

BRněnský KOrespondenční Seminář



XXXI. ročník
2024/2025

ŘEŠENÍ 4. SÉRIE

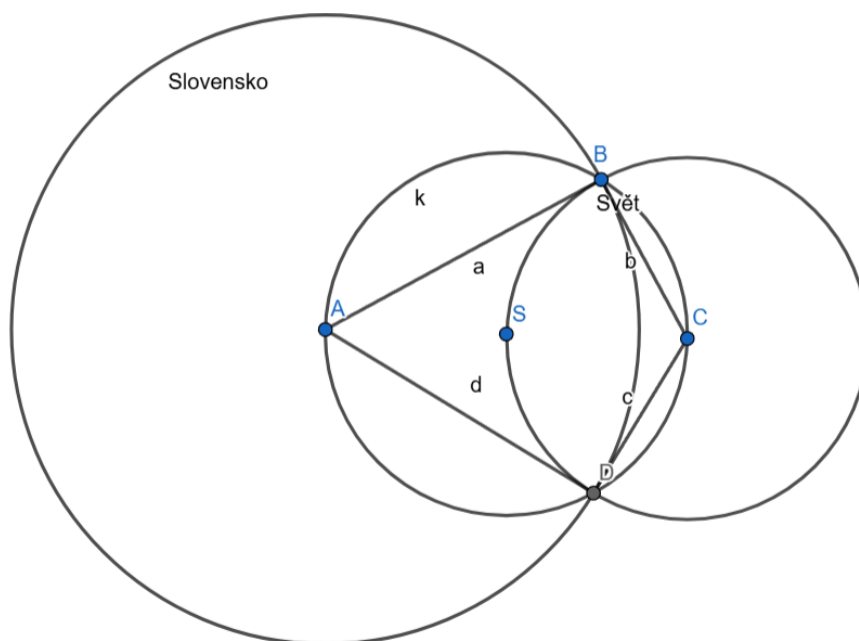
KRUŽNICE

ÚLOHA 4.1 - Mějme deltoid $ABCD$ vepsaný do kružnice $k(S, r)$, přičemž $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDA|$; kružnici $Slovensko(A, |AB|)$; kružnici $Svet(C, |BC|)$. Určete velikost úhlu (interval) BAD tak, aby:

- S leží v průniku **kruhů** určených kružnicemi $Svet, Slovensko$,
- S leží v průniku **kružnic** $Svet, Slovensko$.

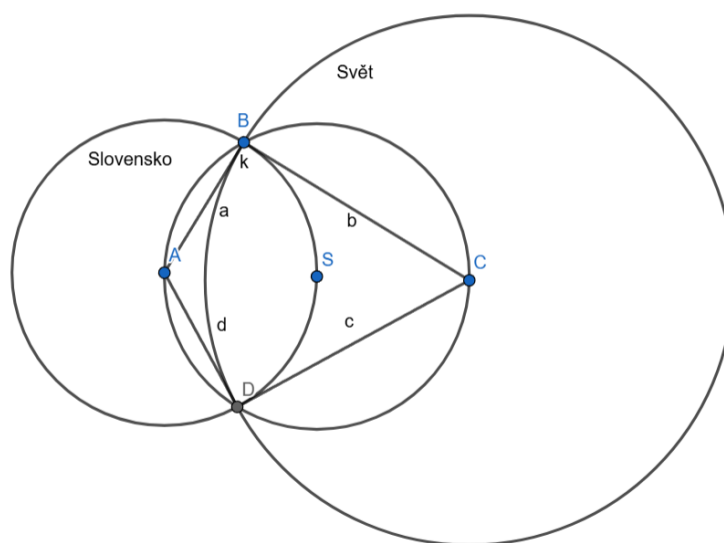
ŘEŠENÍ: Protože je deltoidu opsaná kružnice, jedná se o tětiový čtyřúhelník, pro který platí, že součet jeho protilehlých úhlů je 180° . Ze zadání víme, že se velikosti úhlů $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle CDA$ rovnají, proto platí, že $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDA| = 90^\circ$.

Podíváme se na krajní situace:



Pokud by kružnice Svt procházela bodem S , pak budou trojúhelníky $\triangle BCS$ a $\triangle DCS$ rovnostranné. (Kružnice Svt i kružnice k jsou stejně velké, protože sdílí poloměr $|SC|$ a zároveň $|DC|$ i $|BC|$ jsou poloměry kružnice Svt , proto $|SC| = |DC| = |BC|$.) Úhel $\sphericalangle BCD$ má tedy 120° ($2 \times 60^\circ$), takže $|\sphericalangle BAD|$ je 60° (součet protilehlých úhlů v tětiovém čtyřúhelníku je 180°). Aby bod S ležel uvnitř kruhu Svt , musí být velikost úhlu $\sphericalangle BAD$ větší nebo rovna 60° .

Pokud by kružnice $Slovensko$ procházela bodem S , pak budou trojúhelníky $\triangle BAS$ a $\triangle DAS$ rovnostranné. (Kružnice $Slovensko$ i kružnice k jsou stejně velké, protože sdílí poloměr $|SA|$ a zároveň $|DA|$ i $|BA|$ jsou poloměry kružnice $Slovensko$, proto $|SA| = |DA| = |BA|$.) Úhel $\sphericalangle BAD$ má tedy 120° ($2 \times 60^\circ$). Aby bod S ležel uvnitř kruhu $Slovensko$, musí být velikost úhlu $\sphericalangle BAD$ menší nebo rovna 120° .

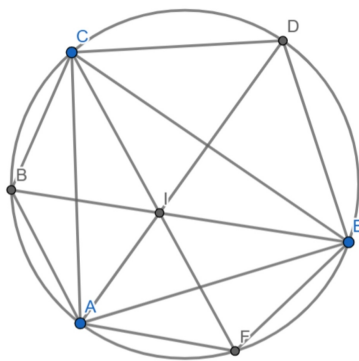


Takže aby bod S ležel v průniku kruhů určenými kružnicemi Svt a $Slovensko$, musí $|\angle BAD|$ náležet do uzavřeného intervalu $< 60^\circ, 120^\circ >$.

Průnik dvou kružnic může být buď jeden, dva, nebo nekonečně mnoho (pokud jsou kružnice totožné). Kružnice Svt a $Slovensko$ totožné nejsou, protože mají dva různé středy. Proto je maximální počet průsečíků těchto dvou kružnic 2. Těmi jsou ale už body B a D , proto bod S už dalším průsečíkem není, pokud některé z těchto tří bodů nesplývají. Body B a D jsou určitě různé, protože to jsou dva různé vrcholy čtyřúhelníku a S je různý od B i D , protože B a D leží na obvodu kružnice k a S je její střed.

ÚLOHA 4.2 - $ABCDEF$ je šestiúhelník vepsaný kružnici k , kde $AB = BC$, $CD = DE$ a $EF = FA$. Ukažte, že AD , BE a CF se protínají v jednom bodě.

ŘEŠENÍ: Uvažujme kružnici opsanou trojúhelníku ACE . Kružnice procházející všemi třemi body je jen jedna a to k . Tedy na kružnici opsané trojúhelníku ACE leží i body B, D, F . Protože $|AB| = |BC|$, musí bod B ležet na ose strany AC . Tedy B je švrčkovým bodem trojúhelníku ACE naproti bodu E . Pak přímka EB je osou úhlu $\angle AEC$. Podobně přímky AD, CF jsou po řadě osami úhlů $\angle EAC, \angle ACE$. Tedy zadané úsečky jsou osami úhlů v trojúhelníku a ty se vždy protínají v jednom bodě.



ÚLOHA 4.3 - Mějme konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Vepíšeme kružnici k_1 trojúhelníku ABD a k_2 trojúhelníku BCD . Kružnice k_1 se strany BD dotýká v bodě X , kružnice k_2 se strany BD dotýká v bodě Y . Ukažte, že $X = Y$, jestliže je $ABCD$ tečnový čtyřúhelník.

ŘEŠENÍ: Označme si body dotyku kružnic se stranami čtyřúhelníka:

K - strana AB , kružnice k_1

L - strana BC , kružnice k_2

M - strana CD , kružnice k_2

N - strana AD , kružnice k_1

Dále z mocnosti bodu ke kružnici víme, že

$$|AK| = |AN|$$

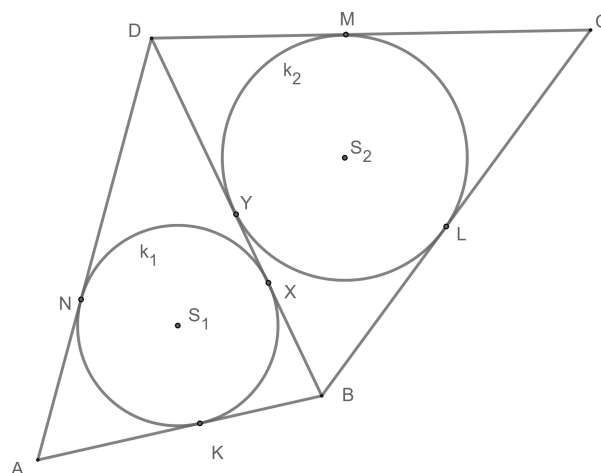
$$|BK| = |BX|$$

$$|DX| = |DN|$$

$$|CL| = |CM|$$

$$|BL| = |BY|$$

$$|DY| = |DM|$$



Pro tečnový čtyřúhelník platí:

$$|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$$

což můžeme pomocí výše vypsání rovnic přepsat jako:

$$(|AK| + |KB|) + (|CM| + |MD|) = (|BL| + |LC|) + (|DN| + |NA|) \quad (\text{body dotyku leží na straně, proto si délky odpovídají})$$

$$|AN| + |BX| + |CL| + |DY| = |BY| + |LC| + |DX| + |NA| \quad -|AN| - |CL|$$

$$|BX| + |DY| = |BY| + |DX| \quad |BX| = |BD| - |DX|; |BY| = |BD| - |DY|$$

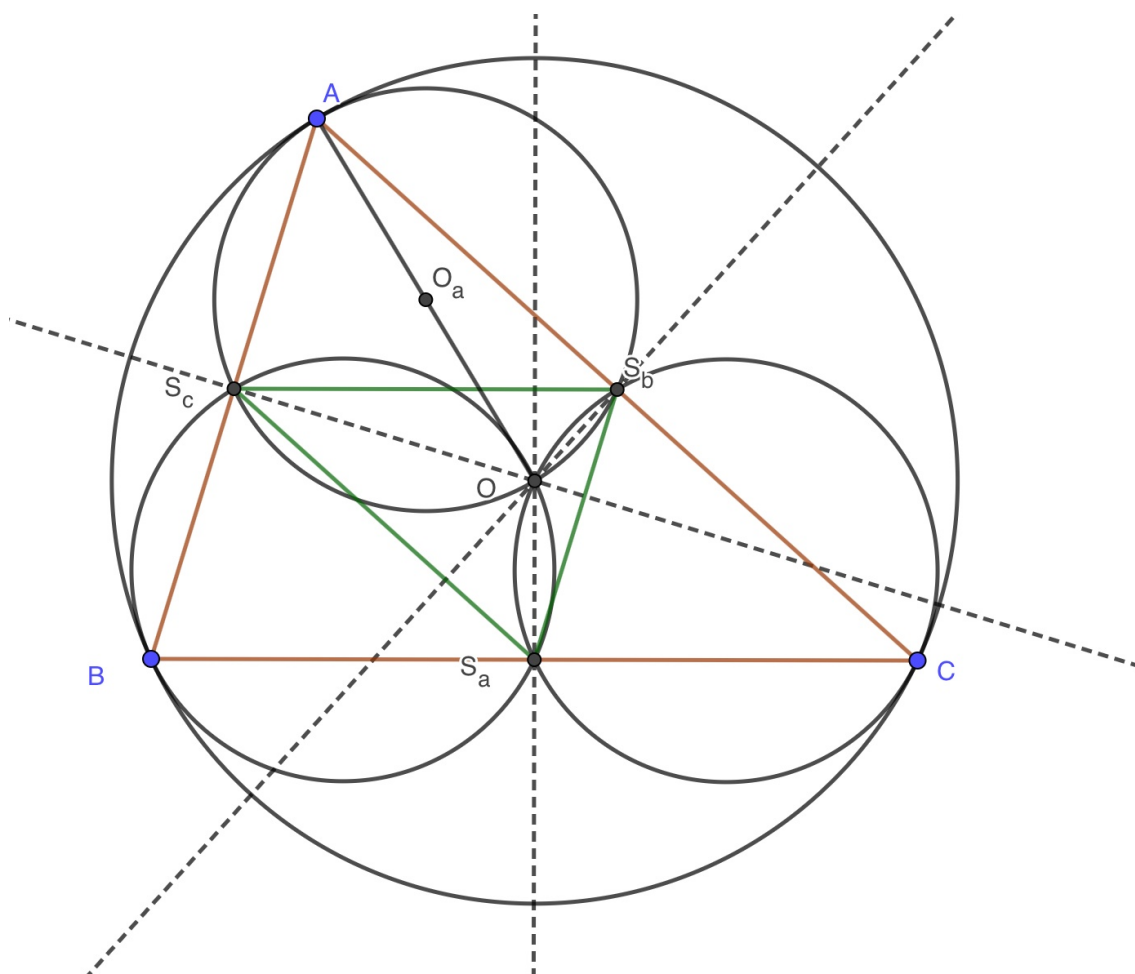
$$|BD| - |DX| + |DY| = |BD| - |DY| + |DX|$$

$$2|DY| = 2|DX| \Rightarrow |DY| = |DX|$$

Víme, že bod X i bod Y leží na úsečce BD , proto $X = Y$

ÚLOHA 4.4 - Necht ABC je ostroúhlý trojúhelník s různými délkami stran. S_a, S_b, S_c jsou po řadě středy stran a, b, c . Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AS_bS_c , BS_aS_c a CS_aS_b se protínají v jednom bodě a ukažte, že tento bod leží na přímce určené středem kružnice opsané trojúhelníku $S_aS_bS_c$ a těžištěm trojúhelníku ABC .

ŘEŠENÍ: Uvědomme si, že každé dvě kružnice budou mít dva průsečíky - jedním budou příslušné středy stran. Ten druhý musí existovat, protože kdyby se dotýkaly jen v jednom bodě, nacházeli bychom se v případě pravoúhlého trojúhelníka, ze zadání ale máme, že ABC je ostroúhlý.

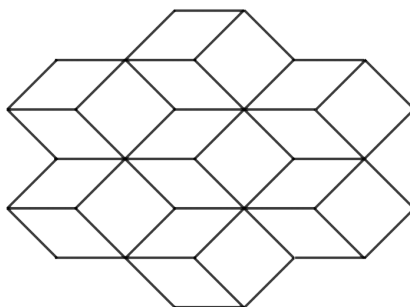


Všimneme si, že všechny tři kružnice opsané menším trojúhelníkům se protínají ve středu kružnice opsané trojúhelníku ABC . Musíme to ale ukázat. AS_bS_c je trojúhelník podobný trojúhelníku ABC , oba jsou dokonce stejnohlede, se středem v bodě A a koeficientem $\frac{1}{2}$, v této stejnohledelosti se na sebe musí zobrazit i středy kružnic opsaných malému a velkému trojúhelníku. Budou tedy ležet na jedné přímce i s bodem A , přičemž $2|AO_a| = |AO|$, kde O_a je střed kružnice opsané AS_bS_c a O je střed kružnice opsané ABC , tím pádem bod O spadne na kružnici opsanou AS_bS_c , analogicky ukážeme, že se bude nacházet i na kružnicích opsaných zbylým menším trojúhelníkům.

Uvědomme si ještě, že středy stran S_a, S_b, S_c leží na Feuerbachově kružnici. Ze studijního textu pak víme, že střed Feuerbachovy kružnice, těžiště ABC a střed kružnice opsané O leží na Eulerově přímce. Tím jsme hotovi.

ÚLOHA 4.A - Rozhodněte, zda lze vyplnit všechna políčka tabulky na obrázku čísly 0 – 10 tak, že platí zároveň:

1. pokud čísla m a n leží v políčkách sousedících stranou, 3 nedělí $(m - n)$,
2. žádné dva šestiúhelníky (skládající se ze tří políček) nemají stejný součet čísel.



ŘEŠENÍ: Zaměříme se na šestiúhelníky tvořené právě třemi políčky. V každém takovémto šestiúhelníku spolu sousedí všechna políčka. Pokud rozdíl každých dvou nemá být dělitelný třemi, musí čísla vepsaná do políček dávat zbytky 0, 1 a 2 (mod 3). Kdyby nějaká dvě políčka dávala stejný zbytek r , dala by se zapsat jako $3a + r$ a $3b + r$ a jejich rozdíl by byl $3a + r - 3b - r = 3(a - b)$, což je zřejmě dělitelné třemi. Pojďme se tedy podívat na to, jaké součty nám tyto šestiúhelníky mohou dát. Pokud máme splněnou první podmínku, tak si čísla v jednom šestiúhelníku můžeme zapsat jako $3a$, $3b + 1$ a $3c + 2$. Když je nyní sečteme, dostáváme $3a + 3b + 1 + 3c + 2 = 3(a + b + c + 1)$. Všechny součty tedy budou dělitelné třemi a nejmenší možný je 3 a největší je 27 (0 ani 30 při splnění první podmínky dostat nemůžeme). Celkem tedy můžeme dostat 9 různých součtů (konkrétně 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 a 27), ale šestiúhelníků je 10. Vždy budou tedy existovat minimálně 2 šestiúhelníky, které budou dávat stejný součet a nelze tabulku vyplnit tak, aby byly splněny obě podmínky zároveň.

ÚLOHA 4.B - Definujme posloupnost čísel P_n následovně:

$$P_0 = 0$$

$$P_1 = -1$$

$$n \geq 2 : P_n = P_{n-1} + P_{n-2} + (-1)^n \cdot F_n$$

Kde F_n je n -tý člen Fibonacciho posloupnosti, definované jako

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$n \geq 2 : F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

V závislosti na n určete P_n .

ŘEŠENÍ: Když si vypíšeme prvních několik členů obou posloupností, můžeme si všimnout, že by vzorec pro P_n mohl být takový, že pro sudá n platí $P_n = 0$ a pro lichá n platí $P_n = -F_{n+1}$. Domněnku dokážeme matematickou indukcí.

Báze: Pro $n = 0$ platí $P_0 = 0$ a pro $n = 1$ platí $P_1 = -1 = -F_2$.

Indukční předpoklad: Mějme libovolné $n \geq 2$. Předpokládejme nyní, že pro všechna $m < n$ platí $P_m = 0$ pro m sudé a $P_m = -F_{m+1}$ pro m liché.

Indukční krok: Samotný indukční krok rozdělíme na dva příklady.

Nechť je n sudé, tedy $n = 2k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$P_n = P_{2k} = P_{2k-1} + P_{2k-2} + (-1)^{2k} \cdot F_{2k} = -F_{2k-1+1} + F_{2k} = 0$$

Nechť je n liché, tedy $n = 2k + 1$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$P_n = P_{2k+1} = P_{2k} + P_{2k-1} + (-1)^{2k+1} \cdot F_{2k+1} = -F_{2k-1+1} - F_{2k+1} = -F_{2k+2} = -F_{n+1}$$

Tím jsme dokázali předpoklad, že P_n se dá vyjádřit jako $P_n = 0$ pro sudá n a $P_n = -F_{n+1}$ pro lichá n .

Kdyby po nás zadání chtělo explicitní vyjádření bez použití funkce F_n , můžeme si F_n vyjádřit jako

$$F_n = -\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \frac{(1-\phi)^n}{\sqrt{5}}.$$

ÚLOHA 4.C - V závislosti na $a \in R$ určete počet řešení soustavy rovnic pro $x, y, z, w \in R$:

$$x^2 + y^2 + zw = a$$

$$y^2 + z^2 + xw = 2a$$

$$w^2 + x^2 + yz = 3a$$

$$z^2 + w^2 + xy = 4a$$

ŘEŠENÍ: Rovnice po řadě označme (1), (2), (3), (4). Můžeme si všimnout, že sečtením (1) + (4) a (2) + (3) dostaneme v obou případech na pravé straně $5a$. Můžeme tedy porovnat levé strany a výraz zjednodušit:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + zw + xy = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + xw + yz \quad (1)$$

$$zw + xy - xw - yz \quad (2)$$

$$z(w - y) - x(w - y) = 0 \quad (3)$$

$$(z - x)(w - y) = 0. \quad (4)$$

Nutná podmínka pro platnost soustavy je tedy (nezávisle na hodnotě a) $x = z \vee y = w$. Můžeme si všimnout, že při $x = z$ jsou levé strany rovnic (1) a (2) totožné, což implikuje $a = 2a$ a tedy $a = 0$. Obdobně při $y = w$ jsou totožné levé strany rovnic (1) a (3), tedy $a = 3a$, z čehož opět $a = 0$. Z podmínky tak přímo vyplývá, že pokud má soustava řešení, pak $a = 0$. Obměnou nenulovost a implikuje, že neexistuje žádné řešení soustavy.

Pojďme nyní všechna řešení pro $a = 0$ nalézt. Sečtením všech čtyř rovnic (pro $a = 0$) a následnou úpravou na čtverce dostáváme:

$$2(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) + zw + xw + yz + xy = 0 \quad (5)$$

$$\frac{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+w)^2 + (x+w)^2}{2} + x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0, \quad (6)$$

z čehož okamžitě vidíme, že $x = y = z = w = 0$ je jediné řešení soustavy pro $a = 0$, jelikož levá strana rovnice obsahuje pouze nezáporná čísla (druhé mocniny reálných čísel jsou vždy nezáporné).

Celkem tedy vidíme, že pro $a \neq 0$ neexistuje řešení v $\mathbb{R}$ a pro $a = 0$ má soustava řešení pouze pro $x = y = z = w = 0$ v tomto oboru.

ÚLOHA 4.D - Mějme n měst ve státě Svět a m měst ve státě Slovensko. Platí, že mezi dvěma městy může existovat přímá cesta (která neprochází žádným jiným městem) pouze pokud jsou v jiném státě. Avšak ne mezi všemi městy, které jsou v různých státech, musí vést přímá cesta. V závislosti na n a m najděte největší k takové, že mezi městy může existovat k přímých cest, ale přitom se nikde nevytvoří "kružnice/cyklus"- tedy pokud Kouma s Ňoumou pojedou autem a nebudou se po cestě vracet zpátky, nikdy nedojedou do města, kde již byli.

ŘEŠENÍ: Nejprve ukážeme, že počet přímých cest mezi městy nepřekročí $n + m - 1$. V obou státech dohromady je $n + m$ měst; představme si, že mezi žádnými dvěma nevede cesta, a města tedy tvoří $m + n$ navzájem nepropojených komponent. Když nyní přidáme cestu spojující dvě města, propojíme navzájem dvě komponenty a počet nepropojených komponent se o jedna sníží. Zároveň platí, že mezi dvěma městy existuje cesta (ne nutně přímá), právě když jsou součástí jedné komponenty. Pokud bychom přidali přímou cestu mezi městy, která už jsou součástí jedné komponenty, existovaly by mezi nimi nejméně dvě různé cesty a jejich spojením by vznikla kružnice. Jediné cesty, které tedy můžeme mezi města přidávat, jsou ty, které počet komponent snižují o 1. Je zřejmé, že na konci musí existovat alespoň jedna komponenta, a tak můžeme mezi $n + m$ měst přidat nejvýše $n + m - 1$ cest.

Abychom ukázali, že takového k lze dosáhnout, najdeme pro každou dvojici n, m konstrukci obsahující $n + m - 1$ přímých cest. Vybereme si v každém státě jedno hlavní město; tomu na Slovensku budeme říkat Bratislava a tomu ve Světě Brno. Jako první propojíme Bratislavu se všemi městy ve Světě, tím vznikne n přímých cest. Dále Brno propojíme se všemi městy na Slovensku kromě Bratislavy, protože mezi nimi cesta už existuje. Tím sestrojíme dalších $m - 1$ přímých cest, dohromady jich tedy máme $n + m - 1$.

Všechna města kromě Brna a Bratislavy jsou v naší konstrukci propojena pouze s jedním dalším městem, a tak nemohou být součástí kružnice (jakmile do nich dojedeme, můžeme pokračovat pouze toutéž cestou, kterou jsme do nich přijeli). Jediná města, která by tedy mohla tvořit kružnici, jsou Brno a Bratislava, kružnice mezi pouze dvěma městy ale vzniknout nemůže, a tak naše konstrukce odpovídá zadání a ukázali jsme, že $k = n + m - 1$.