

BRněnský KOrespondenční Seminář



XXXI. ročník
2024/2025

ŘEŠENÍ 5. SÉRIE

POLYNOMY

ÚLOHA 5.1 - Permutoník rád permutuje koeficienty kvadratických polynomů. Jednou našel na nástěnce kvadratický polynom, jehož jeden z koeficientů byl 1 a všechny jeho koeficienty jsou po dvou různá přirozená čísla. Dokažte, že Permutoník zvládne permutovat koeficienty tak, aby výsledný polynom měl 2 různé reálné kořeny.

ŘEŠENÍ: Stačí nám ukázat, že jedna z permutací dá polynom, který má dva reálné kořeny. Vybereme si tu, kde vedoucí koeficient je 1 a koeficient u lineárního členu je větší než absolutní člen. Máme tedy polynom $1x^2 + bx + c; b > c$.

To, že má dva reálné kořeny, je ekvivalentní tomu, že jeho diskriminant $b^2 - 4c$ je kladný. To tedy musíme dokázat.

Jelikož $b > c$ a protože jsou obě přirozená, platí $b \geq c + 1$. Odtud $b^2 - 4c \geq (c + 1)^2 - 4c = c^2 - 2c + 1 = (c - 1)^2$. Ze zadání víme, že c je větší než 1, takže $(c - 1)^2 > 0$, a tedy i diskriminant $b^2 - 4c$ je kladný.

Ukázali jsme, že existuje permutace koeficientů taková, že diskriminant bude kladný a Permutoníkův polynom bude mít dva reálné kořeny.

ÚLOHA 5.2 - Najděte všechny celočíselné kořeny polynomů $4x^2 + ax - a$, jestliže je i a celé číslo.

ŘEŠENÍ: Vzorové řešení bylo převzato od Jany Fisherové Hledáme kořen, tedy x , pro které platí:

$$4x^2 + ax - a = 0$$

Předpokládejme, že $x \neq 1$

$$a = \frac{4x^2}{1-x}$$

Zlomek napravo musí být celé číslo, tudíž $1 - x$ musí dělit $4x^2$. Víme, že $x - 1$ a x jsou neosudělná čísla, tudíž $1 - x$ dělí 4. To znamená, že x může být pouze: -3, -1, 0, 2, 3, 5. Pro tyto hodnoty najdeme a , pro které jsou tyto čísla kořeny: 9, 2, 0, -16, -18, -25

Nyní stačí akorát prověřit, že 1 nemůže být kořen: $4 + a - a = 4 \neq 0$

Tudíž kořeny jsou právě -3, -1, 0, 2, 3, 5

ÚLOHA 5.3 - Máme normovaný záporně reciproký¹ polynom šestého stupně. Víme, že má právě dva dvojnásobné kořeny a součet těchto kořenů je -4 . Určete tento polynom.

ŘEŠENÍ: Hledáme polynom šestého stupně: $P(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$. Takový polynom musí být záporně reciproký, tedy rovnou víme:

$$a_6 = -a_0 = 1 \quad (1)$$

$$a_5 = -a_1 \quad (2)$$

$$a_4 = -a_2 \quad (3)$$

$$a_3 = -a_3 = 0 \quad (4)$$

Protože polynom má být normovaný, rovnou víme, že $a_6 = 1$ a $a_0 = -1$, zároveň člen $a_3 = 0$. To už víme spoustu věcí! Pojďme si to ale ještě přepsat do trochu víc uživatelsky příjemného tvaru, ať v tom něco vidíme: $P(x) = x^6 + bx^5 + cx^4 - cx^2 - bx^1 + 1$. Zadá-li vám někdo polynom, můžete zkusit předpokládat, že takový člověk byl hodný a dal vám pěkné kořeny. Navíc u reciprokých polynomů, které jsou krásně symetrické je běžná praxe vyzkoušet, jestli nemá kořeny ± 1 . Existují na to pravidla, podle toho jestli je záporně, nebo kladně reciproký, není ale potřeba si to pamatovat, prostě to vyzkoušejte.

$$P(1) = 1^6 + b1^5 + c1^4 - c1^2 - b1^1 + 1 = 0 \quad (5)$$

$$P(-1) = (-1)^6 + b(-1)^5 + c(-1)^4 - c(-1)^2 - b(-1)^1 + 1 = 0 \quad (6)$$

Tak máme hned dva kořeny z maximálního počtu šesti kořenů. Můžou být tyto kořeny těmi dvojnásobnými? Jejich součet je nula, ne -4 , tedy odpověď zní ne. To je ale dobře, protože teď víme, že máme mít čtyři kořeny, z čehož dva jsou dvojnásobné. Navíc při reciprokých polynomech platí krásná věc, že je-li α kořenem, pak je kořenem i $\frac{1}{\alpha}$. Hledejme tedy dvojnásobný kořen α a dvojnásobný kořen $1/\alpha$.

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = -4 \quad (7)$$

$$\alpha^2 + 1 = -4\alpha \quad (8)$$

$$\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 0 \quad (9)$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \quad (10)$$

Poznamenejme jen, že kvadratický polynom jehož řešením jsou převrácená čísla je také reciproký, a že skutečně platí $2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$.

Když už známe všechny kořeny, není nic jednoduššího než mezi sebou roznásobit kořenové závorky a zpětně získat celý polynom!

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x-2-\sqrt{3})^2(x-2+\sqrt{3})^2 = (x-1)^2(x^2-4x+1)^2 = x^6 + 8x^5 + 17x^4 - 17x^2 - 8x - 1 \quad (11)$$

¹Záporně reciproký polynom je takový, pro který platí $a_{n-k} = -a_k$ pro všechna $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

ÚLOHA 5.4 - Mějme zobrazení F , které vezme polynom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ a vrátí polynom $g(x) = f(a_n)x^n + f(a_{n-1})x^{n-1} + \dots + f(a_1)x + f(a_0)$. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n existuje polynom $f(x)$ stupně n , který je poslán zobrazením F

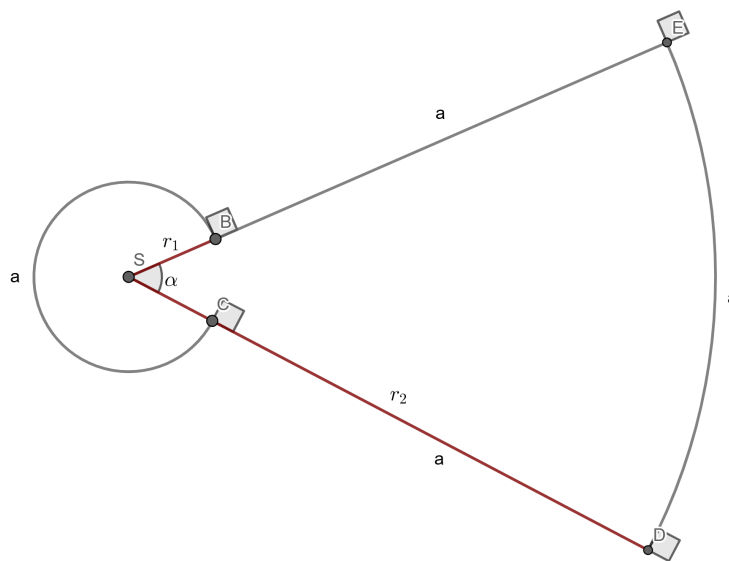
- Na nulový polynom ($g(x) = 0$)
- Sám na sebe ($F(f(x)) = g(x) = f(x)$)
- Rozhodněte, pro která přirozená k existuje v každém stupni polynom, který se zobrazí na svůj k násobek.

ŘEŠENÍ: Pro část 1. ukážeme, že vyhovuje polynom tvaru $f(x) = -x^n - x^{n-1}$. Pro $n = 1$ dostaneme polynom $-x - 1$, který má všechny koeficienty -1 . -1 je zároveň kořen tohoto polynomu, tedy se zobrazením F pošle na nulu. Pro vyšší n je -1 opět kořenem polynomu, neboť $-x^n - x^{n-1} = x^{n-1}(-x - 1)$. Zároveň bude zřejmě jeden z kořenů 0 , proto f zobrazí koeficienty -1 i 0 zobrazí na nulu. Jiné koeficienty nemáme :).

Druhá část je speciální případ části 3 pro $k = 1$.

Pro poslední část uvažujme pro libovolné n polynom tvaru $g(x) = k^{\frac{1}{n}} x^n$. Jeho koeficienty jsou pouze 0 a $k^{\frac{1}{n}}$. $f(0) = 0$, $f(k^{\frac{1}{n}}) = k \cdot k^{\frac{1}{n}}$. Vidíme, že každý koeficient se zobrazí na k násobek původního, tedy $F(g) = kg$. Odtud tedy i druhá část má řešení $g(x) = x^n$.

ÚLOHA 5.A - Dva soustředné oblouky kružnic o délce a jsou spojeny kolmými úsečkami délky a tak, že vzniká „pseudočtverec“ o vnitřním úhlu α a straně a , viz obrázek.



Vyjádřete poměr délky strany pseudočtverce a ku poloměru vnitřní kružnice r_1 .

ŘEŠENÍ: Pro vzorové řešení jsem se rozhodla využít řešení Toma Pazourka:

Pro obvod celé menší kružnice platí $2\pi r_1 = a + \alpha r_1$. Zřejmě platí $\alpha = \frac{\alpha r_1}{r_1} = \frac{|\text{oblouk} BC|}{|BS|}$ a nyní z podobnosti dvou výsečí BSC a ESD dostáváme $\alpha = \frac{|\text{oblouk} ED|}{|ES|} = \frac{a}{a+r_1}$. Náš nově vyjádřený úhel α teď dosadíme do první rovnice a upravíme:

$$\begin{aligned} 2\pi r_1 &= a + \frac{\alpha r_1}{a+r_1} \cdot a \\ 2\pi r_1(a+r_1) &= a(a+r_1) + \alpha r_1 a \\ 2\pi r_1 a + 2\pi r_1^2 &= a^2 + ar_1 + \alpha r_1 a \\ a^2 + (2-2\pi)ar_1 - 2\pi r_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

Rovnost vydělíme číslem r_1^2 a zavedeme substituci, kde si náš hledaný poměr označíme jako x , tzn. $x = \frac{a}{r_1}$. Dostáváme:

$$x^2 + (2 - 2\pi)x - 2\pi = 0.$$

Když nyní vyřešíme tuto kvadratickou rovnici, vyjde nám, že

$$x_{1,2} = \frac{-(2-2\pi) \pm \sqrt{4(1-\pi)^2 + 8\pi}}{2} = \pi - 1 \pm \sqrt{\pi^2 + 1}.$$

Vzhledem k tomu, že poměr dvou délek musí být nezáporné číslo, dostáváme jediné řešení $x = \frac{a}{r_1} = \pi - 1 + \sqrt{\pi^2 + 1}$.

ÚLOHA 5.B - Rozhodněte, zda lze vyplnit šachovnici 8×8 pomocí 7 koňů a jednoho střelce tak, že je každé pole ohrožováno alespoň jednou figurkou. (Figurka neohrožuje políčko, na kterém stojí.)

ŘEŠENÍ: Nejprve si všimněme, že koně i střelec ohrožují vždy pole pouze jedné barvy, přičemž kůň jich ohrozí nejvýše osm a střelec třináct. Necht' BÚNO střelec ohrožuje černá pole. Pak zbývá ještě $32 - 13 = 19$ neohrožených černých polí, na jejichž pokrytí budou zapotřebí alespoň tři koně. Na bílá pole tak zbývají čtyři koně. Je však zapotřebí pokrýt i dvě rohová bílá pole. Koně ohrožující tato pole zvládnou pokrýt právě šest polí celkem, všichni čtyři jezdcí tak ohrozí nanejvýš $2 \times 8 + 2 \times 6 = 30$ polí, což nestačí na pokrytí všech bílých polí. Tím jsme ukázali, že zadání nelze splnit.

ÚLOHA 5.C - Na testu z Brkosologie je 16 otázek. U každé otázky se vybírá ze čtyř odpovědí, z nichž je právě jedna správná. Za každou správnou odpověď získá student 3 body. Za každou špatnou odpověď se mu 1 bod odečítá. Pokud nezaškrtně žádnou odpověď, nebo odpovědi zaškrtně více, nezíská nic. Jaká je pravděpodobnost, že Járo Švrkošík získá právě 16 bodů, když náhodně zaškrtně 16 odpovědí? Uvažujte situaci kdy může zaškrtnout i více odpovědí u jedné otázky. Konečný výsledek nemusíte konkrétně vyčíslit.

ŘEŠENÍ: Hledáme podíl počtu všech vyplnění testu, za něž po zaškrtnutí šestnácti odpovědí získáme 16 bodů, a všech možných vyplnění testu při zaškrtnutí šestnácti odpovědí. Všech možných vyplnění testu při zaškrtnutí 16 otázek je $\binom{64}{16}$. Zbývá tedy zjistit počet všech vyplnění testu, za něž po zaškrtnutí šestnácti odpovědí získáme 16 bodů.

Za každou otázku můžeme získat buď 3, 0, nebo -1 bod. Hledáme čísla, která splňují následující soustavu rovnic: $3s + 0n - ch = 16$ (počet získaných bodů je 16) $s + n + ch = 16$ (počet otázek je 16)

Neznámé s , n a ch značí po řadě počty správných, nevalidních a chybných odpovědí a všechna patří do přirozených čísel s nulou. Tato soustava má tři možná řešení:

i - $(s, n, ch) = (8, 0, 8)$

ii - $(s, n, ch) = (7, 4, 5)$

iii - $(s, n, ch) = (6, 8, 2)$

Všechny tyto tři případy si postupně rozebereme. Chceme pro každou z těchto možností zjistit počet možných vyplnění testu:

i - Járo odpověděl osmkrát správně a osmkrát špatně. Otázky, na které Járo odpověděl správně vybereme $\binom{16}{8}$ způsoby. Pro tyto otázky pak máme jasně dané, kterou odpověď musel Járo zaškrtnout - tu správnou. Na zbylé otázky musel Járo odpovědět chybně. Musel tedy u každé takové otázky vybrat jednu ze tří špatných odpovědí, kterou zaškrtnl. To mohl udělat 3^8 způsoby. (Měl u osmi otázek tři možnosti.) Celkově měl tedy $\binom{16}{8} \cdot 3^8$ možností.

ii - Járo odpověděl sedmkrát správně, pětkrát špatně a čtyřikrát nevalidně. Otázky, na které Járo odpověděl správně vybereme $\binom{16}{7}$ způsoby. U těchto otázek musel vybrat jedinou správnou odpověď. Otázky, na které odpověděl Járo chybně vybereme $\binom{9}{5}$ způsoby. (Vybíráme pětiprvkové podmnožiny z devítiprvkové množiny otázek, na které ne odpověděl Járo správně.) Podobně jako u předchozího případu zaškrtnuté odpovědi u těchto otázek vybereme 3^5 způsoby. Zbývá určit počet možností, jak mohl Járo odpovědět na zbylé čtyři otázky, jejichž odpověď měla být nevalidní. U každé otázky mohl vybrat buď 0, 2, 3, nebo 4 odpovědi. (Kdyby vybral jednu, počítala by se tato otázka do správně nebo chybně zodpovězených otázek.) Járovi zbývají ještě čtyři zaškrtnutí. Má dvě možnosti: Buď u jedné ze čtyř otázek odpoví zaškrtnutím všech odpovědí (vybíráme jednu ze čtyř otázek) a ostatní odpovědi nechá prázdné, nebo odpoví na dvě otázky dvěma odpověďmi a zbylé odpovědi nechá nezaškrtnuté (vybíráme dvě odpovědi ze čtyř a pak máme u každé odpovědi 6 možností, jak vybrat dvě odpovědi ze čtyř). To odpovídá $\binom{16}{7} * \binom{9}{5} * 3^5 * ((\binom{4}{1}) + (\binom{4}{2}) * 6^2)$.

iii - Járo odpověděl šestkrát správně, dvakrát špatně a osmkrát nevalidně. Otázky, na které odpověděl správně, vybereme $\binom{16}{6}$ způsoby. Opět mohl vybrat pouze jedinou odpověď. Otázky, na které odpověděl Járo chybně vybereme $\binom{10}{2}$ způsoby. Chybné odpovědi vybírá, podobně jako v předchozích případech, 3^2 způsoby. Teď zbývá rozebrat počet různých možných nevalidních zodpovězení. Potřebujeme mít osm nevalidně zodpovězených otázek a to osmi odpověďmi. Máme čtyři možnosti, jak toho dosáhnout: a) 4 a 4 odpovědi, b) 4, 2 a 2 odpovědi c) 3, 3 a 2 odpovědi d) 2, 2, 2 a 2 odpovědi. Odpovídá to celkově $\binom{16}{6} \binom{10}{2} * 3^2 * ((\binom{8}{2}) + (\binom{8}{2}) * 6^2 * (\binom{6}{1}) + (\binom{8}{2}) * 4^2 * (\binom{6}{1}) * 6 + (\binom{8}{4}) * 6^4)$.

Nakonec všechny případy sečteme a podělíme $\binom{64}{16}$:

$$\frac{\binom{16}{8} * 3^8 + \binom{16}{7} * \binom{9}{5} * 3^5 * ((\binom{4}{1}) + (\binom{4}{2}) * 6^2) + \binom{16}{6} \binom{10}{2} * 3^2 * ((\binom{8}{2}) + (\binom{8}{2}) * 6^2 * (\binom{6}{1}) + (\binom{8}{2}) * 4^2 * (\binom{6}{1}) * 6 + (\binom{8}{4}) * 6^4)}{\binom{64}{16}}$$

Což když vyčíslíme je přibližně 0,0009076, tedy 0,09076%.

ÚLOHA 5.D - Kolik nejméně bodů musíme nakreslit dovnitř konvexního n -úhelníku, aby v každém trojúhelníku, jehož vrcholy jsou vrcholy tohoto n -úhelníku, ležel alespoň jeden bod?

ŘEŠENÍ: Nejprve dokážeme, že $n-3$ bodů nestačí. Mějme libovolnou triangulaci n -úhelníka. Ta obsahuje $n-2$ trojúhelníků. V každém z nich musí ležet alespoň jeden bod, což dává $n-2$ bodů, tedy $n-3$ bodů určitě stačit nebude.

Nyní mějme libovolný konvexní n -úhelník. Zorientujme ho tak, aby žádná z jeho stran ani úhlopříček nebyla svislá (což zřejmě jde, jelikož je jich konečný počet). Označme vrchol nejvíce nalevo V_1 a číslujme podle x -ové souřadnice V_n , tedy V_n je vrchol nejvíce vpravo. Nyní sestrojíme chtěných $n-1$ bodů. Pro každý vrchol V_i kromě V_1 a V_n sestrojíme bod B_i . Spustíme svislou přímkou p_i procházející bodem V_i . Nechť U_i je bod odpovídající průsečíku p_i s některou z úhlopříček takový, že jeho vzdálenost od V_i je minimální. Bod B_i pak bude ležet v polovině úsečky $V_i U_i$.

Nyní dokážeme, že danou konstrukcí jsme opravdu dosáhli toho, že v každém trojúhelníku, jehož vrcholy jsou vrcholy tohoto n -úhelníku, leží alespoň jeden bod. Mějme trojúhelník $V_i V_j V_k$, kde buď $i < j < k$. Pak bod B_j zřejmě leží uvnitř úhlu $\angle V_i V_j V_k$. Zároveň z konstrukce platí, že úsečku $V_j B_j$ neprotíná strana $V_i V_k$, neboť ji neprotíná žádná

úhlopříčka. Bod B_j tedy leží uvnitř trojúhelníku $V_i V_j V_k$.

Tím jsme dokázali, že musíme nakreslit alespoň $n - 2$ bodů.

Ps.: vzorové řešení bylo lehce upraveno pro lepší čitelnost, nápad na zčitelnění zapůjčen od Erika Ježka.