$. (Kdyby strany n -úhelníků splynuly, nemuseli bychom odečítat ani přičítat nic.) Dostáváme tedy, že trojúhelníky YA_2A_1 a A_3A_2X jsou shodné podle věty sus a tedy $|A_1Y| = |A_3X|$ pro libovolná $3 \leq m, n \in \mathbb{N}$.

ÚLOHA 2.3 - Necht $ABCDEF$ je pravidelný 6-úhelník. Zvolme libovolný bod X uvnitř $ABCDEF$. Zobrazme tento bod pomocí středové souměrnosti přes středy všech stran a, b, c, d, e, f , čímž získáme body A', B', C', D', E', F' . Dokažte, že šestiúhelník $A'B'C'D'E'F'$ bude mít trojnásobný obsah oproti šestiúhelníku $ABCDEF$.

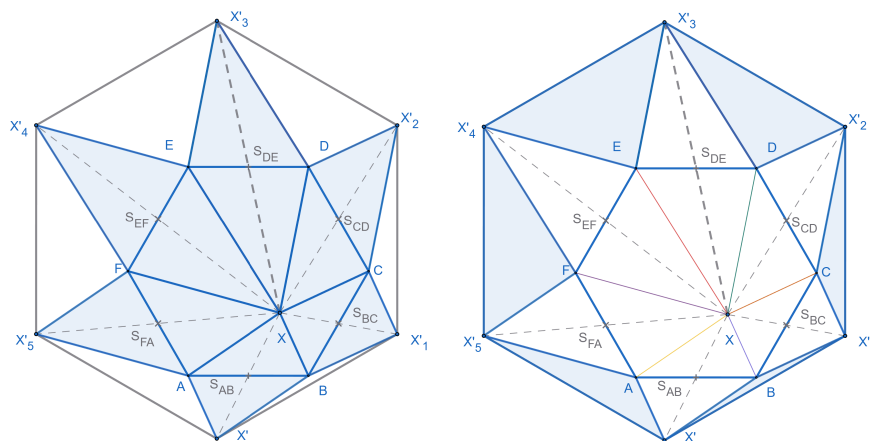
ŘEŠENÍ: Vzhledem k tomu, že bod X zobrazujeme pomocí středové souměrnosti se středem ve středu každé strany šestiúhelníka, vznikne nám tímto způsobem 6 rovnoběžníků. Je tomu tak díky vlastnostem středové souměrnosti, konkrétně, že bod X a X' jsou stejně vzdáleny od středu strany a zároveň všechny tyto 3 body leží na přímce. Strana a úsečka XX' se tedy navzájem půlí a jsou to úhlopříčky zmiňovaných rovnoběžníků.



Pokud se zaměříme na rovnoběžník $XD X'_3 E$, stačí nám si uvědomit, že libovolná úhlopříčka rovnoběžníku dělí na 2 shodné trojúhelníky se stejným obsahem. Konkrétně $XD \parallel EX'_3$, $XE \parallel DX'_3$ a $|DE| = |ED|$. $\triangle XDE \cong \triangle X'_3 ED$ a stejným způsobem dojdeme ke zjištění, že

$$S_{ABCDEF} = S_{\triangle X'AB} + S_{\triangle X'BC} + S_{\triangle X'_2CD} + S_{\triangle X'_3DE} + S_{\triangle X'_4EF} + S_{\triangle X'_5FA}$$

Nyní tedy víme, že útvar $AX'BX'_1CX'_2DX'_3EX'_4FX'_5$ má dvojnásobný obsah oproti $ABCDEF$ a potřebujeme ukázat, že zbylé trojúhelníky $\triangle X'BX'_1$, $\triangle X'_1CX'_2$, $\triangle X'_2DX'_3$, $\triangle X'_3EX'_4$, $\triangle X'_4FX'_5$ a $\triangle X'_5AX'$ mají v součtu stejný obsah jako šestiúhelník $ABCDEF$.

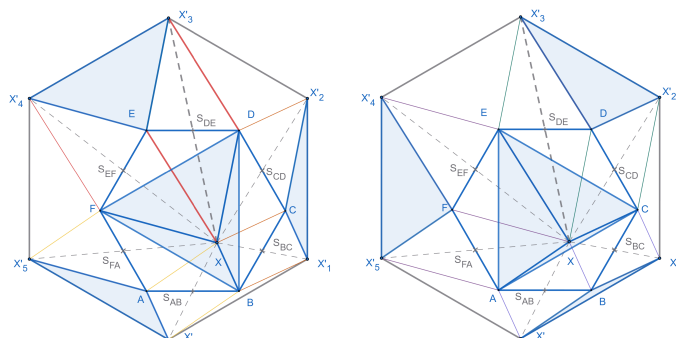


Zaměříme se nyní například na $\triangle X'_3EX'_4$. Víme, že $X'_3E \parallel DX$, $X'_4E \parallel FX$ a zároveň $|X'_3E| = |DX|$ a $|X'_4E| = |FX|$ (z vlastností rovnoběžníků $XD X'_3 E$ a $XE X'_4 F$). Trojúhelníky $\triangle X'_3EX'_4$ a $\triangle DXF$ jsou tedy shodné (podle věty *SuS*). Stejným způsobem dokážeme, že $\triangle X'_5AX' \cong \triangle FXB$ a $\triangle X'_1CX'_2 \cong \triangle BXD$. Platí tedy:

$$S_{\triangle DFB} = S_{\triangle X'_3EX'_4} + S_{\triangle X'_5AX'} + S_{\triangle X'_1CX'_2}$$

Stejným způsobem:

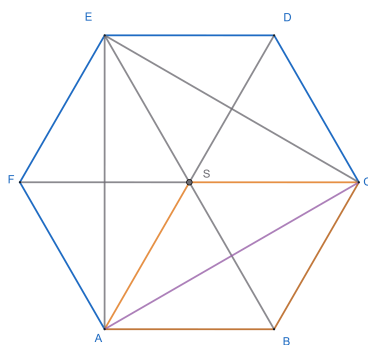
$$S_{\triangle ACE} = S_{\triangle X'BX'_1} + S_{\triangle X'_2DX'_3} + S_{\triangle X'_4FX'_5}$$



Pokud tedy dokážeme, že $S_{DFB} = S_{ACE} = \frac{1}{2}S_{ABCDEF}$, máme vyhráno! Uvědomme si, že každý pravidelný šestiúhelník jsme schopni rozdělit na 6 shodných rovnostranných trojúhelníků (spojením vrcholů se středem). Je tomu tak, neboť středový úhel je $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ a zároveň $|SA| = |SB| = \dots = |SF|$, trojúhelníky jsou tedy jistě rovnoramenné a úhly u základny budou $\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$. Pokud si vezmeme libovolný čtyřúhelník tří sousedních vrcholů a středu (například $ABCS$), bude se jednat o rovnoběžník (konkrétně o kosočtverec, neboť $|AB| = |BC| = |BS| = |SA|$). Jak již jsme výše ukázali, libovolná úhlopříčka dělí rovnoběžník na dva shodné trojúhelníky, takže $S_{ABC} = S_{CSA}$. Stejně tak $S_{CDE} = S_{ESC}$ a $S_{EFA} = S_{ASE}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_{ABCDEF} &= \frac{1}{2}(S_{ABC} + S_{CSA} + S_{CDE} + S_{ESC} + S_{EFA} + S_{ASE}) \\ \frac{1}{2}S_{ABCDEF} &= \frac{1}{2}(2S_{CSA} + 2S_{ESC} + 2S_{ASE}) \\ \frac{1}{2}S_{ABCDEF} &= S_{ACE}\end{aligned}$$

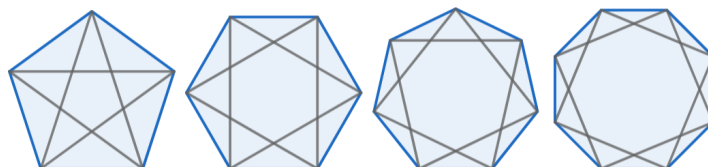
Stejným způsobem i $S_{BDF} = S_{ABCDEF}/2$



Celkem tedy:

$$\begin{aligned}S_{X'X_1'X_2'X_3'X_4'X_5'} &= S_{ABCDEF} + (S_{X'AB} + S_{X_1'BC} + S_{X_2'CD} + S_{X_3'DE} + S_{X_4'EF} + S_{X_5'FA}) + \\ &\quad + (S_{X_3'EX_4'} + S_{X_5'AX'} + S_{X_1'CX_2'}) + (S_{X'BX_1'} + S_{X_2'DX_3'} + S_{X_4'FX_5'}) \\ S_{X'X_1'X_2'X_3'X_4'X_5'} &= S_{ABCDEF} + S_{ABCDEF} + \frac{1}{2}S_{ABCDEF} + \frac{1}{2}S_{ABCDEF} \\ S_{X'X_1'X_2'X_3'X_4'X_5'} &= 3S_{ABCDEF}\end{aligned}$$

ÚLOHA 2.4 - V pravidelném n -úhelníku (kde $n \geq 5$) sestrojíme hvězdičku tak, že vždy spojíme vrcholy ob jedno od sebe, viz obrázek. Původní n -úhelník má stranu o délce 1. Jaký bude poměr obsahu původního n -úhelníku ku obsahu nového menšího n -úhelníku uvnitř?



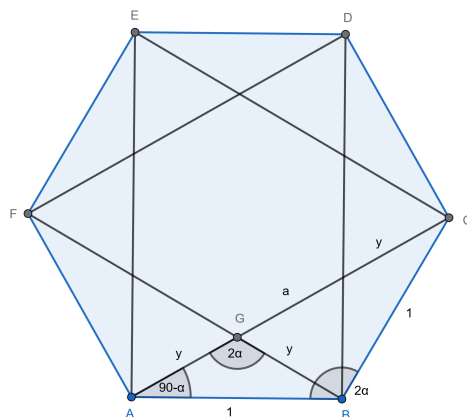
ŘEŠENÍ: Obsah pravidelného n -úhelníku se vypočítá následovně (a je délka strany):

$$S = \frac{1}{4}na^2 \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Jelikož nás zajímá poměr obsahu velkého ku malému n -úhelníku, dostáváme:

$$\frac{S_{velky}}{S_{maly}} = \frac{\frac{1}{4}n1^2 \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{4}na^2 \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{1}{a^2}$$

Stačí nám nalézt délku strany a malého n -úhelníku. Prvně si udělám náčrtek podle zadání. Pro úhel u vrcholu n -úhelníku si udělám substituci $2\alpha = 180 - \frac{360}{n}$. Délku strany a



dostaneme jako $a = |AC| - 2y$. Pro zjištění délky $|AC|$ použiji kosinovu větu na trojúhelník ABC (pokud používám goniometrický vzoreček pro úpravu výrazu, dám na daný řádek do závorek číslo vzorečku ze seznamu níže):

$$|AC|^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(2\alpha)$$

$$|AC|^2 = 2(1 - \cos(2\alpha))$$

$$|AC| = \sqrt{2(1 - \cos(2\alpha))}$$

$$|AC| = \sqrt{2[\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) - (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))]} \quad (1, 2)$$

$$|AC| = \sqrt{2(2\sin^2(\alpha))}$$

$$|AC| = 2\sin(\alpha)$$

Teď se se pokusím najít délku y , k čemu použiji trojúhelník ABG.

$$|\angle BAC| = |\angle ABF| = \frac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$$

$$|\angle AGB| = 180 - 2(90 - \alpha) = 2\alpha$$

Jelikož znám všechny úhly a velikost jedné strany, mohu použít sinovu větu pro zjištění strany s délkou y :

$$\frac{1}{\sin(2\alpha)} = \frac{y}{\sin(90 - \alpha)}$$

$$y = \frac{\sin(90 - \alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

$$y = \frac{\sin(90)\cos(\alpha) - \cos(90)\sin(\alpha)}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)} \quad (3, 4)$$

$$y = \frac{\cos(\alpha)}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$$

$$y = \frac{1}{2\sin(\alpha)}$$

Teď již znám délky y a $|AC|$, tudíž mi stačí dopočítat výsledný poměr $\frac{1}{a^2}$:

$$a = |AC| - 2y = 2\sin(\alpha) - \frac{1}{\sin(\alpha)}$$

$$a^2 = 4\sin^2(\alpha) + \frac{1}{\sin^2(\alpha)} - 4$$

$$a^2 = \frac{4\sin^4(\alpha) + 1 - 4\sin^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}$$

$$a^2 = \frac{4\sin^2(\alpha) \cdot (\sin^2(\alpha) - 1) + 1}{\sin^2(\alpha)}$$

$$a^2 = \frac{4\sin^2(\alpha) \cdot (\sin^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)) + 1}{\sin^2(\alpha)} \quad (1)$$

$$a^2 = \frac{-4\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha) + 1}{\sin^2(\alpha)}$$

$$a^2 = \frac{-(2\sin(\alpha)\cos(\alpha))^2 + 1}{\sin^2(\alpha)}$$

$$a^2 = \frac{-\sin^2(2\alpha) + 1}{\sin^2(\alpha)} \quad (4)$$

$$a^2 = \frac{-\sin^2(2\alpha) + \sin^2(2\alpha) + \cos^2(2\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \quad (1)$$

$$a^2 = \frac{\cos^2(2\alpha)}{\sin^2(\alpha)}$$

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(2\alpha)}$$

Po doplnění substitute nám vyšel poměr:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\sin^2(90 - \frac{180}{n})}{\cos^2(180 - \frac{360}{n})}$$

$$\frac{1}{a^2} = \frac{(\sin(90)\cos(\frac{180}{n}) - \cos(90)\sin(\frac{180}{n}))^2}{\cos^2(180 - \frac{360}{n})} \quad (3)$$

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\cos^2(\frac{180}{n})}{\cos^2(180 - \frac{360}{n})}$$

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\cos^2(\frac{180}{n})}{(\cos(180)\cos(\frac{360}{n}) + \sin(180)\sin(\frac{360}{n}))^2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\cos^2(\frac{180}{n})}{\cos^2(\frac{360}{n})}$$

Poměr velkého n-úhelníku ku malému je tedy $\frac{\cos^2(\frac{180}{n})}{\cos^2(\frac{360}{n})}$

Seznam použitých vzorců

1. $1 = \sin^2(x) + \cos^2(x)$
2. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
3. $\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$
4. $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
5. $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

ÚLOHA 2.A - Necht máme $n \in \mathbb{N}$ odporných senátorů s odpory k lidu $R_1, \dots, R_n$, kde všechny odpory jsou kladné racionální zlomky v základním tvaru. Jestliže budou vládnout paralelně, bude jejich odpor k lidu R_p splňovat vztah

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

Jestliže budou vládnout sériově, bude jejich odpor k lidu

$$R_s = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Porovnejte velikost R_p, R_s a dokažte.

ŘEŠENÍ: Připomeňme si nerovnost mezi průměry, zde se nám konkrétně bude hodit A-H nerovnost, tedy nerovnost mezi aritmetickým a harmonickým průměrem. Platí

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

$$\frac{R_1 + \dots + R_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

Můžeme tuto nerovnost použít, neboť naše odpory jsou kladná čísla. Upravujeme

$$\frac{R_1 + \dots + R_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

$$\frac{R_s}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{R_p}}$$

$$R_s \geq n^2 R_p$$

Protože R_s, R_p budou kladná čísla, bude R_s ostře větší než R_p pro $n > 1$. Pro $n = 1$ budou oba odpory rovny R_1 a tudíž si budou rovny.

ÚLOHA 2.B - Najděte destiprvkovou množinu přirozených čísel s co nejnižším součtem, takovou, že žádný její prvek nedělí součin ostatních. (Dokažte.)

ŘEŠENÍ: Předpokládejme, že máme množinu splňující zadání a v ní nějaký prvek a_1 . Aby a_1 nedělilo součin ostatních prvků, musí existovat prvočíslo p_1 takové, že číslo a_1 dělí ve větší mocnině, než v jaké dělí součin ostatních prvků. Tedy zejména p_1 dělí a_1 ve vyšší mocnině než kterýkoli jiný prvek. Úplně symetricky musí takové prvočíslo p_i existovat pro každý prvek a_i naší množiny a z podmínky, kterou jsme vyvodili, musejí být tato prvočísla po dvou různá. Nyní se zaměříme na minimalitu součtu prvků v množině. Kdyby nějaký prvek a_i měl ještě nějaké jiné prvočinitele než p_i , mohli bychom najít novou množinu tak, že jimi tento prvek vydělíme. Ta by stále splňovala podmínku ze zadání a měla by menší součet. Proto hledaná množina musí být tvořena jen mocninami po dvou různých prvočísel. Každá taková množina zároveň splňuje podmínku s dělitelností, protože prvky jsou teď po dvou nesoudělné. Abychom minimalizovali součet, musíme vzít co nejmenší prvočísla, a to v první mocnině. Řešením je tedy množina

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}.$$

ÚLOHA 2.C - Řešte soustavu pro $a, b, c \in \mathbb{N}$:

$$a + ab + abc + ac + c = 2025$$

$$a + ab + b = 1057$$

ŘEŠENÍ: Upravíme první rovnici

$$a + ac + abc + ab + c + 1 = 2025 + 1$$

$$(c + 1)(a + ab + 1) = 2026$$

a vidíme, že $2026 = 2 \times 1013$, přičemž první ze závorek v rovnici musí být alespoň 2 a druhá alespoň 3. Tedy nutně $c = 1$ a $a + ab = 1012$, což po dosazení do druhé rovnice dává $b = 45$ a dopočtem dostaneme $a = 22$. Jiná řešení neexistují a zkouškou lze ověřit, že trojice $(a, b, c) = (22, 45, 1)$ opravdu je řešením soustavy.

Poznámka: Úlohu lze řešit mnoha způsoby, jedním z nich je provedení podobného rozboru pro druhou rovnici. Jakýkoliv argumentačně bezchybný postup se samozřejmě počítá.

ÚLOHA 2.D - Uvažujme zleva unitární binární operaci $\$$ na přirozených číslech, tedy pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$ můžeme udělat $m\$n$, což bude opět přirozené číslo, a současně existuje nějaké přirozené číslo u , pro které s libovolným přirozeným číslem $u\$n = n$. Řekneme, že takováto operace je *neposedná*, pokud

$$(a \times b)\$c = a \times (b\$c),$$

kde $\times$ značí klasické násobení. Najděte všechny neposedné operace. (Pozn. automaticky nepředpokládejte, že operace $\$$ je komutativní, asociativní nebo distributivní, nemusí být!)

ŘEŠENÍ: Máme naši operaci $\$$ definovanou na přirozených číslech: $m\$n \in \mathbb{N}$, pro kterou platí:

$$\exists u \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : u\$n = n \tag{1}$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a \times b)\$c = a \times (b\$c) \tag{2}$$

Protože rovnost (2) platí pro všechna přirozená čísla, můžeme dosadit $a = u$. Dostaneme

$$(u \times b)\$c = u \times (b\$c).$$

Levou stranu můžeme pomocí komutativitě klasického násobení upravit:

$$(u \times b)\$c = (b \times u)\$c = b \times (u\$c) = b \times c,$$

kde druhá rovnost je pomocí (2) - „neposednosti“ a třetí rovnost díky (1) - tedy operace je zleva unitární. Takže máme

$$b \times c = u \times (b\$c). \tag{3}$$

Dosazením do této rovnice $b = 1$ získáme

$$c = u \times (1\$c).$$

Vidíme, že c je součinem dvou přirozených čísel, a proto oba tyto činitele dělí číslo c . Nás konkrétně zajímá $u \mid c$. Navíc c je libovolné přirozené číslo a tím pádem u bude přirozené číslo, které dělí všechna přirozená čísla, což splňuje pouze $u = 1$. Nyní se vrátíme k rovnici (3), kam dosadíme za u a máme výsledek

$$b \times c = b \cdot c.$$

Tím jsme zjistili, že pokud nějaká operace bude „neposedná“ a zleva unitární, bude to nutně klasické násobení. Navíc musíme ověřit druhý směr, tedy jestli násobení splňuje (1) i (2). A skutečně

- 1) $1 \times n = n$ pro všechna přirozená čísla n
- 2) $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ platí, jelikož násobení je asociativní.