BRněnský KOrespondenční Seminář

XXX. ročník
2023/2024

ŘEŠENÍ 4. SÉRIE

Nekonečné řady

ÚLOHA 4.1: Pomocí teleskopické sumy určete součet řady $\sum_{i=2}^{n} \ln(1 - \frac{1}{i^2})$ pro všechna přirozená n.

ŘEŠENÍ: Prvně si sumu upravíme podle pravidla, že součet logaritmů je logaritmus součinu ($\ln a + \ln b = \ln ab$), rozdíl logaritmů je logaritmus podílu ($\ln a - \ln b = \ln(\frac{a}{b})$), logaritmus n-té mocniny je n-krát ten daný logaritmus ($\ln a^n = n \ln a$) a suma součtů je součet sum ($\sum_{i=2}^{n} f(i) + g(i) = \sum_{i=2}^{n} f(i) + \sum_{i=2}^{n} g(i)$).

$$\sum_{i=2}^{n} \ln(1 - \frac{1}{i^2}) = \sum_{i=2}^{n} \ln(\frac{i^2 - 1}{i^2}) = \sum_{i=2}^{n} \ln(\frac{(i-1)(i+1)}{i^2}) = \sum_{i=2}^{n} \ln((i-1)(i+1)) - \ln(i^2) =$$

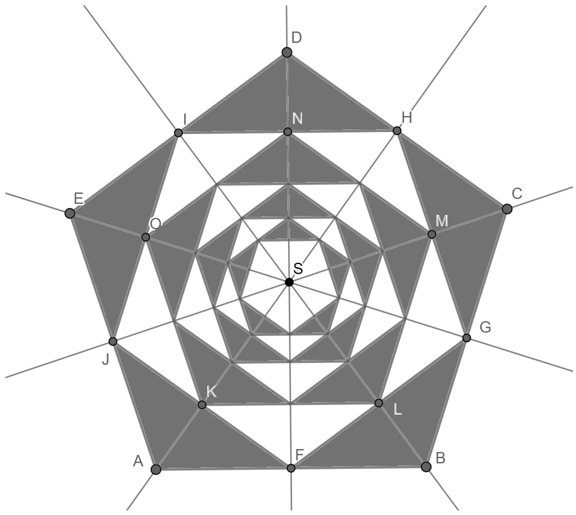
$$= \sum_{i=2}^{n} \ln(i-1) + \ln(i+1) - 2\ln(i) = \sum_{i=2}^{n} \ln(i+1) - \ln(i) + \sum_{i=2}^{n} \ln(i-1) - \ln(i)$$

Nyní si už stačí všimnout že v první sumě se všechny logaritmy čísla většího než 2 a menšího než $n+1$ odečtou a součet této sumy bude $-\ln 2 + \ln(n+1)$. Naopak v druhé sumě se poodečítají všechny logaritmy čísel větších než 1 a menších než n a zbyde nám jen $\ln 1 - \ln n$. A tedy pro každé přirozené n dostáváme:

$$\sum_{i=2}^{n} \ln(1 - \frac{1}{i^2}) = -\ln 2 + \ln(n+1) + \ln 1 - \ln n = \ln(\frac{n+1}{2n})$$

ÚLOHA 4.2: Mějme pravidelný pětiúhelník. Vyznačíme v něm středy všech stran a každý z nich spojíme se středy sousedních stran. Vznikne nám tak menší pětiúhelník a 5 trojúhelníků, které obarvíme černou barvou. Pro menší pětiúhelník proces opakujeme, pouze nově vzniklé trojúhelníky tentokrát obarvíme bílou barvou. Takto pokračujeme a střídavě obarvujeme do nekonečna. Kolik procent z původního pětiúhelníku je obarveno černou barvou?

ŘEŠENÍ:



1. pětiúhelník $ABCDE$ označme P_1; 2. pětiúhelník $FGHIJ$, mající středy stran P_1 jako vrcholy, označme P_2 a tak dále. Výslednou černou plochu můžeme vyjádřit pomocí obsahů pětiúhelníků jako $S_{P1} - S_{P2} + S_{P3} - S_{P4} + ...$ kde

$S_{P1} - S_{P2} =$ prvních 5 černých trojúhelníků

$S_{P3} - S_{P4} =$ dalších 5 černých trojúhelníků

...

Obsah P_1 můžeme vyjádřit jako $5 * S_{ABS}$:

$S_{ABS} = \frac{1}{2} * |AS| * |BS| * sin(\sphericalangle ASB)$, $|AS| = |BS| = x_1$, $|\sphericalangle ASB| = \frac{360}{5} = 72°$

$S_{ABS} = \frac{1}{2} * x_1^2 * sin(72)$

$S_{P1} = \frac{5}{2} * x_1^2 * sin(72)$

Stejným způsobem $S_{P2} = \frac{5}{2} * x_2^2 * sin(72)$, kde $|FS| = |GS| = x_2$

Mezi x_1 a x_2 platí následující vztah: $sin(54) = \frac{x_2}{x_1}$, jelikož AFS je pravoúhlý trojúhelník (F je střed strany AB, tedy úsečka FS je v rovnoramenném trojúhelníku AFS výškou) splňující $|\sphericalangle FAS| = 54°$ ($|\sphericalangle FAS| = 180 - |\sphericalangle ASF| - |\sphericalangle SFA| = 180 - 36 - 90$, ($|\sphericalangle ASF| = \frac{\sphericalangle ASB}{2}$)).

Tedy $x_2 = sin(54) * x_1$ a $S_{P2} = \frac{5}{2} * (sin(54) * x_1)^2 * sin(72)$

$S_{P1} - S_{P2} = \frac{5}{2} * x_1^2 * sin(72) - \frac{5}{2} * (sin(54) * x_1)^2 * sin(72) = \frac{5}{2} * x_1^2 * sin(72) * (1 - sin^2(54))$

Při zjišťování dalších obsahů si povšimněme, že P_3 vytváříme naprosto stejným způsobem z P_2, jako jsme vytvořili P_2 z P_1. x_3 je také výškou FGS a

$x_3 = sin(54) * x_2 = sin^2(54) * x_1$, $x_4 = sin(54) * x_3 = ... = sin^3(54) * x_1$ ...

$S_{P3} - S_{P4} = \frac{5}{2} * (sin^2(54) * x_1)^2 * x_1^2 * sin(72) - \frac{5}{2} * (sin^3(54) * x_1)^2 * sin(72) = \frac{5}{2} * x_1^2 * sin(72) * (1 - sin^2(54)) * sin^4(54)$

$S_{P5} - S_{P6} = \frac{5}{2} * (sin^4(54) * x_1)^2 * x_1^2 * sin(72) - \frac{5}{2} * (sin^5(54) * x_1)^2 * sin(72) = \frac{5}{2} * x_1^2 * sin(72) * (1 - sin^2(54)) * sin^8(54)$ ...

Nás však zajímá poměr černé části a P_1 tedy

$$\frac{(S_{P1} - S_{P2}) + (S_{P3} - S_{P4}) + ...}{P_1}$$

$$\frac{\frac{5}{2} * x_1^2 * sin(72) * (1 - sin^2(54)) + \frac{5}{2} * x_1^2 * sin(72) * (1 - sin^2(54)) * sin^4(54) + ...}{\frac{5}{2} * x_1^2 * sin(72)}$$

BRKOS Team

$$(1 - sin^2(54)) + (1 - sin^2(54)) * sin^4(54) + (1 - sin^2(54)) * sin^8(54)...$$
$$(1 - sin^2(54)) * (1 + sin^4(54) + sin^8(54) + ...)$$

Zde $(1 + sin^4(54) + sin^8(54) + ...)$ je geometrická řada, kde $a = 1$ a $q = sin^4(54)$. $0 < sin^4(54) < 1$, můžeme tedy použít vzorec pro součet geometrické řady:
$s = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-sin^4(54)}$
Dosazením dostáváme:

$$(1 - sin^2(54)) * \frac{1}{1 - sin^4(54)}$$
$$\frac{(1 - sin^2(54))}{(1 - sin^2(54)) * (1 + sin^2(54)}$$
$$\frac{1}{(1 + sin^2(54)} = 0.604409$$

Úloha 4.3: Nalezněte reálné číslo x takové, aby platila rovnice

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n - \sum_{m=0}^{\infty} x^{3m}} = 2$$

Řešení: Aby vůbec byla řada nalevo definovaná, musí být $\sum_{m=0}^{\infty} x^{3m}$ konvergentní k nějakému reálnému číslu. Kdyby $\sum_{m=0}^{\infty} x^{3m}$ divergovala či oscilovala, pak řada nalevo vůbec nemá smysl, jelikož bychom 3 neumocňovali na reálné číslo a taková operace není definovaná. Předpokládejme proto, že $\sum_{m=0}^{\infty} x^{3m} = r$ pro nějaké reálné číslo r. Poté $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n - \sum_{m=0}^{\infty} x^{3m}} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{n-r}$. Předpokládejme tedy, že $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n-r} = 2$. Pak můžeme konstantní číslo 3^{-r} vytknout z konvergentní řady a máme $3^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n = 2$, neboli $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n = 2 \cdot 3^r$. Ale my víme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n$ diverguje, jelikož je geometrická s koeficientem větším než jedna. Tato rovnost tedy nemůže být splněna pro žádné reálné číslo r a z předpokladu, že rovnost platí, jsme došli ke sporu. Úloha tedy nemá řešení.

Úloha 4.4: Nechť m je přirozené číslo. Určete, jakých kladných hodnot může nabývat q_m, aby výraz konvergoval. Dokažte.

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{1} \left(\sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\sum_{n_3=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\quad \cdots \quad \left(\sum_{n_m=0}^{\infty} \frac{1}{m} q_m^{n_m} \right)^{n_{m-1}} \quad \cdots \quad \right)^{n_3} \right)^{n_2} \right)^{n_1}$$

Řešení: Vzhledem k tomu, jak je daná řada napsaná, budeme v řešení pracovat i s označeními

$$q_1 = \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\sum_{n_3=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\quad \cdots \quad \left(\sum_{n_m=0}^{\infty} \frac{1}{m} q_m^{n_m} \right)^{n_{m-1}} \quad \cdots \quad \right)^{n_3} \right)^{n_2} = \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{1}{2} q_2^{n_2}$$

$$q_2 = \sum_{n_3=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\sum_{n_4=0}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\quad \cdots \quad \left(\sum_{n_m=0}^{\infty} \frac{1}{m} q_m^{n_m} \right)^{n_{m-1}} \quad \cdots \quad \right)^{n_4} \right)^{n_3} = \sum_{n_3=0}^{\infty} \frac{1}{3} q_3^{n_3}, \ldots$$

Tedy vyždy platí $q_n = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} q_{n+1}^l$.

Indukcí dokážeme, že řada konverguje právě pro $q_m < \frac{1}{m}$. Protože se jedná o geoemtrickou řadu, víme, že konverguje právě tehdy když její kvocient je v absolutní hodnotě menší než jedna.

- Celá řada konverguje právě tehdy když $q_1 < 1$
- Nyní předpokládejme, že řada konverguje právě tehdy když pro $n < m$ platí $q_n < \frac{1}{n}$ a dokažme, že potom řada konverguje právě tehdy když $q_{n+1} < \frac{1}{n+1}$.

  Víme, že $q_n < \frac{1}{n}$ a $q_n = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} q_{n+1}^l$. Tedy:

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{1 - q_{n+1}} < \frac{1}{n}$$

$$\frac{n}{n+1} < 1 - q_{n+1}$$

$$q_{n+1} < \frac{1}{n+1}$$

Tudíž skutečně platí, že řada konverguje právě tehdy když $q_m < \frac{1}{m}$.

Úloha 4.a: Jak se prezidentka Kaputová nudila, začala si na svůj kulatý pracovní stůl čmárat. Potom přišel Ňouma a sedl si k jejímu kulatému stolu a všiml si, že z jejich pohledů vypadá obrázek úplně stejně. Jaké obrázky mohla prezidentka Kaputová nakreslit, pokud víme, že by z jejich pohledů obrázek vypadal stejně, ať už by si Ňouma sedl na libovolné místo u stolu? Svoji odpověď dokažte.

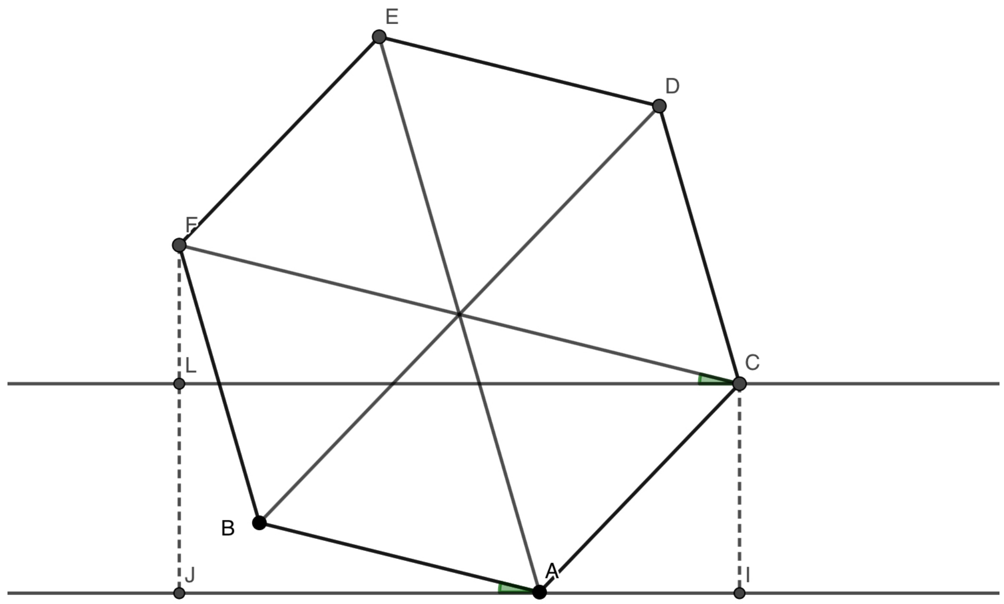
Řešení: Nejprve ukážeme, že kdykoliv bude na stole nakreslen nějaký bod x, musí už být nakreslená celá kružnice se středem ve středu stolu, na které bod x leží. Řekněme, že by osoba přišla ke stolu právě v bodě, kterým prochází polopřímka Sx, kde S je střeed stolu. Potom by viděla bod x na stejné přímce jako bod S ve vzdálenosti c od středu S. Když poté přijde v **libovolném** jiném bodě stolu, musí vidět obrázek stejně, tedy opět musí být nakreslen bod ve vzdálenosti c od středu S. Množina všech těchto bodů tvoří právě kružnici. Na stole tedy s každým bodem musí být nakreslena kružnice. Tedy řešením je libovolný počet (klidně nespočetně velký) kružnic se středem v bodě S. (Toto řešení zahrnuje jak prázdný obrázek, bod uprostřed stolu, soustředné kružnice, soustředná mezikruží, soustředný kruh a libovolné kombinace těchto možností.

Úloha 4.b: Určete délku kolmého průmětu pravidelného šestiúhelníku otočeného o úhel α na vodorovnou osu. Úhel $0°$ znamená, že jedna ze stran je rovnoběžná s vodorovnou osou.

Řešení: Načrtněme si situaci. Průmět celého šestiúhelníku bude shodný s průmětem úhlopříčky, která je rovnoběžná se stranou, od které měříme úhel. Protože bude rovnoběžná se stranou, bude svírat s vodorovnou osou taktéž úhel α. Protože pravidelný šestiúhelník můžeme rozdělit na šest shodných rovnostranných troúhelníků, tak délka úhlopříčky bude dvojnásobná délka strany. Označíme-li délku strany a, délka úhlopříčky pak bude $2a$.

Délku průmětu pak spočítáme jako $2a \cos \alpha$.

BRKOS Team



Jednodušší měli práci ti, kteří si řekli, že úhel měří s pomocí „nejbližší" strany, a tedy řekli, že úhel α se pohybuje pouze mezi 0° a 30° a pak to skutečně můžeme spočítat jako $2a\cos\alpha$.

Pokud bychom si řekli, že máme fixní stranu, od které počítáme úhel, musíme vyřešit, že pouhá funkce cosinus má jinou periodu. Zřejmě pro úhly −30° do 0° bude situace přesně opačná než pro 0° a 30°. Jako délku periody tedy musíme nastavit 60°. Našemu předpisu by pak vyhovoalo $y = 2a\cos(((\alpha + 30°) \mod 60) - 30°)$.

úloha 4.c: Uvažujme množinu M obsahující $2n+1$ různých čísel pro nějaké pevně dané n. Označme $S(M)$ množinu všech součtů všech prvků všech podmožin množiny M. Za předpokladu, že množina $S(M)$ má právě $2^{2n} - 1$ prvků dokažte, že existují tři různé podmnožiny $A, B, C \subseteq M$ takové, že $\sum_{a\in A} a = \sum_{b\in B} b = \sum_{c\in C} c$.

řešení: Neboť množina M má $2n+1$ prvků, má také 2^{2n+1} podmnožin. Provedeme přímý důkaz s pomocí dirichletova principu. Mějme $|S(M)| = 2^{2n} - 1$. Nyní každou z 2^{2n+1} podmnožin přiřadíme k jednomu z $2^{2n}-1$ součtů. Jelikož $2^{2n+1} \geq 2\cdot 2^{2n}-1$, dirichletův princip tvrdí, že budou existovat tři různé množiny, které jsme přiřadili ke stejnému součtu.

úloha 4.d: Jaro Švrkošík má před sebou čtvercovou síť 7×7 a chce na ni připravit hru dle klasických pravidel Hledání min. Jeho cílem ale je, aby součet čísel v prázdných polích zobrazující počet sousedních polí obsahujících minu byl maximální možný. Ještě zdůrazňujeme, že na polích s minou žádné číslo není. Určete tento součet a také počet různých řešení s tímto součtem.

řešení: Pro účely úlohy označme dvojici polí s alespoň jedním společným vrcholem jako „sousedící". Z pravidel hry vyplývá, že součet čísel na čtvercové síti bude roven počtu dvojic sousedících polí takových, že právě jedno z nich má na sobě minu. O takové dvojici řekněme, že se „započítává“. Zdůrazněme ještě, že každé pole může být součástí více dvojic, které se započítávají.

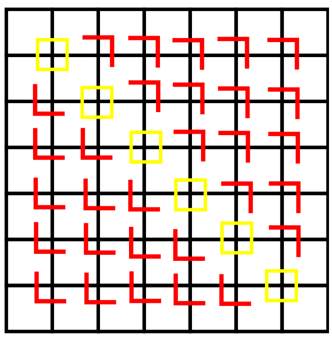
Naším cílem v první části úlohy bude tedy najít maximální možný počet započítávajích se dvojic (tj. omezit řešení úlohy shora) a poté v ideálním případě nalézt řešení s právě takovým součtem čísel.

Zaměřme se nyní na jednodušší útvary, vytvořené spojením několika čtverečků, u kterých jsme schopni určit poměrně jednoduše maximální počet dvojic, které se započítávají, konkrétně na triomino tvaru L a tetromino ve tvaru čtverce (viz obrázek).

Výběr těchto útvarů má dva důvody. Zaprvé, rádi bychom nalezli útvary, které mají méně započítávajících se dvojic než dvojic sousedících (viz výpočet níže). Zadruhé, chtěli bychom pomocí těchto útvarů vyplnit čtvercovou síť tak, aby každá sousedící dvojice ležela v maximálně jednom útvaru.

Snadno ukážeme (z Dirichletova principu), že v triominu musí být alespoň 1 dvojice čtverečků stejného typu (na obou mina nebo ani na jednom) a tedy alespoň 1 dvojice v rámci tohoto útvaru se nebude započítávat. Ve čtvercovém tetrominu sousedí každé pole s každým, tedy počet započítávajích se polí je přímo roven součinu počtů obou typů polí. V optimálním případě tedy máme 2 pole s minou a 2 pole bez miny, tedy celkem $2 \cdot 2 = 4$ započítávající se dvojice z celkových 6 sousedících dvojic. Tedy se minimálně 2 dvojice započítávat nebudou.

Označme M množinu všech sousedících dvojic polí ve čtvercové síti. Libovolný útvar můžeme po umístnění na čtvercovou síť vnímat jako nějakou podmnožinu množiny M. Z obrázku níže plyne, že všechny takovéto podmnožiny jsou po dvou disjunktní a jejich sjednocení je podmnožina M. Vzhledem k tomu, že jsme pro tyto podmnožiny spočítali minimální počty nezapočítávajících se dvojic (prvků) a vzhledem k disjunknosti bude celkový počet nezapočítávajích se dvojic jistě roven nejméně součtu těchto minimálních počtů nezapočítávajících se množin. Našli jsme tedy teoretické horní omezení počtu započítávajích se dvojic a tedy i součtu čísel ve čtvercové síti.

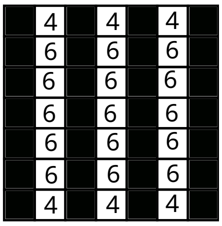


Pojďmě nyní úlohu řešit pro konkrétní rozmístění útvarů na čtvercovou síť. Máme zde 6 čtvercových tetromin a 30 triomin. Celkem se tedy nebude započítávat minimálně $6 \cdot 2 + 30 \cdot 1 = 42$ sousedících dvojic. Pro omezení maximálního počtu započítávajích se dvojic nám ještě chybí určit celkový počet sousedících dvojic v naší čtvercové síti 7×7.

BRKOS Team

Každé rohové pole má 3 sousedy, každé nerohové pole v hraně sítě má 5 sousedů a ostatní pole mají 8 sousedů. Celkově je tedy $3 \cdot 4 + 5 \cdot 20 + 8 \cdot 25 = 312$ sousedů. „Sousedství“ je ale symetrická vlastnost a tedy jsme každou sousedící dvojici započítali dvakrát. Celkem je tedy ve čtvercové síti 156 sousedících dvojic. Tím pádem můžeme maximální počet započítávajích se dvojic omezit jako $156 - 42 = 114$.

Nyní víme, že součet čísel ve čtvercové síti nebude více než 114. Není těžké nalézt příklad takového řešení:

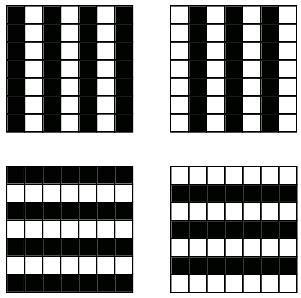


V druhé části úlohy se pokusíme najít všechna řešení, ve kterých je součet všech čísel ve čtvercové síti roven 114.

Již víme, že pouze maximálně 42 dvojic může být nezapočítávajících se. V tabulce je celkově 49 polí. Snadno si můžeme ověřit, že pokud by nějaké pole tvořilo pouze započítávající se dvojice (tj. bylo by „obklopeno“ poli druhého typu), měli by jeho sousedé mezi sebou tolik vytvořených sousedících dvojici, které by se ale samozřejmě nezapočítávaly, že by tento počet převážil výhodu z tohoto pole. A to i v případě, že by se pole nacházelo na kraji čtvercové sítě. Obdobná situace platí pro všechna pole kromě rohových při právě jednom sousedovi stejného typu. Vzhledem k tomu, že průměrně musí být každé pole součástí méně než dvou dvojic ($\frac{42 \cdot 2}{49} < 2$), docházíme k závěru, že každé pole může sousedit maximálně se dvěma poli stejného typu, jako je toto pole samotné. Obdobnými argumenty můžeme dojít k závěru, že spolu dvě pole stejného typu nemohou sousedit rohem (při obklopení poli druhého typu by opět došlo k převážení této „nevýhody“).

Když ovšem za těchto podmínek zvolíme typ jednoho pole, jednoznačně se nám určí i typy všech polí, které by při obarvení jako šachovnice měly stejnou barvu jako naše zvolené pole. To stejné opět můžeme provést s druhou barvou šachovnice. Na každou barvu šachovnice máme dvě možnosti zvolení typu pole a tedy celkem $2 \cdot 2 = 4$ možnosti, jak rozmístit miny na čtvercovou síť. Všechna možná řešení jsou vyobrazena v posledním obrázku a snadno ověříme, že řešením by byl skutečně součet 114.

BRKOS Team



BRKOS Team