

BRněnský KOrespondenční Seminář



XXXII. ročník
2025/2026

ŘEŠENÍ 1. SÉRIE

DŮKAZY

ÚLOHA 1.1 - Mějme kružnici o poloměru 1 a do ní vepsaný osmiúhelník $ABCDEFGH$. Čtyřúhelník $ACEG$ je čtverec. Určete minimální a maximální obvod osmiúhelníku a formálně dokažte.

ŘEŠENÍ: Body A, C, E a G dělí kružnici na 4 shodné oblouky. Pokud nalezneme bod B na oblouku AC , který maximalizuje/minimalizuje součet $|AB| + |BC|$, bude to stejné platit i pro body D, F, H , neboť se jedná o totožnou úlohu, pouze otočenou.

Maximální/minimální obvod budeme tedy schopni vyjádřit jako $4(|AB| + |BC|)$ a můžeme se tedy zaměřit pouze na hledání optima pro bod B .

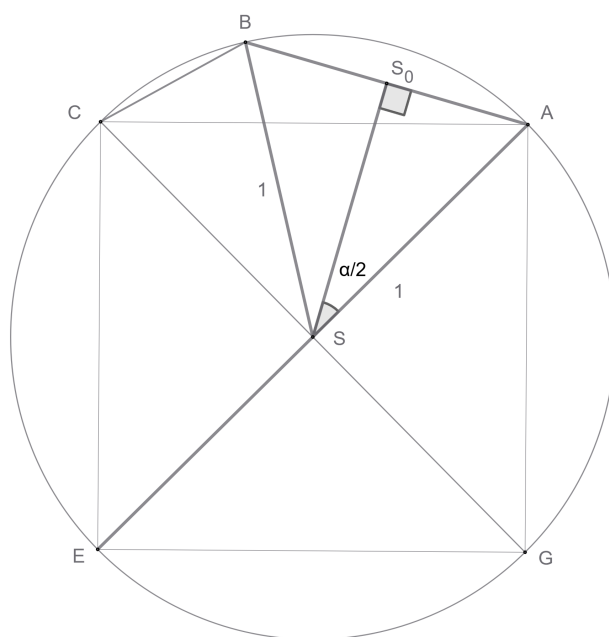
Minimální obvod

Každé 3 body splňují trojúhelníkovou nerovnost: $|AC| \leq |AB| + |BC|$. Součet $|AB| + |BC|$ tedy nemůže nabývat menší hodnoty než $|AC|$. Rovnost nastává v případě, kdy bod B leží na úsečce AC . Zároveň však víme, že bod B musí ležet na kružnici, máme tedy jen 2 možnosti: $B = A$ nebo $B = C$. Ve výsledku tedy dojde k degeneraci osmiúhelníku na daný čtverec $ACEG$ a minimální obvod bude:

$$4|AC| = 4\sqrt{|SA|^2 + |SC|^2} = 4\sqrt{1^2 + 1^2} = 4\sqrt{2}$$

Maximální obvod

Víme, že $|\angle ASC| = 90^\circ = |\angle ASB| + |\angle BSC|$. Položme $|\angle ASB| = \alpha$, potom tedy $|\angle BSC| = 90^\circ - \alpha$. Bod B leží na kružnici, tj $|SB| = |SA| = 1$. Trojúhelník ABS je rovnoramenný se základnou AB , pro kterou bude platit:



$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{|AB|}{2}}{|SA|}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{|AB|}{2}}{1}$$

$$|AB| = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Podobně pro BC:

$$\sin\left(\frac{90^\circ - \alpha}{2}\right) = \frac{\frac{|BC|}{2}}{|SB|}$$

$$\sin\left(\frac{90^\circ - \alpha}{2}\right) = \frac{\frac{|BC|}{2}}{1}$$

$$|BC| = 2\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$|AB| + |AC| \text{ je tedy } 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

Pomocí vzorce pro součet dvou sinů : $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$, můžeme výraz dále upravit na:

$$|AB| + |AC| = 2\left[2\sin\left(\frac{\frac{\alpha}{2} + (45^\circ - \frac{\alpha}{2})}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\alpha}{2} - (45^\circ - \frac{\alpha}{2})}{2}\right)\right] = 4\sin(22,5^\circ)\cos\left(\frac{\alpha - 45^\circ}{2}\right) = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}\cos\left(\frac{\alpha - 45^\circ}{2}\right)$$

Pokud tedy nalezneme maximální hodnotu výrazu $\cos\left(\frac{\alpha - 45^\circ}{2}\right)$, nalezneme i maximální obvod celého osmiúhelníku. α je z intervalu $(0^\circ, 90^\circ)$, protože se jedná o část úhlu ASC. Výraz $\frac{\alpha - 45^\circ}{2}$ může tedy nabývat hodnot $(-22,5^\circ, 22,5^\circ)$. Funkce cosinus nabývá hodnot $[0, 1]$, přičemž maxima (1) nabývá v hodnotách argumentu ve tvaru $2k\pi$, pro $k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, což v daném intervalu $(-22,5^\circ, 22,5^\circ)$ splňuje pouze 0.

Maximální obvod bude tedy v případě, kdy

$$\cos\left(\frac{\alpha - 45^\circ}{2}\right) = 1$$

$$\frac{\alpha - 45^\circ}{2} = 0$$

$$\alpha - 45^\circ = 0$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Jedná se tedy o pravidelný osmiúhelník a jeho obvod bude nabývat hodnoty

$$4 \cdot (|AB| + |BC|) = 4 \cdot 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}\cos\left(\frac{\alpha - 45^\circ}{2}\right) = 8\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

ÚLOHA 1.2 - Dokažte, že graf obsahuje uzavřený sled liché délky právě tehdy, když obsahuje uzavřenou kružnici liché délky. Délkou myslíme počet hran.

Pozn. Jestli vůbec nevíte, co je to graf, tak se podívejte na pomocný text ke 3. sérii 30. ročníku. (Najdete ho v archivu)

Pozn. Sled je libovolná posloupnost vrcholů, mezi nimiž vede hrana. Kružnice je uzavřená posloupnost vrcholů, mezi nimiž vede hrana a žádný vrchol se neopakuje.

ŘEŠENÍ: Pokud graf obsahuje kružnici liché délky, pak je tato kružnice zároveň uzavřeným sledem liché délky, tedy jedna implikace je triviální.

Pro tu opačnou, předpokládejme, že graf obsahuje uzavřený sled liché délky. Najdeme nejkratší uzavřený sled liché délky v našem grafu. (Každý lichý sled má konečnou délku, z těchto délek vybereme tu nejmenší. Pokud tuto nejmenší délku má více sledů, vyberme si jeden libovolně.)

Ukážeme, že tento sled nejkratší liché délky je kružnice. Označme ho $v_1, \dots, v_n, v_1$. Předpokládejme tedy pro spor, že není. Potom se nějaký vrchol v v tomto sledu opakuje, tedy $v_i = v_j$, pro $i \neq 1$. Tento vrchol nám rozělí sled na dva uzavřené sledy, jeden z nich je $v_i \dots v_j$, druhý je $v_1, v_2, \dots, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n$. V součtu mají lichou délku n , tedy právě jeden z nich musí být liché délky, což je spor s volbou nejkratšího lichého sledu, jelikož tento nově vzniklý je kratší.

ÚLOHA 1.3 - Máme množinu o n prvcích. K ní máme permutace f_1, f_2 až f_m ne nutně různé. Kolik minimálně musí být m , abychom z těchto permutací vždy mohli vybrat podmnožinu, ze které jde složit permutaci, kde se nějaký prvek z množiny zobrazí sám na sebe?

ŘEŠENÍ: Ozn. prvky množiny jako $a_1, \dots, a_n$. Ukažme, že potřebujeme n permutací.

$n-1$ nestačí - krásným protipříkladem budou permutace, které nám cyklicky prohodí všechny prvky, tj. každá permutace posune prvek a_i na a_{i+1} a a_n na a_1 . Pokud jich bude pouze $n-1$, při složení se každý z prvků posune o menší počet než je n , či-li se nezobrazí sám na sebe.

n už stačí - podívejme se na libovolný prvek (říkejme mu a) a zobrazme ho postupně ve všech permutacích, tj. se podívejme na $a, f_1(a), f_2(f_1(a)), \dots, f_n(f_{n-1}(\dots f_1(a)))$, těchto prvků bude přesně $n+1$, z Dirichletova principu tam musí být alespoň dva prvky stejné. To znamená, že složení permutací mezi těmito prvky má pevný bod.

ÚLOHA 1.4 - Pro přirozené $n > 1$ platí $(n, n-1)(n, n-2) \dots (n, 1) = n^k$, kde k je nezáporné celé a (a, b) je největší společný dělitel a a b . Dokažte, že n je mocnina prvočísla.

ŘEŠENÍ: Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme tedy, že existují dvě různá prvočísla p a q , která dělí n .

Podívejme se nejprve na jedno z nich a pokusme se vyjádřit, kolikrát se vyskytne v součinu na levé straně rovnosti. Víme, že n je násobkem p a p bude dělit přesně každé p -té číslo menší nebo rovno n . Proto p dělí právě $n/p - 1$ největších společných dělitelů v součinu. Pokud p^2 už n nedělí, tady jsme skončili. Pokud ale ano, bude také podle stejné úvahy dělit $n/p^2 - 1$ činitelů na levé straně.

Obecně tedy předpokládejme, že nejvyšší mocnina, v níž p dělí n , je a . Potom p^i , $i \leq a$ dělí právě $n/p^i - 1$ činitelů. Abychom získali nejvyšší mocninu p , která dělí levou stranu rovnice, musíme tato čísla sečíst. Dostaneme tedy

$$n/p - 1 + n/p^2 - 1 + \dots + n/p^a - 1 = n(1/p + 1/p^2 + \dots + 1/p^a) - a.$$

Na pravé straně máme n^k . Toto číslo bude dělitelné p^a umocněným na k , tedy nejvyšší mocnina p , která ho dělí, je ak . Jelikož se obě strany rovnice rovnají, musejí se rovnat i mocniny, v nichž je p dělí, a tak dostáváme

$$n(1/p + 1/p^2 + \dots + 1/p^a) - a = ak,$$

$$n(1 + p + \dots + p^{a-1}) - ap^a = p^a ak,$$

$$n \frac{p^a - 1}{p - 1} - ap^a = p^a ak.$$

Použili jsme vzoreček pro součet geometrické řady. Úplně stejnou úvahu můžeme provést i pro q . Nejvyšší mocninu, ve které dělí n , označme b a máme analogicky

$$n \frac{q^b - 1}{q - 1} - bq^b = q^b bk.$$

Vynásobením bq^b , respektive ap^a dostáváme

$$nbq^b \frac{p^a - 1}{p - 1} - abp^a q^b = p^a q^b abk,$$

$$nap^a \frac{q^b - 1}{q - 1} - abp^a q^b = p^a q^b abk.$$

Obě rovnice mají stejnou pravou stranu, máme tedy

$$nbq^b \frac{p^a - 1}{p - 1} - abp^a q^b = nap^a \frac{q^b - 1}{q - 1} - abp^a q^b,$$

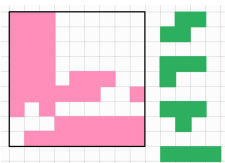
$$bq^b \frac{p^a - 1}{p - 1} = ap^a \frac{q^b - 1}{q - 1}.$$

Na levé straně rovnosti máme q^b , které tak musí dělit pravou stranu. Určitě je nesoudělné s p^a , vždyť p a q jsou různá prvočísla. Stejně tak je nesoudělné i se zlomkem, který je součtem geometrické řady, protože v této řadě q dělí všechny členy kromě 1. Zbývá tak, že $q^b | a$. Analogicky ukážeme, že $p^a | b$. Odtud zejména $q^b \leq a$ a $p^a \leq b$.

Jelikož $p, q \geq 2$, máme $a \geq q^b \geq 2^b$ a $b \geq p^a \geq 2^a$, takže dohromady $a \geq 2^b \geq 2^{2^a}$. Pro nejmenší možné $a = 1$ tato nerovnost neplatí a s rostoucím a poroste pravá strana mnohem rychleji než levá, takže nerovnost nemůže být splněna, máme spor.

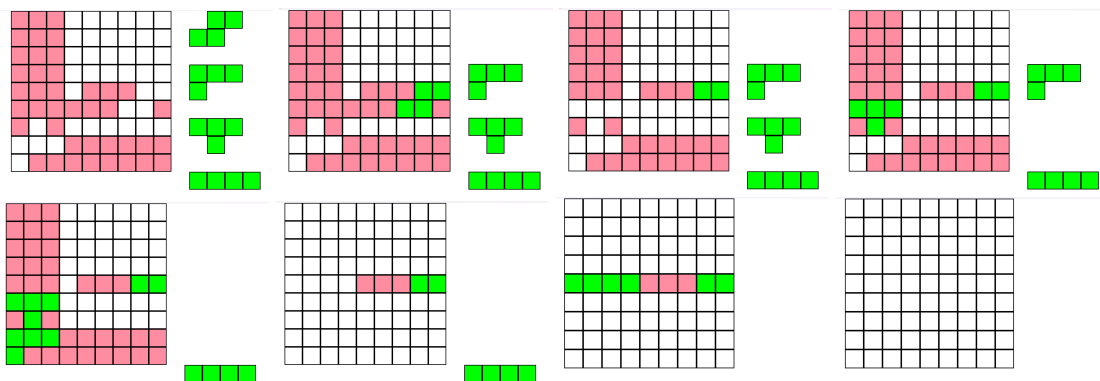
Dostali jsme spor s předpokladem, kterým bylo, že existují dvě různá prvočísla dělicí n . Závěrem tedy je, že pokud nějaké n splňuje rovnici ze zadání, musí být mocninou prvočísla.

ÚLOHA 1.A - S použitím vyobrazených 4 zelených útvarů odstraňte z hracího plánu všechna zabarvená (růžová) pole. Každý z útvarů musíte použít právě jednou a nesmíte je převracet ani otáčet. Útvary vkládáte na plán postupně, pokud je zaplněna celá řada nebo sloupec, okamžitě zmizí.



ŘEŠENÍ: Postup přidávání zelených útvarů je ilustrován pomocí osmi obrázků. V každém kroku se na hrací plán přidal nový útvar, nebo došlo k odstranění sloupců či řádků.

1. obrázek: hrací plán ze zadání
2. obrázek: přidání útvaru S
3. obrázek: došlo k odstranění 6. řádku, protože byl zaplněn
4. obrázek: přidání útvaru T
5. obrázek: přidání útvaru L
6. obrázek: došlo k odstranění řádků 8, 9 a sloupců 1, 2, 3, protože byly zaplněné
7. obrázek: přidání útvaru I
8. došlo k odstranění 5. řádku, protože byl zaplněn. Na obrázku se již nevyskytují žádná růžová políčka, tudíž máme hotovo



ÚLOHA 1.B - Najděte všechna přirozená čísla y splňující rovnici $4^y - 2^y y - 4y = 0$.

ŘEŠENÍ: Máme rovnici $4^y - 2^y y - 4y = 0$. Jednoduchými úpravami dostáváme

$$4^y = 2^y y + 4y$$

$$2^{2y} = y(2^y + 4).$$

Vidíme, že levá strana rovnice je tvaru 2^{2y} , tedy i pravá strana musí být mocnina čísla 2, proto i oba činitele součinu na pravé straně budou mít tuto vlastnost.

$$y = 2^a$$

$$2^y + 4 = 2^b$$

Druhá rovnice má v přirozených číslech řešení pouze pro $y = 2$:

- rovnici můžeme přepsat jako $2^b - 2^y = 4$

Stačí nám tedy vypočítat délky a a $c = 1 - b$. Z podobnosti trojúhelníků ASC a XZC dostáváme:

$$\frac{|CS|}{|AS|} = \frac{|CZ|}{|XZ|}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{3-b}{a}$$

$$3a = 3 - b$$

$$b = 3(1 - a)$$

To si nyní dosadíme do Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníku SXZ a dostáváme kvadratickou rovnici.

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$a^2 + (3(1 - a))^2 = 1$$

$$10a^2 - 18a + 8 = 0$$

$$5a^2 - 9a + 4 = 0$$

Tu si za pomoci diskriminantu $D = (-9)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 1$ jednoduše dopočítáme jako:

$a_{1,2} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 5}$ a tedy $a_1 = 1$ a $a_2 = \frac{4}{5}$. Můžeme si ale všimnout, že a musí být jistě menší než 1 a dostáváme tedy $a = \frac{4}{5}$, $b = 3(1 - \frac{4}{5}) = \frac{3}{5}$ a konečně i $c = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Výsledný objem tedy vychází jako:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(2 + \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{3} \pi - \frac{1}{3} \pi \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(3 - \frac{2}{5}\right) = \\ &= \frac{64}{125} \pi + \frac{4}{3} \pi - \frac{52}{375} \pi = \frac{192 + 500 - 52}{375} \pi = \\ &= \frac{640}{375} \pi = \frac{128}{75} \pi \end{aligned}$$

ÚLOHA 1.D - Mějme abecedu A , která obsahuje 27 písmen. Dále mějme množinu S slov této abecedy, tedy množinu konečných posloupností písmen z A (prázdnou posloupnost nepočítáme).

Protože takových slov je opravdu hodně, budeme na těchto slovech uvažovat rovnosti $xyxz = xz$ a $x^2 = x$, kde $x, y, z \in S$ (tedy to jsou slova a ne písmena). V praxi to znamená, že kdykoliv ve slově bude nějaká podposloupnost xz , potom slovo, co získáme tím, že nahradíme xz posloupností $xyxz$, pro libovolné y , budeme považovat za stejné slovo. A naopak, když $xyxz$ nahradíme xz , budeme též považovat slova za stejná. Stejně tak pro rovnost $x^2 = x$.

Takto se nám ztotožní opravdu hodně slov, například:

$$abc = azabc = azabzbc = azbc$$

Otázka nyní zní, kolik různých tříd slov, co jsme ztotožnili, dostaneme.

ŘEŠENÍ: Nejprve si lze povšimnout, že ani jedna z operací nedokáže změnit první a poslední písmeno slova (vyjma $xx = x$, které „spojí“ první a poslední písmeno). Pak všechna slova délky 2 budou v různých třídách.

Díky příkladu ze zadání již víme, že $abc = azbc$ (kde $z \in S$), tedy libovolná slova se stejným prvním a stejnými posledními dvěma písmeny jsou ve stejné třídě. Tím dostaneme, že tříd slov bude nejvýše tolik, kolik je nejvýše třípísmenných slov (ve kterých není stejné písmeno 2× za sebou).

Díky rovnosti $abc = abcc = abcacc = acc = ac$ však lze také přiřadit libovolnému třípísmennému slovu třídu dle jeho prvního a posledního písmene, tedy ztotožníme dvoupísmenná a vícepísmenná slova. Jinými slovy, libovolná dvě slova se stejnými počátečními a posledními písmeny jsou ve stejné třídě slov. Tříd slov je tedy tolik, kolik je dvoupísmenných slov, tzn. $27 \cdot 27 = 729$. (pozn. jednopísmenná slova patří do příslušné třídy dle rovnosti $a = aa$)