BRněnský KOrespondenční Seminář

XXX. ročník
2023/2024

ŘEŠENÍ 5. SÉRIE

Konvexní hrátky

ÚLOHA 5.1: Mějme trojúhelník ABC. Nechť bod P leží na straně AC a dělí ji v poměru $\frac{|AP|}{|PC|} = 4$, stejně tak nechť bod Q leží na straně BC a platí $\frac{|CQ|}{|QB|} = 4$. Nechť bod S je střed úsečky PQ. Dokažte, že bod R takový, že S je středem úsečky CR, leží na straně AB a platí $\frac{|AR|}{|RB|} = 4$.

ŘEŠENÍ: Podle věty 5 z pomocného textu můžeme body P, Q vyjádřit následovně:

$$P = \frac{1}{5}A + \frac{4}{5}C, Q = \frac{1}{5}C + \frac{4}{5}B$$

. Stejným způsobem můžeme vyjádřit i bod S (střed úseček PQ a CR) jako:

$$S = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}R$$

. Po vynásobení rovnice dvěma dostáváme

$$R + C = P + Q$$

$$R + C = \frac{1}{5}A + \frac{4}{5}C + \frac{1}{5}C + \frac{4}{5}B$$

$$R = \frac{1}{5}A + \frac{4}{5}B$$

Bod R tedy můžeme vyjádřit jako kombinaci dvou bodů A, B a opět podle věty 5 tedy leží na přímce AB a to dokonce tak, že úsečku AB dělí v poměru $\frac{|RB|}{|RA|} = 4$. Důkaz je hotov.
Druhý způsob:
Vytvoříme nový bod X, který leží na úsečce AB tak, že ji dělí v poměru $|XB| : |XA| = 4 : 1$ a dokážeme, že body X a R splynou (tzn. to, že bod R také splňuje tyto vlastnosti). Vzhledem ke známým poměrům víme, že trojúhelníky ABC a XBQ jsou si podobné a tedy $XQ||AC$. Stejným způsobem z podobnosti ABC a ARP vidíme, že $XP||BC$. Vzhledem k tomu, že $P \in AB$ a $Q \in BC$, tak jsou rovnoběžné i XQ s PC a XP s QC. Čtyřúhelník $XQCP$ je tedy rovnoběžník, jehož úhlopříčky se navzájem tedy půlí a vzhledem k tomu, že střed úsečky PQ je bod S, je to i střed XC a tedy R=X.

ÚLOHA 5.2: Nechť A, B, C jsou různé body v rovině, které neleží na přímce. Dokažte, že množina afinních kombinací $\{kA + lB + mC : k + l + m = 1\}$ tvoří přímku rovnoběžnou s BC právě tehdy, když je koeficient k konstantní.

ŘEŠENÍ: Máme dokazovat ekvivalenci, dokážeme tedy postupně obě implikace.

- $\Rightarrow$: Nechť A, B, C jsou různé body v rovině neležící na přímce a množina afinních kombinací $M = \{kA + lB + mC : k + l + m = 1\}$ tvoří přímku rovnoběžnou s BC. Dívejme se na body A, B, C zároveň jako jejich vektory od počátku P, tedy $A = \overrightarrow{PA}$, atd. Pak pro libovolné dva body $X, Y \in M$ platí

$$X = k_1A + l_1B + m_1C = k_1A + l_1B + (1 - k_1 - l_1)C,$$
$$Y = k_2A + l_2B + m_2C = k_2A + l_2B + (1 - k_2 - l_2)C.$$

Zároveň platí, že přímka $\overleftrightarrow{XY}$ je rovnoběžná z přímkou $\overleftrightarrow{BC}$, což platí právě tehdy když vektor $\overrightarrow{XY}$ je násobkem vektoru $\overrightarrow{BC}$. Máme tedy

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XY} = Y - X &= k_2A + l_2B + (1 - k_2 - l_2)C - (k_1A + l_1B + (1 - k_1 - l_1)C)\\ &= (k_2 - k_1)A + (l_2 - l_1)B + (1 - k_2 - l_2 - (1 - k_1 - l_1))C\\ &= (k_2 - k_1)A + (l_2 - l_1)B - (k_2 + l_2 - k_1 - l_1)C\\ &= (k_2 - k_1)A + (l_2 - l_1)B - (k_2 - k_1)C - (l_2 - l_1)C\\ &= (k_2 - k_1)\overrightarrow{CA} + (l_2 - l_1)\overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

Zároveň víme, že $\overrightarrow{XY}$ je násobkem $\overrightarrow{BC}$ a že $\overrightarrow{CA}$ není násobkem $\overrightarrow{BC}$, prožože A, B, C neleží na jedné přímce. Proto musí platit $(k_2 - k_1) = 0$ a tedy i $k_2 = k_1$, tedy k je konstantní. □

$\Leftarrow$: Nechť A, B, C jsou různé body v rovině neležící na přímce a množina afinních kombinací $M = \{kA + lB + mC : k + l + m = 1\}$ kde k je konstantní.

Pak pro libovolné dva body X, Y z množiny M platí

$$X = kA + l_1B + m_1C = kA + l_1B + (1 - k_1 - l_1)C,$$
$$Y = kA + l_2B + m_2C = kA + l_2B + (1 - k_2 - l_2)C.$$

Pro vektor $\overrightarrow{XY}$ platí

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XY} = Y - X &= kA + l_2B + (1 - k - l_2)C - (kA + l_1B + (1 - k - l_1)C)\\ &= (k - k)A + (l_2 - l_1)B + (1 - k - l_2 - (1 - k - l_1))C\\ &= 0 \cdot A + (l_2 - l_1)B - (l_2 - l_1)C\\ &= (l_2 - l_1)B - (l_2 - l_1)C\\ &= (l_2 - l_1)\overrightarrow{CB}.\end{aligned}$$

Z toho plyne, že vektor $\overrightarrow{XY}$ je násobkem $\overrightarrow{CB}$ (a tedy i vektoru $\overrightarrow{BC}$), a tedy přímky $\overleftrightarrow{XY}$ a $\overleftrightarrow{CB}$ jsou rovnoběžné. □

Jelikož jsme v obou případech uvažovali libovolné body $X, Y \in M$, důkaz je kompletní.

ÚLOHA 5.3: Dokažte, že kruh nelze získat jako konvexní obal konečně mnoha bodů v rovině.

BRKOS Team

Řešení: Úlohu dokážeme sporem. BÚNO stačí dokázat úlohu pro kruh s poloměrem 1. Předpokládejme tedy, že máme konečně mnoho bodů v rovině se souřadnou soustavou, označme si jejich množinu jako M, a předpokládejme, že její konvexní obal je kruh se středem v počátku a poloměrem 1. Intuitivně jste všichni ve svých řešeních vycítili, že problém nastane na hraniční kružnici. Zvolme si tedy bod $X = [x_1, x_2]$ libovolně na hraniční kružnici, jinak řečeno musí platit $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Jelikož hraniční kružnice je dle předpokladu stále součást konvexního obalu množiny bodů M, dle Carathéodoryho věty existuje trojice bodů $A, B, C \in M$ taková, že $X \in conv(A, B, C)$. Označme si souřadnice těchto bodů jako $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $C = [c_1, c_2]$. To, že bod X leží v konvexním obalu $conv(A, B, C)$ si můžeme zapsat matematicky jako rovnici $X = kA + lB + mC$, kde $k, l, m \geq 0$ a $k + l + m = 1$. Na tuto rovnici se můžeme dívat zároveň jako na rovnici vektorů, tedy $(x_1, x_2) = k(a_1, a_2) + l(b_1, b_2) + m(c_1, c_2)$. No a protože platí tato rovnost a zároveň platí $x_1^2 + x_2^2 = 1$, můžeme usoudit, že musí platit i rovnice

$$(ka_1 + lb_1 + mc_1)^2 + (ka_2 + lb_2 + mc_2)^2 = 1.$$

Po roznásobení, jehož ověření nechám na Vás, získáváme rovnici

$$k^2(a_1^2+a_2^2)+l^2(b_1^2+b_2^2)+m^2(c_1^2+c_2^2)+2[kl(a_1b_1+a_2b_2)+km(a_1c_1+a_2c_2)+lm(b_1c_1+b_2c_2)] = 1.$$

Jelikož body A, B, C ležely v konvexním obalu $conv(M)$, což je dle předpokladu kruh s poloměrem 1, musí platit nerovnosti $a_1^2 + a_2^2 \leq 1$, $b_1^2 + b_2^2 \leq 1$, $c_1^2 + c_2^2 \leq 1$. Zároveň z věty o skalárním součinu víme, že za tohoto předpokladu platí $a_1b_1 + a_2b_2 \leq 1$, $a_1c_1 + a_2c_2 \leq 1$, $b_1c_1 + b_2c_2 \leq 1$. Výše odvozený výraz si tedy můžeme shora ohraničit výrazem

$$k^2 + l^2 + m^2 + 2kl + 2km + 2lm = (k + l + m)^2.$$

Ale víme, že platí $k + l + m = 1$. Tedy v nerovnosti

$$1 = (ka_1 + lb_1 + mc_1)^2 + (ka_2 + lb_2 + mc_2)^2 \leq (k + l + m)^2 = 1$$

musí nastat rovnost. To nastane očividně právě tehdy, když ve všech těchto nerovnostech $a_1^2 + a_2^2 \leq 1$, $b_1^2 + b_2^2 \leq 1$, $c_1^2 + c_2^2 \leq 1$, $a_1b_1 + a_2b_2 \leq 1$, $a_1c_1 + a_2c_2 \leq 1$, $b_1c_1 + b_2c_2 \leq 1$ nastanou rovnosti. Vskutku, kdyby alespoň jedna z těchto nerovností byla ostrá, lehce se člověk přesvědčí, že by i nerovnost $(ka_1 + lb_1 + mc_1)^2 + (ka_2 + lb_2 + mc_2)^2 \leq (k + l + m)^2$ byla ostrá, což není možné. No a z věty o skalárním součinu pak člověk už lehce odvodí, že musí platit $a_1 = b_1 = c_1$ a $a_2 = b_2 = c_2$. Jinak řečeno, musí platit, že body A, B, C a X všechny splývají. Ukázali jsme, že jediný způsob, jak zapsat bod na hraniční kružnici jako konvexní kombinaci jiných bodů z kruhu o poloměru 1 je ten, že se zapíše jako konvexní kombinace $X = 1 \cdot X$. Tedy musí platit, že je-li kruh konvexním obalem $conv(M)$, pak musí bod X být obsažen v M. Ale protože X byl zvolen libovolně, M obsahuje jen konečně mnoho bodů a hraniční kružnice nekonečně mnoho, dostáváme spor.

Úloha 5.4: Nechť S je množina n bodů v rovině, kde $n \geq 3$ je přirozené číslo. Dokažte, že je-li bod x obsažen v konvexním obalu S, pak existuje alespoň $n - 2$ trojic $\{V_1, V_2, V_3\}$ bodů z S tak, že $x \in conv(V_1, V_2, V_3)$.

Řešení: Tvrzení dokážeme matematickou indukcí.

Bázový krok: Pro $n = 3$ stačí najít jednu trojici $\{V_1, V_2, V_3\}$. Caratheodoryho věta zaručuje její existenci.

Indukční krok: Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny k-tice bodů, kde $k \leq n$. Ukážeme, že platí i pro $n+1$ bodů. Z Caratheodoryho věty víme, že existuje trojice $\{V_1, V_2, V_3\}$ taková, že $x \in conv(V_1, V_2, V_3)$. BÚNO označme další vrcholy $V_4, \dots, V_n, V_{n+1}$, přičemž $x \in conv(S), S = \{V_1, \dots, V_n\}$. Z indukčního předpokladu víme, že bod x leží v konvexním obalu alespoň $n-2$ trojic bodů z S, stačí tak najít jednu další trojici, která bude obsahovat V_{n+1}. Uvažujme polopřímku $p = \overrightarrow{V_{n+1}x}$ a na ní bod Y takový, že $|YV_{n+1}| \geq |xV_{n+1}|$ a zároveň Y leží na hraně $conv(V_1, V_2, V_3)$. Díky tomu, že $x \in conv(V_1, V_2, V_3)$ bude takový bod Y určitě existovat. Nechť například $Y \in p \cap \overline{V_1V_2}$. Pak úsečka $\overline{YV_{n+1}}$ leží celá uvnitř $conv(V_1, V_2, V_{n+1})$, tedy zejména $x \in conv(V_1, V_2, V_{n+1})$, což jsme chtěli dokázat.

ÚLOHA 5.A: Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel, jejichž ciferný součet je větší než ciferný součet jejich druhé mocniny.

ŘEŠENÍ: V prvním kroku řešení ukážeme, že existuje nějaké přirozené číslo, splňující zadanou podmínku. Ve druhé části popíšeme, jak jsme se znalostí jednoho čísla schopni zkonstruovat nekonečně mnoho takových čísel.

Příkladem může být číslo 39 (existuje jich více). Zřejmě $39^2 = 1521$ a $3+9 = 12 > 9 = 1+5+2+1$.

Nyní si stačí uvědomit, že stejnou vlastnost má libovolné číslo ve tvaru $39 \cdot 10^n; n \in \mathbb{N}_0$. Je zřejmé, že ciferný součet takového čísla bude $3+9+n\cdot 0 = 3+9 = 12$. Obdobně můžeme snadno ukázat, že druhá mocnina tohoto čísla je $39^2 \cdot 10^{2\cdot n}$ a tedy jeho ciferným součtem je opět $1+5+2+1+2\cdot n \cdot 0 = 9$ a tedy pro libovolné číslo tohoto tvaru skutečně platí požadované podmínky.

Ukázali jsme, že zadanou podmínku splňuje libovolné číslo ve tvaru $39 \cdot 10^n; n \in \mathbb{N}_0$. Přirozených čísel je nekonečně mnoho, a tedy je tvrzení dokázáno.;

ÚLOHA 5.B: Mějme čtvercovou síť 4×6, kde každé pole je (po řádcích) označeno čísly 113–136. Úkolem je rozhodnout, zda existuje cesta po polích taková, že každé pole projdeme právě jednou. Z každého pole se lze pohnout podle čísla, kterým je označeno. Nechť pole na kterém stojíme má číslo n.

1. Pokud je n sudé, lze použít tah šachového koně. Pozor - nelze přitom udělat 2 takové tahy za sebou.
2. Pokud $3|n$, lze použít tah šachového střelce, avšak alespoň o 2 pole.
3. Pokud $5|n$, lze se přesunout na libovolné sousední pole (i diagonálně)
4. Pokud $7|n$, lze se pohnout na kterékoliv jiné pole jehož číslo je dělitelné sedmi.
5. Pokud je n prvočíslo, lze se pohnout pouze na pole s ním středově souměrné.

Pokud není jednoznačně určený typ pohybu, lze zvolit libovolný povolený.

ŘEŠENÍ: Taková cesta existuje: 113, 136, 123, 133, 119, 126, 116, 120, 125, 131, 118, 129, 115, 114, 128, 132, 117, 127, 122, 130, 124, 135, 134, 121.

ÚLOHA 5.C: Uvažujme trojúhelník, o němž víme, že součin jeho délek jeho stran je roven 64. Ukažte, že potom platí odhad $6r + \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq 12$, kde r je poloměr kružnice opsané. Pro které trojúhelníky ze zadání nastává v tomto vztahu rovnost?

Řešení: Označme si strany trojúhelníku jako a,b,c a k nim příslušné úhly pak α,β,γ. V libovolném trojúhelníku pak musí platit sinová věta

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2r,$$

kde r je poloměr kružnice opsané. Vyjádříme si sinus příslušných úhlů jako poměr délky strany a dvojnásobku poloměru kružnice opsané a dosadíme do nerovnosti ze zadání

$$\begin{aligned} 6r+\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma &\geq 12 \\ 6r+\frac{a}{2r}+\frac{b}{2r}+\frac{c}{2r} &\geq 12 \\ 12r^2+a+b+c &\geq 24r \\ 12r^2-24r+a+b+c &\geq 0 \end{aligned}$$

Podotkněme, že zatím veškeré úpravy byly ekvivalentní, a to dokonce i vynásobení nerovnosti $2r$, protože poloměr je číslo kladné. Teď je na čase využít další informaci ze zadání a to, že $abc=64$. Na hodnoty a,b,c, aplikujeme AG-nerovnost (pokud neznáte, doporučujeme se podívat, je to často využívanou nerovností například v olympiádách).

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{3} &\geq \sqrt[3]{abc} \\ \frac{a+b+c}{3} &\geq 4 \\ a+b+c &\geq 12 \end{aligned}$$

Odhad obvodu pak dosadíme do naší nerovnosti.

$$\begin{aligned} 12r^2-24r+a+b+c \geq 12r^2-24r+12 &\geq 0 \\ (r-1)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Poslední nerovnost zřejmě platí, protože kvadrát je vždy nezáporný. Zbývá teď jen diskuse, kdy je zadaná nerovnost rovností. Pak při všechn našich odhadech musí místo nerovnosti být rovnost, a tedy $r=1$ a současně $a=b=c$, tedy z podmínky $abc=64$, je $a=b=c=4$. Takový trojúhelník ale nemůže nikdy existovat, protože bychom se snažili vměstnat stranu o velikosti 4 do kružnice s poloměrem 1.

Úloha 5.D: Finťa myslí na normovaný polynom stupně n, jehož konstantní člen je nenulový. Označme horní celou část $\frac{n}{2}$ jako k. Ukažte, že pokud Finťa odtajní Ňoumovi k kořenů a k koeficientů svého polynomu, zvládne již uhádnout celý polynom.

Řešení: ***Zadání této úlohy bohužel není správné:*** *úloha neplatí v plné obecnosti, je potřeba přidat další požadavky na náš polynom.*[1] *Nicméně, v případech, kdy tvrzení platí, je strategie řešení úlohy stejná, problém je pouze v posledním kroku, kdy je potřeba ukázat, že jistá soustava má jediné řešení – jenže ona obecně nemusí. Proto jsme přidali všem řešitelům, kteří úlohu řešili*

[1] Jako protipříklad můžeme použít polynom x^4-1, známe-li kořen $1,-1$ a koeficienty u x^2 a x^0. Na druhou stranu, tvrzení ze zadání platí pro všechny polynomy stupně 5.

správným postupem, body za tento poslední chybějící krok. Prezentované řešení níže vychází z postupu Viktora Goly.

Označme si hledaný polynom jako $F(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$. Známe $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ jeho kořenů $x_1, x_2, \ldots x_k$, takže můžeme sestrojit normovaný polynom, co bude mít právě tyto kořeny:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_k) = x^k + a_{n-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Tento polynom dělí náš polynom $F(x)$, tedy si ho můžeme napsat jako $F(x) = P(x) \cdot Q(x)$, kde $Q(x)$ je nějaký normovaný polynom ve tvaru $Q(X) = x^l + u_{l-1}x^{l-1} + \cdots + u_1 x + u_0$, kde $l = n - k$.

Všechny koeficienty polynomu $P(x)$ známe. Z rovnosti $F(x) = P(x) \cdot Q(x)$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} a_{n-1} + u_{l-1} &= c_{n-1}, \\ a_{n-2} + a_{n-1}u_{l-1} + u_{l-2} &= c_{n-2}, \\ &\vdots \\ a_0 u_0 &= c_0. \end{aligned}$$

Vybereme-li si z těchto rovnic k řádků, v nichž se na pravé straně vyskytují známé koeficienty c_i polynomu $F(x)$, dostáváme soustavu k rovnic o k neznámých $u_0, \ldots, u_{k-1}$. Chceme ukázat, že tato soustava má jediné řešení. To bohužel v plné obecnosti nemusí být pravda; problém nastává, když je příliš mnoho koeficientů polynomu $P(x)$ nulových, např. pro $F(x) = x^4 - 1$, $P(x) = x^2 - 1$. Přesněji, napišme si kompletní systém $n - 1$ rovnic výše v maticovém tvaru; dostaneme

$$\begin{pmatrix} a_{k-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{k-2} & a_{k-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{k-3} & a_{k-2} & a_{k-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{k-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-2} \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ u_{l-1} \\ u_{l-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n-1} \\ c_{n-2} \\ c_{n-3} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

Označíme-li si $b_{n-i} = c_{n-i} - a_{k-i}$, $i = 1, \ldots, k$, zbavíme se levého řádku a jedničky v sloupci neznámých a dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{k-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{k-2} & a_{k-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-2} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{l-1} \\ u_{l-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

Označme si $n \times l$ matici výše jako M. Chceme nyní říct, že ať známe jakýchkoli k čísel z množiny $\{c_0, \ldots, b_{n-1}\}$, koeficienty u_j jsou určeny jednoznačně. V maticovém zápisu to znamená, že ať z matice M vyškrtáme libovolných k řádků, výsledná $l \times l$ matice M^* má plnou hodnost – jinými slovy, lze Gaussovou eliminační metodou upravit do tvaru, který má v pravém dolním rohu nenulové číslo. **Aby toto platilo, je právě potřeba, aby dostatečně mnoho z čísel a_i bylo nenulových;** jinými slovy, aby matice M^* vždy měla všechny sloupce nenulové. Potom je argument velmi jednoduchý: při provedení Gaussovy eliminace v pravém dolním rohu po celou dobu zůstává číslo a_0, které je podle zadání nenulové (jelikož $a_0 u_0 = c_0$, $c_0 \neq 0$).

BRKOS Team

Celkové pořadí

	Jméno	R	Škola	M	1	2	3	4	5	Σ
1.	Gola Viktor	3.	Vsetín		24	24	21	23,93	23,25	116,18
2.	Starý Petr	2.	GJ České Budějovice		21,47	22,33	22,33	21,93	21,67	109,73
3.	Komín Lukáš	1.	GO Praha		21,08	20,09	21,49	20,79	21,38	104,83
4.	Najbert Jan	3.	GKJ Brno	M	22,75	19,5	18,5	20,83	16,92	98,5
5.	Horčička David	3.	GKJ Brno	M	20,17	20,75	12,83	14	16,5	84,25
6.	Hyánek Pavel	2.	GKJ Brno	M	22,13	20,85	–	18,75	18	79,73
7.	Pazourek Tomáš	2.	GKJ Brno	M	22,13	21,08	15,23	–	19,13	77,57
8.	Šrubař Matěj	2.	GTGM Hustopeče		18	13,33	18,53	17,87	8,67	76,4
9.	Poljaková Lenka	4.	GJŠ Přerov		15,67	19,83	5,02	7	15,92	63,44
10.	Demovič Miňo	2.	G Bratislava	M	21,68	19,88	16,13	–	–	57,69
11.	Krška Radim	3.			16,58	15,45	11,25	12,13	–	55,41
12.	Andrýsková Eliška	4.	GJŠ Přerov		18,17	17,42	10,73	8,75	–	55,07
13.	Šimová Pavla	3.	G Šumperk		3,75	–	20,25	16,88	11,88	52,76
14.	Vomlelová Zuzana	1.	GK Brno	M	8,67	11,07	13,33	13,07	5,87	52,01
15.	Krzystek Rudolf	1.	G Praha		4,96	4,25	15,02	10,63	14,59	49,45
16.	Králik Ondrej	3.	G Košice	M	18,42	15,25	14,58	–	–	48,25
17.	Sedláková Ema	4.	GYREC Brno		16,75	10,5	9,1	10,5	–	46,85
18.	Říha Jan	3.	GKJ Brno	M	–	18,17	15,83	12,25	–	46,25
19.	Chlupová Lucie	2.	Třinec-Staré Město		12,67	8,67	16,2	8	–	45,54
20.	Vaceková Anita	1.	GKJ Brno	M	14,27	19,33	2	–	5,33	40,93
21.	Počarovská Lenka	1.	Znojmo		21,78	14,31	3,97	–	–	40,06
22.	Kolenatá Šárka	1.	Teplice		16,29	12,75	10,48	–	–	39,52
23.	Šimečková Svatava	2.	GKJ Brno	M	15,75	7,5	–	12,5	3,75	39,5
24.	Košťál Alexander	2.	G Tišnov		16,33	8	5,07	6	4	39,4
25.	Krejčí Tereza	4.	GKJ Brno	M	20,33	17,22	–	–	–	37,55
26.	Černušková Daniela	3.	Uherské Hradiště		11,88	17,85	–	–	–	29,73
27.	Kornel Tomáš	1.	Frýdek-Místek		17,41	8,5	–	–	–	25,91
28.	Dvořák Marek	1.	GKJ Brno	M	12,67	5,33	6,67	–	–	24,67
29.	Klementová Julie	2.	Písek		11,33	8,67	4,4	0	–	24,4
30.	Harman Filip	2.	GYREC Brno		21,8	–	0,93	–	–	22,73
31.	Bradáč Jan	0.	G Boskovice		12	9,45	–	–	–	21,45
32.	Žemlička Ivan	3.	Praha	M	19,25	–	–	–	–	19,25
33.	Hrachovec Tomáš	1.	Ostrov	M	9,33	4	5,47	–	–	18,8
34.	Migel Anna-Kristina	1.			–	18,17	–	–	–	18,17

BRKOS Team

	Jméno	R	Škola	M	1	2	3	4	5	Σ
35.	Krajíček Vilém	1.	GKJ Brno	M	6	8	3,33	–	–	17,33
36.	Lopour Šimon	3.	GKJ Brno	M	16,5	–	–	–	–	16,5
37.	Strnadová Daniela	3.	Ústí nad Labem		13,75	2,25	–	–	–	16
38.	Doležel Dominik	3.	GKJ Brno	M	16	–	–	–	–	16
39.	Belopotočan Kristián	1.	GT Banská Bystrica	M	13,33	–	–	–	–	13,33
40.	Mládek Adam	2.	Valašské Klobouky		10,67	–	–	–	–	10,67
41.	Honsejková Markéta	3.	G a SOŠPg Liberec	M	10,5	–	–	–	–	10,5
42.	Sedmidubský Matyáš	3.	G Tišnov		9,63	–	–	–	–	9,63
43.	Poljak Lucian	2.	GJŠ Přerov		–	–	–	–	9,33	9,33
44.	Matjaš Daniel	1.	Náchod		4,96	4,25	–	–	–	9,21
45.	Krebsová Barbora	3.	Modra	M	8,17	–	–	–	–	8,17
46.	Trojan Lukáš	4.	GV Praha	M	–	–	–	–	8,13	8,13
47.	Vořechovský Martin	1.	GKJ Brno	M	8	–	–	–	–	8
48.	Vondrouš Jan	1.	Frýdek-Místek		7,79	–	–	–	–	7,79
49.	Bihun Alexandr	4.	GJ České Budějovice		7	–	–	–	–	7
50.	Maxera Kryštof	3.	GJ České Budějovice		–	–	6,88	–	–	6,88
51.	Uglickich Jana	2.	Praha		–	–	–	6	–	6
52.	Prášková Terezie	2.			6	–	–	–	–	6
53.	Kolářová Lucie	0.	G Dačice		0,75	4,5	–	0,75	0	6
54.	Jedličková Kateřina	4.	G Brno	M	5,53	–	–	–	–	5,53
55.	Havelková Beáta	2.	GJ České Budějovice		–	–	–	5,33	–	5,33
56.	Káňa David	1.	GKJ Brno	M	4	–	–	–	–	4
57.	Bělušová Petra	2.	GKJ Brno	M	–	–	–	3,75	–	3,75
58.	Vojtíšek Filip	4.	GYREC Brno		3,5	–	–	–	–	3,5
59.	Fryšová Andrea	2.	G Cheb		–	–	3,2	–	–	3,2
60.	Verner Václav	3.	Praha		3,13	–	–	–	–	3,13
61.	Lopour Šimon	3.	GKJ Brno	M	2,33	–	–	–	–	2,33

BRKOS Team