BRněnský KOrespondenční Seminář

XXXI. ročník
2024/2025

ŘEŠENÍ 1. SÉRIE

Důkazový guláš

ÚLOHA 1.1. Pythagorovy nemilostné poměry Dokažte, že neexistuje pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými délkami stran takový, že délka jedné strany dělí nějakou jinou.

ŘEŠENÍ. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že takový trojúhelník existuje. Odvěsny označíme a a b a přeponu c. Podle zadání jsou strany trojúhelníka celočíselné, protože nemohou nabývat ani záporných, ani nulových hodnot, můžeme říct, že náleží do množiny přirozených čísel. $a, b, c \in \mathbf{N}$

Mohou nastat dva případy, které postupně vyvrátíme. Buď bude odvěsna dělit druhou odvěsnu (a), nebo bude odvěsna dělit přeponu (b). Přepona je nutně delší než odvěsna, proto případ, že by přepona dělila odvěsnu ani nemusíme uvažovat. (Větší číslo nemůže dělit menší.)

(a) **Odvěsna dělí odvěsnu:**

Búno $a|b$, tedy $b = ak$, kde $k \in \mathbf{Z}$. Dosadíme do Pythagorovy věty a upravíme:

$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 + (ak)^2 = c^2$

$a^2 + a^2k^2 = c^2$

$c^2 = a^2 + a^2k^2$

$c^2 = a^2(1 + k^2)$

$c = a\sqrt{k^2 + 1}$

Protože $c \in \mathbf{N}$, musí být i pravá strana rovnice přirozená. Protože i $a \in \mathbf{N}$, musí i $\sqrt{k^2 + 1} \in \mathbf{N}$, tudíž $k^2 + 1$ je kvadrát.

$k^2 + 1$ i k^2 jsou druhé mocniny přirozených čísel, což je spor, protože žádné dvě druhé mocniny přirozených čísel nemají rozdíl 1. To můžeme dokázat například následující nerovností:

$(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 > k^2 + 1 > k^2$

(b) **Odvěsna dělí přeponu:**

Búno $a|c$, tedy $c = al$, kde $l \in \mathbf{Z}$. Dosadíme do Pythagorovy věty a upravíme:

$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 + b^2 = (al)^2$

$a^2 + b^2 = a^2l^2$

$b^2 = a^2l^2 - a^2$

$b^2 = a^2(l^2 - 1)$

$b = a\sqrt{l^2 - 1}$

Protože $b \in \mathbf{N}$, musí být i pravá strana rovnice přirozená. Protože i $a \in \mathbf{N}$, musí i $\sqrt{k^2 - 1} \in \mathbf{Z}$, tudíž $k^2 - 1$ je kvadrát.

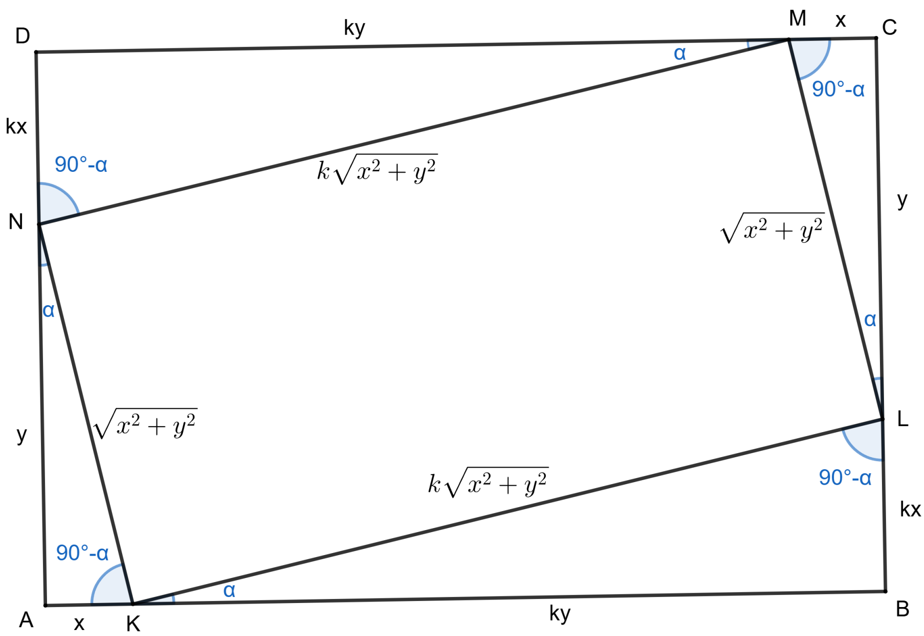
$k^2 - 1$ i k^2 jsou druhé mocniny přirozených čísel, což je opět spor, protože žádné dvě druhé mocniny přirozených čísel nemají rozdíl 1, což jsme již dokázali. Případ když by $k = 1$ smysl nedává, protože by $\sqrt{l^2 - 1} = 0$, pravá strana rovnice by byla nulová a tudíž by i $b = 0$, což je spor s tím, že $b \in \mathbf{N}$.

V obou případech jsme došli ke sporu, což popírá existenci pravoúhlého trojúhelníka s celočíselnými délkami stran, které se dělí.

BRKOS Team

Úloha 1.2. Podobnost Mějme dveře tvaru obdélníku $ABCD$ a body K na AB, L na BC, M na CD a N na AD tak, že $ABCD$ je podobný s $KLMN$ a zároveň tyto obdélníky nesplývají. Dokažte, že $ABCD$ je čtverec.

Řešení. Tento důkaz provedeme sporem. Budeme tedy předpokládat, že $ABCD$ je obdélník s různými délkami stran $|AB| \neq |BC|$ a do něj vepíšeme obdélník $KLMN$, který je původnímu obdélníku podobný. Označme si velikost úhlu $|\measuredangle ANK| = \alpha$. Následně přes dopočet úhlů v trojúhelníku NKA do 180 dostáváme, že $|\measuredangle NKA| = 180 - |\measuredangle KAN| - |\measuredangle ANK| = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$. Dále přes přímý úhel můžeme vypočítat velikost úhlu BKL: $|\measuredangle BKL| = |\measuredangle BKA| - |\measuredangle NKA| - |\measuredangle LKN| = 180 - (90 - \alpha) - 90 = \alpha$. Analogicky dopočítáme všechny úhly vzniklých trojúhelníků a dostáváme: $|\measuredangle ANK| = |\measuredangle BKL| = |\measuredangle CLM| = |\measuredangle DMN| = \alpha$ $|\measuredangle NKA| = |\measuredangle KLB| = |\measuredangle LMC| = |\measuredangle MND| = 90 - \alpha$ => Trojúhelníky AKN, BLK, CML, DNM jsou podobné podle věty *uu* . $KLMN$ je obdelník, takže $|KL| = |MN|$ a trojúhelníky BLK a DNM jsou dokonce shodné podle věty *usu*. Stejně tak $|LM| = |NK|$ a trojúhelníky AKN a CML jsou shodné (*usu*).



Nyní si označme $|AK| = |CM| = x$ a $|AN| = |CL| = y$. Koeficient podobnosti trojúhelníků AKN, CML s trojúhelníky BLK, DNM označme k tak, že $|BL| = |DN| = kx$ a $|BK| = |DM| = ky$. Pomocí Pythagorovy věty dopočítáme

$$|LM| = |NK| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

a

$$|KL| = |MN| = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

BRKOS Team

Teď se vrátíme k podobnosti obdelníků $ABCD$ a $KLMN$. Musí platit:

$$\begin{aligned}
\frac{|AB|}{|BC|} &= \frac{|KL|}{|LM|}\\
\frac{x+ky}{y+kx} &= \frac{k\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\\
x+ky &= k(y+kx)\\
x+ky &= ky+k^2x\\
x &= k^2x\\
1 &= k^2\\
=> k &= 1
\end{aligned}$$

Délky x a y jsou vždy kladné (pokud by některá z délek byla 0 vrcholy obdelníků by splynuly, což je v zadání vyloučené), proto všechny výše provedené kroky jsou korektní. Stejně tak koeficient podobnosti k musí být kladný, proto dostáváme pouze jediné řešení a to $k=1$. Všechny čtyři trojúhelníky AKN, BLK, CML, DNM jsou tedy shodné, $|AK| = |CM| = |BL| = |DN| = x$, $|AN| = |CL| = |BK| = |DM| = y$ a $|LM| = |NK| = |KL| = |MN| = \sqrt{x^2+y^2}$. $|AB| = |AK|+|BK| = x+y$ a $|BC| = |BL|+|CL| = x+y => |AB| = |BC|$. $ABCD$ (stejně tak i $KLMN$) je čtverec.

ÚLOHA 1.3. KAGH Nechť x, y jsou reálná čísla větší než 1. Ukažte, že

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} + \frac{y}{\sqrt{x^2-1}} \geq 2.$$

ŘEŠENÍ. Pro libovolné reálné číslo platí $x^2-1 < x^2$. Nyní, protože v zadání je předpoklad, že $x > 1$, můžeme nerovnost odmocnit (obě strany jsou kladné a znaménko nerovnosti tedy zůstane stejné) a dostáváme $\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2}$. Podle předpokladu jsou x a y kladná a tedy $x = \sqrt{x^2}$ a

$$\begin{gathered}
y\sqrt{x^2-1} < yx\\
\frac{y}{x} < \frac{y}{\sqrt{x^2-1}}
\end{gathered}$$

Analogicky platí i $\frac{x}{y} < \frac{x}{\sqrt{y^2-1}}$, z čehož plyne, že

$$\frac{x}{\sqrt{y^2-1}} + \frac{y}{\sqrt{x^2-1}} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Nyní, když dokážeme, že $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, bude jistě platit i nerovnost ze zadání. Vzhledem k tomu, že x i y jsou stále kladná čísla, tak jimi můžeme dělit nerovnici aniž bychom museli změnit znaménko. Víme, že druhá mocnina reálného čísla je vždy nezáporná, tedy:

$$\begin{gathered}
(x-y)^2 \geq 0\\
x^2-2xy+y^2 \geq 0\\
x^2+y^2 \geq 2xy
\end{gathered}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

Čímž je důkaz hotov.

Úloha 1.4. Indukce Mějme funkci f danou rekurentním vztahem $f(1) = 1$ a $f(n) = 2f(n-1) + n - 3$. Vyjádřete ji explicitně a indukcí dokažte správnost své definice.

Řešení. Dostali jsme funkci f danou rekurentním vztahem $f(1) = 1$ a $f(n) = 2f(n-1)+n-3$. Ta se dá explicitně vyjádřit jako $g(n) = 2^{n-1} - n + 1$, což dokážeme indukcí. Připomínám, že chceme postupně dokázat, že dodaná funkce $f(n)$ je tatáž, jako naše funkce $g(n)$.

Prvním krokem důkazu indukcí je bázový případ:

$$f(1) = 1 = 1 - 1 + 1 = 2^0 - 1 + 1 = 2^{1-1} - 1 + 1 = g(1)$$

Druhým krokem je indukční krok: Jako indukční předpoklad máme: $f(n-1) = g(n-1)$ IK:

$$f(n) = 2f(n-1) + n - 3 = 2g(n-1) + n - 3 = 2(2^{n-1-1} - (n-1) + 1) + n - 3 =$$
$$= 2(2^{n-2} - n + 2) + n - 3 = 2^{n-1} - 2n + 4 + n - 3 = 2^{n-1} - n + 1 = g(n)$$

Tím jsme dokázali totožnost zadané funkce f a naší funkce g. Zadání po vás nechtělo nějaký exaktní nebo sofistikovaný způsob, jak najít chtěnou funkci. Hlavní je ten důkaz indukcí. Přesto se sluší (jako u všech úloh v Brkosu) ukázat alespoň nějakou úvahu o tom, jak jste k funkci g došli. Neočekáváme od vás exaktní odvození, to je nad rámec středoškolské matematiky ;). Kdybyste chtěli exaktní postup, který bude fungovat pro libovolnou funkci, budete potřebovat analýzu (tj. integrály, derivace atd.).

Možné myšlenky, které mohou pomoci v nalezení výsledného vyjádření f: * Vypsat si několik prvních členů a odhalit exponenciální růst funkce. * Porovnat prvních několik členů s 2^n. * Všimnout si, že rozdíly mezi exponenciálou a růstem f se pokaždé o 1 zvětšují, a tedy výsledná funkce bude mít i lineární člen. * Zkusit $2^n + -n$ a porovnat s funkcí. Z toho dostanete, že tam má být mínus a že jste o 1 vedle. * Pohrajete si s exponenty, všude snížíte n o jedna a vyjde vám výsledné vyjádření $2^{n-1} - n + 1$.

Úloha 1.A. Nudím se na supersymetrii Uvažujme ohnivou kružnici k o poloměru r a na ní dva různé body A, B, které neleží naproti sobě. Pak se tečny ke k v bodech A, B protínají v bodě X. Ze znalosti délek $r, |AB|$ určete vzdálenost $|AX|$.

Řešení. Označme si S střed kružnice k a Y průsečík přímek AB a SX. Z vlastností tečen vyplývá, že $|AX| = |BX|$ a $|\sphericalangle SAX| = |\sphericalangle SBX| = 90$. Dále úsečky SA a SB jsou poloměry kružnice, a tak trojúhelníky SAX a SBX jsou shodné podle věty Ssu. Z toho vyplývá, že přímka SX je jejich osou souměrnosti a kolmo půlí úsečku AB.

Potom trojúhelník SYA je podobný trojúhelníku SAX, neboť sdílí úhel u středu S a oba mají pravý úhel. Můžeme tedy vyjádřit poměry jejich stran:

$$\frac{|AX|}{|AS|} = \frac{|AY|}{|SY|}$$
$$|AX| = \frac{|AY| \cdot |AS|}{|SY|}$$

Z Pythagovy věty v trojúhelníku SAY vyjádříme délku $|SY|$:

$$|SY| = \sqrt{|SA|^2 - |AY|^2}$$

A tu dosadíme:

$$|AX| = \frac{|AY| \cdot |AS|}{\sqrt{|SA|^2 - |AY|^2}}$$

$$|AX| = \frac{\frac{|AB|}{2} \cdot r}{\sqrt{r^2 - (\frac{|AB|}{2})^2}}$$

$$|AX| = \frac{|AB| \cdot r}{\sqrt{4r^2 - |AB|^2}}$$

ÚLOHA 1.B. Tabulka z Wishe Kouma s Ňoumou dostali tabulku o rozměrech $n \times n$, která byla vyplněna čísly následovně:

1	2	3	4	...
2	2	3	4	...
3	3	3	4	...
4	4	4	4	...
...	...	...	...	...

Jaký je součet čísel v tabulce v závislosti na n? Výsledek zapište ve tvaru podílu dvou celých čísel.

ŘEŠENÍ. Celou situaci si můžeme lépe vizualizovat v trojrozměrném prostoru. Řekněme, že jedno pole tabulky má rozměr 1×1 a číslo v něm reprezentuje výšku daného kvádru. Tedy pole s číslem 1 zobrazíme jako krychli o straně 1 a tak dále. Vizualizace pro nás má tu výhodu, že objem takto vzniklého tělesa (v neurčených jednotkách krychlových) je vždy roven součtu všech čísel zadané tabulky.

Představme si nyní, že je zadaná tabulka celá vyplněna pouze čísly n. Z původního "schodovitého"útvaru nám tak vznikne krychle $n \times n \times n$ a hned vidíme, že součet čísel v ní je n^3. Čísla n se ale v původní tabulce nacházejí pouze v n-tém řádku a n-tém sloupci. Odebereme tedy horní vrstvu krychle (tzn. snížíme čísla v tabulce o 1) ve všech polích, která toto nesplňují. Vzniklý útvar již odpovídá původní tabulce v posledních dvou sloupcích a řádcích. Opět odebereme jednu vrstvu v ostatních polích a takto pokračujeme, dokud z původní krychle nevznikne "schodovitý"útvar ze zadání.

Všimněme si, že nám "schodovitý"útvar z krychle vzniknul po právě $n-1$ krocích a v i-tém kroce jsme odebrali jednu vrstvu z $(n-i)^2$ polí tabulky. Pomocí sumy můžeme tedy psát:

$S = n^3 - \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2$

Kde S je součet čísel v půbodní tabulce. Vzhledem k tomu, že $i \in 1, \ldots, n-1$, můžeme ekvivalentně psát:

$S = n^3 - \sum_{i=1}^{n-1} i^2$

Pro vyjádření součtu si tak stačí uvědomit, že se jedná o známou sumu druhých mocnin přirozených čísel, pro kterou platí vzorec:
$\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$
My ovšem máme situaci, kde $m = n - 1$, tedy dosadíme:
$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$
Nyní již můžeme dosadit do rovnice pro součet S a provést několik úprav, aby bylo řešení v požadovaném tvaru:
$S = n^3 - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = n^3 - \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} = \frac{6n^3-(2n^3-3n^2+n)}{6} = \frac{4n^3+3n^2-n}{6} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$
Na závěr ještě poznamenejme, že poslední úprava nebyla nutná, jelikož výraz $4n^3 + 3n^2 - n$ je pro celá n celé číslo, uvádíme pouze alternativní tvar řešení.

Úloha 1.c. Lea smazala Devymu polynom a Devy je z toho zdrcen Ňouma smazal Koumovi polynom. Kouma si zapamatoval pouze to, že měl celočíselné koeficienty, byl normovaný, součin všech jeho koeficientů a jeho stupně byl 12 a měl kořen 2. Jaké všechny polynomy mohl Kouma mít?

Řešení. Máme normovaný polynom s celočíselnými koeficienty, jehož jedním kořenem je 2 a součin jeho koeficientů a stupně je 12. Z Vietových vztahů tedy plyne, že 2 dělí jeho absolutní člen. Zároveň z toho plyne, že jeho stupeň může být pouze 1, 2, 3, 4, 6, 12. Budeme řešit postupně v závislosti na stupni polynomu.

Stupeň 1: Jediným normovaným polynomem stupně 1, který má za kořen 2 je $x - 2$ a ten nesplňuje poslední podmínku.

Stupeň 2: Z Vietových vztahů dostaneme, že takovýto polynom stupně 2 musí být tvaru $x^2 + (-a - 2)x + 2a$, kde a je druhý kořen. Z toho dostaneme, že $2(-a - 2)2a = 12$, což nám dá kvadratickou rovnici $4a^2 + 8a + 12 = 0$, která má záporný diskriminant, takže nemá reálné řešení. Tudíž $(-a - 2)$ nemůže být celé číslo.

Stupeň 3: Máme tedy polynom $x^3 + ax^2 + bx + 2c$, kde $3ab2c = 12$, tedy $abc = 2$. Kdyby $|c| = 2$, pak by muselo platit $8+4a+2b\pm4 = 0$, protože 2 je kořen. Ale pak by 4 muselo dělit $4b$, což nejde, protože v tomto případě je b rovno v absolutní hodnotě jedné. Kdyby $|b| = 2$, pak by ze stejného důvodu muselo 4 dělit $2c$, s tím, že c je v absolutní hodnotě rovno jedné. Tudíž nyní víme, že $|a| = 2$. Kdyby v našem polynomu byly všechny koeficienty kladné, nebude 2 kořenem. Tudíž tam musí být právě dva záporné koeficienty, aby nám vyšel součin 12 a ne -12. Když si tyto 3 varianty vyzkoušíme, zjistíme, že právě ve dvou je 2 kořenem: $x^3 - 2x^2 - 2x + 2$, $x^3 - 2x^2 + 2x + 2$.

Stupeň 4: V tomto případě by součin koeficientů musel být 3, což nejde, když víme, že je jeden sudý.

Stupeň 6: Zde máme řešení $x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$. Další řešení dostat nemůžeme. Rozvržení koeficentů, je jasné z toho, že absolutní člen je sudý a součin koeficientů je 2. Dále z toho, že 2 je kořenem dostaneme, že všechny koeficienty musí být s mínusem, protože jinak bychom se při dosazení 2 nedostali na nulu.

Stupeň 12: Opět žádný polynom nedostaneme, protože součin koeficientů má být 1, ale přitom absolutní člen je sudý.

Dostaneme tedy pouze tři vyhovující polynomy.

ÚLOHA 1.D. ZLOmek V závislosti na n určete rozmístění čísel a_n, tak, aby měl zlomek

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

maximální hodnotu, pokud platí, že mezi čísly a_1 až a_n je každé číslo od 1 do n právě jednou. Svoji odpověď dokažte.

ŘEŠENÍ. Nejprve si všimněme, že libovolná část $r_i = \frac{1}{a_i + \frac{1}{a_{i+1} + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}$, kde $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ je kladná a ostře menší než jedna, neboť dělíme jedničku číslem, které vznikde sečtením dvou kladných čísel, kde jedno z nich je alespoň 1.

Dále pojďme zkoumat: Celková hodnota výrazu se rovná $a_1 + r_2$, kde už víme, že $r_2 < 1$. Proto dolní celá část tohoto výrazu je právě a_1. Tedy pro maximalizaci zlomku musí být $a_1 = n$. Dále chceme maximalizovat r_2, což znamená minimalizovat jeho jmenovatel $a_2 + r_3$. Opět $r_3 < 1$, proto dolní celá část $a_2 + r_3$ se rovná a_2, tedy minimální hodnota nastane v $a_2 = 1$. Odtud vidíme, že i výraz r_1 je ostře menší než 1, neboť a_n se nerovná jedné. (pozn. toto neplatí pouze v případě, kde $n \in \{1, 2\}$, tyto případy si můžete vyzkoušet sami.)

Logickou úvahou stejnou jako v předchozím kroku dojdeme k tomu, že optimální uspořádání by mohlo být: $a_1 = n, a_2 = 1, a_3 = n-1, a_4 = 2, a_5 = n-2, \dots$ Říkejme tomuto rozmístění čísel SUPERROZMÍSTĚNÍ.

O tomhle rozmístění dokážeme, že je opravdu optimální. Jedna možnost je správně, ne úplně triviálně, použít matematickou indukci. Pro tohle vzorové řešení použiju důkaz sporem:

Předpokládejme, že existuje jiné rozložení - říkejme mu R - čísel $1, 2, \dots, n$, pro které je hodnota zlomku větší než hodnota zlomku při SUPERROZMÍSTĚNÍ. Uvažme nejmenší číslo i takové, že číslo a_i se liší v rozmístění R a v SUPERROZMÍSTĚNÍ. (první index, kde se čísla liší) Rozdělme si nyní případ na dvě možnosti:

1. i je liché: a_i v SUPERROZMÍSTĚNÍ se liší od a_i v rozdělení R. Vzhledem k tomu, že v SUPERROZMÍSTĚNÍ na lichých pozicích jsou postupně čísla $n, n-1, n-2, \dots$ a na všech lichých pozicích před i jsou čísla stejná, musí a_i v R rozmístění být menší než a_i v SUPERROZMÍSTĚNÍ. Vzhledem k tomu, že bereme přirozená čísla, tak musí být dokonce alespoň o jedna menší. Vzhledem k tomu, že r_i je menší než jedna, je $a_i + r_i$ v SUPERROZMÍSTĚNÍ větší než $a_i + r_i$ v R rozmístění. Protože jsme však na liché pozici, musí celková hodnota výrazu pro R menší než pro SUPERROZMÍSTĚNÍ. (lichá pozice znamená, že po převedení všeho na společné jmenovatele se tento výraz dostane do čitatele, proto větší hodnota zde znamená větší hodnotu výrazu) - dostáváme spor.

2. i je sudé: a_i v SUPERROZMÍSTĚNÍ se liší od a_i v rozdělení R. Vzhledem k tomu, že v SUPERROZMÍSTĚNÍ na sudých pozicích jsou postupně čísla $1, 2, 3, \dots$ a na všech sudých pozicích před i jsou čísla stejná, musí a_i v R rozmístění být větší než a_i v SUPERROZMÍSTĚNÍ. Vzhledem k tomu, že bereme přirozená čísla, tak musí být dokonce alespoň o jedna větší. Vzhledem k tomu, že r_i je menší než jedna, je $a_i + r_i$ v SUPERROZMÍSTĚNÍ menší než $a_i + r_i$ v R rozmístění. Protože jsme však na sudé pozici, musí celková hodnota výrazu pro R menší než pro SUPERROZMÍSTĚNÍ. (sudá pozice znamená, že po převedení všeho na společné jmenovatele se tento výraz dostane do jmenovatele, proto menší hodnota zde znamená větší hodnotu výrazu) - dostáváme spor.

Tedy takové rozmístění s větší hodnotou neexistuje.

BRKOS Team