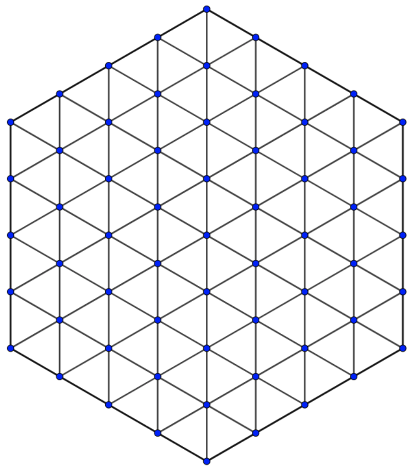
BRněnský KOrespondenční Seminář

XXXI. ročník
2024/2025

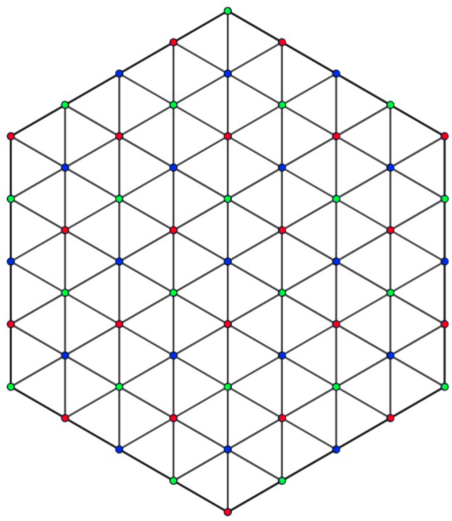
ŘEŠENÍ 3. SÉRIE

NÁZEV SÉRIE

ÚLOHA 3.1 - V šestiúhelníku rozděleném na 96 trojúhelníků jsou na každém z 61 bodů dvě šišky. V každém tahu musíme na každý ze tří vrcholů jednoho zvoleného nejmenšího trojúhelníku přidat jednu šišku. Může nastat situace, kde je na každém bodu 2024 šišek?



ŘEŠENÍ: Mohli bychom si vrcholy trojúhelníků obarvit jako na obrázku. Pokud pak zvolíme nějaký trojúhelník, tak přibyde jedna šiška na modrou, zelenou i červenou. Nicméně červených a zelených bodů je každých 21, modrých jenom 19. Všem modrý musíme dohromady dodat $19 \cdot 2024 - 19 \cdot 2 = 38418$ šišek, což uděláme výběrem 38418 trojúhelníků. Pak ale počet šišek na červených vrcholech bude $21 \cdot 2 + 38418 = 38460$ přičemž ale ve finálním stavu by na všech červených vrcholech mělo být $21 \cdot 2024 = 42504$.

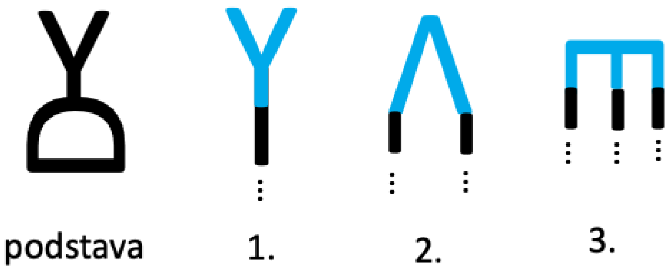


BRKOS Team

ÚLOHA 3.2 - Strom DEVY má podstavu ve tvaru písmene D, ze které trčí Y. Kromě toho máme neomezený počet písmen E,V,Y a větví se. V každém kroku musí stromu přidat jedno patro o výšce jednoho písmenka. Může stavět následujícími způsoby:

1. na jednu větev stromu umístí písmeno Y a stanou se z ní tak dvě nové větve,
2. na dvě sousední větve umístí písmeno V vzhůru nohama a spojí je tak do jedné větve,
3. na tři sousední větve umístí písmeno E otočené o 90° tak, že z nich žádná větev nepokračuje.

Rozhodněte, zda existuje strom, který v posledním patře nemá žádnou volnou větev, tzn. Devy všechny větve ukončil písmeny E.



ŘEŠENÍ: Jako vzorové řešení jsem se rozhodla použít řešení Pavla Hyánka: Uvažme libovolné patro stromu a v něm označme y, v, e postupně počty výskytů písmen Y, V, E v něm. Počet větví přicházejícího z předchozího do tohoto patra označme a a počet vycházejících větví z tohoto patra do toho dalšího jako b. Z tvarů jednotlivých písmen dostáváme

$a = y + 2v + 3e, b = 2y + v \Rightarrow 3 \mid (3y + 3v + 3e) = a + b.$

Pokud tedy $3 \nmid a$, pak zřejmě $3 \nmid b$. Jelikož 3 nedělí počet písmen přicházejích do prvního patra, nemůže díky tomuto pozorování dělit počet větví přicházejícíh do jakéhokoliv jiného patra.

Kdyby existoval strom, z jehož posledního patra by nevycházela žádná větev pak by 3 dělila tento počet výchozích větví (který je 0) což je spor s předchozím porozováním. Takový strom tedy existovat nemůže.

ÚLOHA 3.3 - Drak má n hlav. Když mu usekneš 2 hlavy, naroste mu dalších $k+2$ hlav, kde k je počet hlav před useknutím a vzápětí mu upadne $s(k)$ hlav, kde $s(k)$ je ciferný součet k. Když mu usekneš 11, narostou mu dvě hlavy. Jiné počty hlav mu sekat nelze, musíš tedy useknout právě 2 nebo právě 11 hlav. Pro která n dokážeš draka zabít? Draka zabijeme tak, že usekneme právě tolik hlav, kolik jich aktuálně má.

ŘEŠENÍ: Ukážeme, že zbytek počtu hlav po dělení devíti se nemění, tj. je invariantem.

Zřejmě useknutí 11 hlav zbytky zachovává, tj. $n - 11 + 2 \equiv n \mod 9$

Při sekání 2 se počet hlav draka změní na $n - 2 + n + 2 - s(n) = 2n - s(n)$, avšak protože $n \equiv s(n) \mod 9$, vztah lze dále kongruencemi upravit: $2n - s(n) \equiv 2n - n \equiv n \mod 9$. Tedy i useknutí dvou hlav zachová zbytkovou třídu modulo 9.

Nechť $n = 9k+2, k \in \mathbb{N}_0$. Pak lze draka zabít opakovaným sekáním 11 hlav, při každém useknutí se počet hlav sníží o 9, až jich zbyde 11, jejichž useknutím je drak zabit. Případ $n = 2$ vyřešíme useknutím dvou hlav.

V opačném případě, kdy $n \not\equiv 2 \mod 9$, se sekáním hlav nelze dostat do stavu $n \equiv 2 \mod 9$, tedy zejména nemůže nastat situace, kdy má drak 2 nebo 11 hlav a lze jej zabít.

Tím je důkaz hotov.

Úloha 3.4 - Kouma má na displeji svých měřáků všechna přirozená čísla od 1 do 2024. Sestřička si vždy vybere dvě čísla, ta se smažou a místo nich se na displeji objeví jejich nejmenší společný násobek a největší společný dělitel. Pan doktor hlídá, že součet čísel na displeji neklesne pod 1500000. Ukažte, že to se nikdy nestane.

Řešení: Jak je známo, součin dvou přirozených čísel je stejný jako součin jejich NSN a NSD. Tedy libovolnou úpravou se součin všech čísel nezmění a bude stále 2024!. Z AG nerovnosti víme, že $\frac{S}{2024} \geq \sqrt[2024]{2024!}$, kde S je součet všech čísel. Proto S je větší než pravá strana vynásobená číslem 2024, což je číslo větší než 1500000.

Úloha 3.a - Mějme ostroúhlý trojúhelník MRK a 3 různé kružnice. Střed každé kružnice je zároveň středem strany trojúhelníku MRK a dále platí, že na každé kružnici leží právě 2 vrcholy trojúhelníku. Dokažte, že všechny průsečíky těchto kružnic leží na stranách trojúhelníku MRK.

Řešení: Máme ostroúhlý trojúhelník MRK. Dále máme tři kružnice k, m, r se středy ve středech stran MR, RK, KM trojúhelníku MRK takové, že na každé z nich leží právě dva vrcholy tohoto trojúhelníku.

Mějme BÚNO kružnici k se středem odpovídajícím středu úsečky MR. Jelikož má trojúhelník tři vrcholy a dva z nich mají ležet na kružnici k, musí na ní ležen alespoň jeden z vrcholů M, R. Zřejmě, pokud na ní leží jeden, musí na ní ležet i druhý; tedy oba body M, R leží na kružnici k. Stejně je možné odargumentovat, že na kružnici m leží právě vrcholy R, K a že na kdužnici r leží právě vrcholy K, M.

Dále uvažujme BÚNO dvojici kružnic k, m. Jeden z jejich průsečíků je zřejmě bod R, který leží dokonce na dvou stranách trojúhelníku MRK. Jelikož středy kružnic k, m a bod R neleží na jedné přímce, mají kružnice k, m ještě jeden průsečík. Označme ho X. Kružnice k je thaletova vůči trojúhelníku MRX, a kružnice m je thaletova vůči trojúhelníku RKX. Z toho plyne, že úhly $\sphericalangle RXM$ a $\sphericalangle RXK$ jsou oba pravé. Z toho plyne, že bod X leží na úsečce MK, která je stranou trojúhelníku MRK.

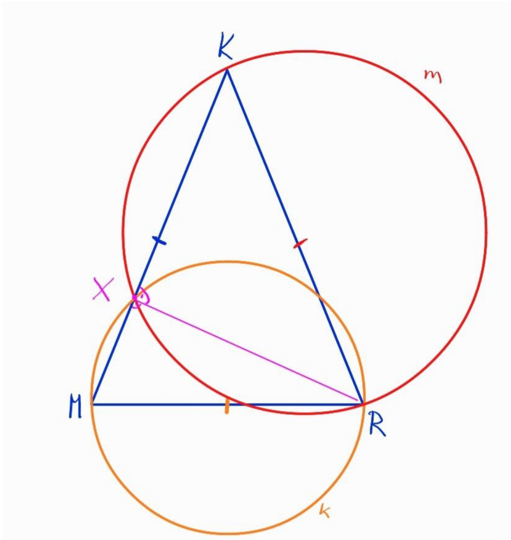
Úloha 3.b - Najděte všechna reálná a taková, že existuje reálné c takové, že rovnice $ax^2 + 3x + c = c^2$ má právě jedno řešení.

Řešení: Rovnici můžeme upravit do tvaru: $ax^2 + 3x + (c - c^2) = 0$

Tato rovnice má právě jedno řešení právě tehdy když je její diskriminant roven 0, tedy:

$D = B^2 - 4AC = 9 - 4a(c - c^2) = 0 \quad => \quad 4ac^2 - 4ac + 9 = 0$

Hledáme a takové, že tato rovnice má alespoň jedno řešení - a je pro nás neznámý parametr, pro který se snažíme najít všechny možné hodnoty takové, aby diskriminant této nové rovnice pro proměnnou c byl větší nebo roven 0 a rovnice měla alespoň jedno



řešení.

$D' = (4a)^2 - 4 \cdot (4a) \cdot 9 \geq 0 \quad => \quad 16a(a-9) \geq 0$

Tato nerovnice je splněna pro $a \in (-\infty; 0] \cup [9; \infty)$

Úloha 3.c - Profesorka Hrudková pekla perník. Uvažme čtverec perníkového těsta o délce 1 metr. Do něj náhodně vykrojila kruhový perníček o průměru 0,5 metru. Jaká je pravděpodobnost, že se jí poté do zbytku těsta podaří vykrojit ještě jeden stejně velký kruhový perníček, pokud ho tentokrát může vykrojit na libovolném místě?

Řešení: Úlohu budeme řešit s pomocí geometrické pravděpodobnosti.

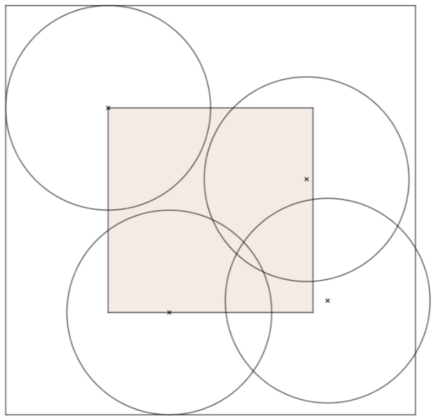
Mějme množinu všech možných vykrojení jednoho kruhového perníku a množinu všech středů těchto kruhových perníků. Nalézt první množinu je pro naše účely ekvivalentní s nalezením té druhé. Množinu všech středů vykrojení nazveme A_1. Každý prvek této množiny je tak vzhledem k hledané pravděpodobnosti jedním možným případem, který mohl nastat a množina zároveň obsahuje všechny případy, které mohly nastat.

Dále vymezíme její podmnožinu, v níž umístění středu prvního kruhového perníku zajišťuje úspěšné vykrojení druhého kruhového perníku. Vzhledem k hledané pravděpodobnosti se jedná o množinu všech příznivých případů. Nazveme ji A_2.

Pravděpodobnost „úspěchu“ (vykrojení prvního kruhového perníku tak, že lze vykrojit i druhý) pak z vlastností geometrické pravděpodobnosti určíme jako podíl měr množin A_2 a A_1 . U geometrické pravděpodobnosti v rovině můžeme míru pro naše účey ztotožnit s plochou. Stačí tedy zjistit plochu množin A_1 a A_2.

Uvažujme nejprve vykrojení pouze jednoho kruhového perníku.

Kruhový perník bude podmnožinou čtvercového těsta, jestliže je jeho střed podmnožinou čtvercového těsta a zároveň od každé ze čtyř stran čtverce vzdálen o alespoň 0.25 metrů, tedy o poloměr kruhového perníku. Pokud si nakreslíme rovnoběžky se stranami definující tyto hranice, jako průnik nám vznikne čtverec o straně 0.5 metrů, jehož střed i orientace jsou shodné s původním čtvercovým těstem. Tento menší čtverec reprezentuje množinu A_1. Její plochu snadno určíme jako $0.5^2 = 0.25$ metrů čtverečných. Následující obrázek zobrazuje tyto poznatky a zároveň v něm můžeme vidět různá umístění středů perníků. Z výše uvedeného přímo vyplývá, že středy obou kruhových per-



níků musí nutně ležet v tomto menším čtverci. Podmínka je nutná, ovšem ne postačující. Dále musíme zajistit, aby obsah průniku dvou kruhových perníků byl nulový, tedy najít množinu A_2. Z vlastností kruhu přímo vyplývá, že středy kruhových perníků musí být pro splnění této podmínky vzdáleny nejméně o 0.5 metrů, neboli o součet jejich poloměrů. Můžeme tedy říci, že střed prvního kruhového perníku byl umístěn do množiny A_2, jestliže kruh o dvojnásobném poloměru a stejném středu nepokrývá celou množinu A_1. Jinými slovy: existuje alespoň jeden bod z množiny A_1 takový, že je od středu prvního kruhového perníku vzdálen o alespoň 0.5 metrů.

A jak tedy množina A_2 vypadá? Pojďme k tomu ještě ukázat následující tvrzení. Pro libovolný bod P čtverce o straně a platí, že ze všech bodů tohoto čtverce je od bodu P nejvzdálenější některý ze čtyř vrcholů tohoto čtverce.

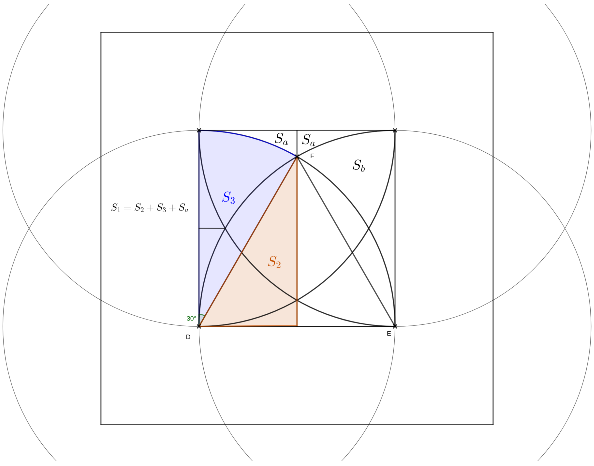
Položmě bod P jako počátek souřadnicového systému s osami rovnoběžnými se stranami čtverce, čímž rozdělíme čtverec do čtyř kvadrantů. Vyberme vrchol, jehož souřadnice mají největší absolutní hodnoty a dále je značmě jako $|x|a|y|$. Vzdálenost všech čtyř vrcholů čtverce od bodu P je tak z Pythagorovy věty postupně $\sqrt{x^2+y^2}$, $\sqrt{(a-x)^2+y^2}$, $\sqrt{x^2+(a-y)^2}$ a $\sqrt{(a-x)^2+(a-y)^2}$, z čehož snadno vidíme, že nejvzdálenější vrchol je od bodu P vzdálen o $\sqrt{x^2+y^2}$ a jedná se o ten s největšími absolutními hodnotami souřadnic.

Je to ovšem nejvzdálenější bod čtverce? Jistě ano. Zvolme libovolně bod z kvadrantu, ve kterém leží nejvzdálenější vrchol. Jeho souřadnice jsou (m,n), kde $0 \geq |m| \geq |x|$ a $0 \geq |n| \geq |y|$. Snadno poté vidíme, že $\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{m^2+n^2}$.

Podobnými úvahami dokážeme tvrzení pro ostatní kvadranty, přičemž porovnáváme vzdálenost náhodně vybraného bodu s vrcholem čtverce z příslušného kvadrantu. Tím je tvrzení dokázáno.

Díky uvedenému tvrzení můžeme konstatovat, že střed prvního kruhového perníku leží v množině A_2 právě tehdy, když je alespoň od jednoho z vrcholů čtverce určujícího množinu A_1 vzdálen o alespoň 0.5 metrů. Neboli množina A_2 je doplněk k průniku množiny A_1 se čtyřmi kruhy o poloměru 0.5 metrů, jejichž středy jsou vrcholy čtverce určujícího množinu A_1 (viz obrázek).

Nyní nám stačí pouze vypočítat plochu této oblasti. Skládá se ze čtyř shodných dílků, přičemž obsah každého si můžeme na obrázku představit jako sjednocení dvou oblastí o obsahu S_a a jedné oblasti o obsahu S_b. V obrázku je vyznačený trojúhelník DEF, který je zřejmě rovnostranný díky rovnosti poloměrů čtyř kruhů a délky strany čtverce urču-



jícího množinu A_1. Vyznačená levá polovina tohoto čtverce (označme obsah S_1) se nám tak dělí na tři disjunktní části, polovina trojúhelníku DEF (označme obsah S_2), kruhová výseč určená úhlem 30° a poloměrem 0.5 metrů (označme obsah S_3), a zmíněný dílek s obsahem S_a. Všechny obsahy S_a, S_b, S_1, S_2 a S_3 snadno spočítáme:

$S_1 = 0.5^2/2 = \frac{1}{8}$,

$S_2 = \frac{0.25 \cdot \sqrt{0.5^2 ˘ 0.25^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{32}$,

$S_3 = \pi \cdot 0.5^2 \cdot \frac{30}{360} = \frac{\pi}{48}$,

$S_a = S_1 ˘ S_2 ˘ S_3 = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{32} - \frac{\pi}{48}$,

$S_b = 2 \cdot S_1 - 3 \cdot S_3 ˘ 4 \cdot S_a = \frac{\pi + 6 \cdot \sqrt{3} - 12}{48}$.

Nyní stačí určit, že $A_2 = 8 \cdot S_a + 4 \cdot S_b = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{12}$ a konečně můžeme určit pravděpodobnost p, pro kterou se profesorce Hrudkové podaří vykrojit dva kruhové perníky, tedy:

$p = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{3\sqrt{3}-\pi}{12}}{4} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{4} \approx 0.68485$.

Úloha 3.d - Mějme množinu uspořádaných trojic přirozených čísel L_3 (tzn. záleží na pořadí čísel v trojici). Tuto množinu můžeme lexikograficky uspořádat: máme-li dvě uspořádané trojice $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$, potom $a > b$, pokud $a_1 > b_1$ nebo $a_1 = b_1$ a $a_2 > b_2$ nebo $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ a $a_3 > b_3$ (podobně jako seřazení slov podle abecedy). Najděte zobrazení f z L_3 do reálných čísel takové, že pokud $a > b$, pak $f(a) > f(b)$ a zdůvodněte.

Řešení: Na vzorák si vypůjčím řešení od Alexe Košťála, které bylo nejefektivnější:

Definujme funkci $f(a,b,c) = a,1\ldots101\ldots1$, kde za číslo a nejprve vložíme b jedniček, potom jednu nulu a potom c jedniček.

Mějme tedy dvě trojice (a,b,c) a (d,e,f):

1. Pokud $a \geq b$: $a, 1 \cdots \geq b, 1 \ldots$

2. Pokud $a = d$ a $b \geq e$: potom dostaneme dvě čísla, které se budou lišit až na $(e+1)$. pozici čísla. Pro $f(a,b,c)$ tam bude jednička, ale pro $f(d,e,f)$ tam již bude nula, tudíž první číslo bude větší.

3. Pokud $a = b$, $b = e$ a $c \geq f$: potom dostaneme dvě čísla, které se budou lišit až na $(e+f+2)$. pozici. Pro $f(a,b,c)$ tam bude jednička, ale pro $f(d,e,f)$ tam již bude nula, tudíž první číslo bude opět větší.

BRKOS Team