# BRněnský KOrespondenční Seminář

XXX. ročník
2023/2024

ŘEŠENÍ 3. SÉRIE

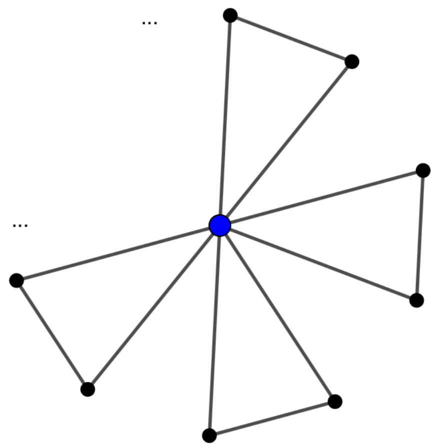
# TEORIE GRAFŮ

**ÚLOHA 3.1.** Nechť $G$ je souvislý graf s 2023 vrcholy. Víme, že má alespoň jeden bod artikulace a každý vrchol kromě tohoto bodu má stupeň 2. Určete maximální počet hran grafu $G$.

**ŘEŠENÍ.** Máme-li najít nějaké maximální řešení, tak by se náš postup měl skládat ze dvou kroků - dokázat, že žádné větší neexistuje a zároveň ukázat, že našeho maximálního jde dosáhnout.

Všechny vrcholy až na jeden mají stupeň 2. Víme, že počet hran je roven součtu stupňů všech vrcholů vyděleného dvěma (buď je to ve studijňáku nebo lze udělat jednoduchý myšlenkový důkaz). Stupeň zbývajícího vrcholu je maximálně 2022 (hrany povedou do všech zbývajících vrcholů). Počet hran grafu je tedy shora omezen s pomocí předchozího vzorce jako $\frac{1}{2}(2 \cdot 2022 + 2022) = \frac{1}{2}6066 = 3033$.

Nyní sestrojíme takové řešení, které bude mít právě 3033 hran a alespoň jeden bod artikulace. Takovým by mohl být třeba graf



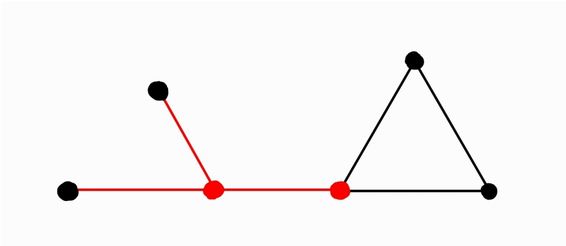

Bod uprostřed pak je zřejmě bodem artikulace, zbylé body nejsou body artikulace. Díky lichému počtu bodů je tato konstrukce korektní.

**ÚLOHA 3.2.** Rozhodněte a dokažte, zda existuje souvislý graf $G$, který obsahuje:

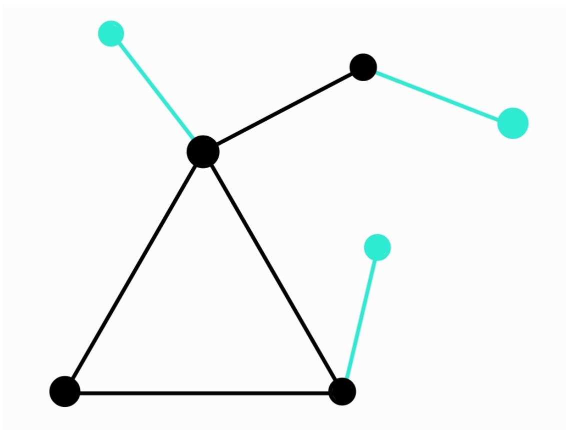
a) právě dva body artikulace, právě tři mosty a právě jednu kružnici,

b) právě tři body artikulace, právě dva mosty a právě jednu kružnici.

**ŘEŠENÍ.** V části a) postačí ukázat vyhovující řešení. Červeně jsou artikulační body a mosty.



V části b) ukážeme, že takový graf neexistuje. Nejprve si všimneme, že každá hrana, která není součástí (žádného) cyklu, je mostem. To lze dokázat např. sporem: Uvažujme hranu mezi vrcholy A a B, která není součástí cyklu a není mostem. Pak po jejím odstranění existuje nějaká jiná cesta mezi vrcholy A a B. Tato cesta však předtím spolu s odstraněnou hranou musela tvořit cyklus, což je spor. Nyní víme, že náš hledaný graf musí mít cyklus a dvě hrany mimo něj. Tyto dvě hrany podmiňují existenci právě dvou vrcholů mimo cyklus. Uvažujme nyní cyklus (libovolné délky), na který budeme postupně napojovat hrany spolu s vrcholy. První vrchol můžeme připojit k libovolnému vrcholu cyklu. U druhého pak máme tři možnosti, jak jej napojit, ani jedna však nesplní zadání. Graf tedy neexistuje.



Podrobnější komentář k obrázku: Černě je "základní"část grafu, tzn. cyklus a jeden vrchol. Modře pak jsou tři možnosti, jak napojit poslední vrchol (možností je samozřejmě nekonečně mnoho, ale všechny jsou ekvivalentní s těmito třemi).

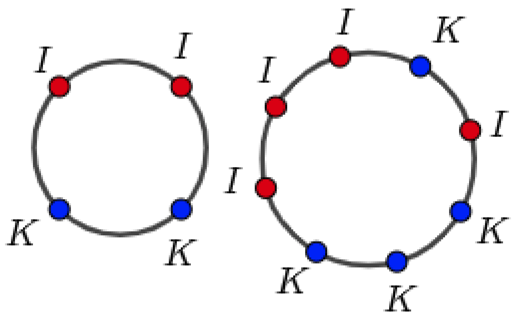
**Úloha 3.3.** Rozhodněte, zda existuje 4-souvislý graf $G$, jehož hranové chromatické číslo je 3.

**Řešení.** Dokážeme, že takový graf neexistuje. Předpokládejme pro spor, že ano. Náš graf je 4-souvislý. Uvažme libivolný jeho vrchol $X$. Dokážu, že má stupeň alespoň 4. Kdyby měl stupeň menší než 4 (měl by maximálně 3 sousedy), potom bych mohl odebrat všechny tyto sousedy. Výsledný graf určitě buď nebude souvislý, protože vrchol $X$ nemá žádného souseda, nebo se může stát, že nám zbyde pouze vrchol $X$. V obou případech dojdeme k tomu, že graf by nebyl 4-souvislý. Tedy $X$ má stupeň alespoň 4. Dle Dirichletova principu nemohu obarvit 4 hrany třemi různými barvami tak, aby každé dvě hrany měly různou barvu. Tedy takový graf nejsem schopen správně hranově obarvit a dostáváme spor s tím, že je náš graf má hranové chromatické číslo 3.

*BRKOS Team*

**ÚLOHA 3.4.** Kolem ohně stojí dokola indiání a kovbojové. Dokažte, že pro každé $k \geq 1$ existuje posloupnost $2^{k-1}$ kovbojů a $2^{k-1}$ indiánů, tedy celkem posloupnost délky $2^k$ tak, že v ní žádné dvě $k$-tice po sobě jdoucích postav nejsou stejné. Protože stojí v kruhu, samozřejmě první a poslední člen posloupnosti spolu sousedí. Na obrázku vidíme řešení pro $k = 2$ a $k = 3$. Například na druhém obrázku máme postupně k-tice: $III, IIK, IKI, KIK, IKK, KKK, KKI, KII$. Což jsou všechny možné různé trojice složené z kovbojů a indiánů.

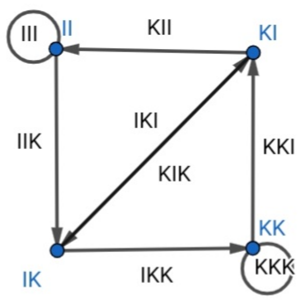
(Nápověda: Zkuste na řešení použít Eulerovský tah vhodným grafem, který bude reprezentovat náš problém)




**ŘEŠENÍ.** Celkem existuje $2^k$ různých $k$-tic po sobě jdoucích čísel, protože na každém z $k$ míst $k$-tice máme dvě možnosti: indián nebo kovboj. Vzhledem k tomu, že v kruhu máme celkem $2^k$ míst, znamená to, že tam bude každá $k$-tice právě jednou.

Vezměme si nyní orientovaný graf $(G, E)$, kde vrcholy budou $(k-1)$-tice a z vrcholu $u$ vede hrana do $v$ pouze pokud jsme schopni z $(k-1)$-tice $u$ vytvořit $(k-1)$-tici $v$ tím, že odděláme první pozici a místo toho přidáme na konec kovboje nebo indiána. Tedy například pokud $k = 4$, pak mezi vrcholy IKK a KKK vede hrana KKK->KK (odděláme první pozici)-> KKI (přidáme indiána). Nicméně mezi KKK a KIK hrana nevede. Dobré je si povšimnout, že vede hrana z KKK do KKK. Dále tím, jak jsme zavedly hrany, z každého vrcholu povedou právě dvě hrany a stejně tak do něho povedou právě dvě hrany. Protože každou $(k-1)$-tici můžeme tímto způsobem vytvořit právě dvěma způsoby a vytvořit z ní novou právě dvěma způsoby.

Každá hrana nám nyní reprezentuje právě jednu $k$-tici. V každé $k$-tici prvních $k-1$ čísel a posledních $(k-1)$ čísel přesně splňují požadavky na hranu. A zároveň $k$-tice je jednoznačně určena svými prvními a posledními $(k-1)$. Tedy je toto určení skutečně jednoznačné. Na obrázku můžeme vidět variantu pro $k = 3$:

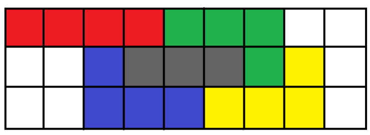



BRKOS Team

Tento graf je eulerovský, protože do každého vrcholu vedou a z každého vrcholu vedou dvě hrany. Můžeme vytvořit eulerovský tah přes všechny hrany. A tento tah nám zadá daný zasedací pořádek kolem ohně. Protože po sobě jdoucí hrany jsou k-tice takové, že jedna vznikla z druhé odděláním první pozice a přidáním na konec.

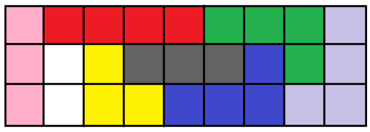
**Úloha 3.a.** Mějme tabulku $3 \times 9$ tvořenou čtverci, kde prostřední 3 čtverce 2. řádku jsou pohlcena (neexistují). Určete a dokažte, kolika způsoby můžeme vyplnit všechna zbývající pole tabulky, jestliže máme k dispozici 1 tetromino $1 \times 4$ a libovolný počet ostatních tetromin. Tetromina můžeme libovolně otáčet i zrcadlově převracet.

**Řešení.** K dispozici máme jedno I-tetromino a neomezený počet ostatních. Začneme tedy takovými vyplnění tabulky, kde toto jedno tetromino použijeme. Prvně se zamyslíme, kde se může I-tetromino objevit. Zřejmě to je jen v prvním a třetím řádku a vzhledem k tomu, že tabulka se osově souměrná podle vodorovné i svislé osy procházjící středem, stačí brát v úvahu pouze možnosti, kde je I-tetromino v prvním řádku blíže k levému okraji a poté výsedný počet vynásobit čtyřmi.
První možnost je, že I-tetromino bude hned v rohu tabulky. Největší problém nám nyní bude dělat políčko uprostřed pod Ničotou. Na toto políčko dosáhne pouze tetromino, které má tři políčka v řádku a protože I-tetromino už nemáme k dispozici, zbývá nám už jen L-tetromino (v obrázku modře), které bude zřejmě natočené doleva, protože jinak by nám rozdělilo tabulku na části, jejichž počet čtverečků není dělitelný čtiřmi a to bychom už nezvládli vyplnit. Stejný problém nastává s políčkem uprostřed nad Ničotou, kam analogicky dáme (zelené) L-tetromino. Tímto nám vznikl opět ten samý problém -tentokrát v pravo dole pod Ničotou - a musíme opět doplnit (žluté) L-tetromino. Zbyly nám tedy dvě čtveřice čtverečků, které můžeme vyplnit už jen jedním způsobem. Pro tuto možnost je tedy jen jeden způsob, jak tabulku vyplnit.

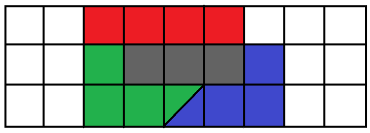


Druhá možnost je, že I-tetromino bude začínat na druhém políčku od okraje tabulky. Stejnou úvahou jako minule zaplníme políčko uprostřed po Ničotou (modrým) L-tetrominem, které bude tentokrát natočené doprava (kvůli dělitelnosti čtyřmi). Políčko nahoře nad Ničotou opět ze stejného důvodu zaplníme (zeleným) L-tetrominem a pravá strana má už jen jednu možnost na doplnění. Nyní se podíváme na levou stranu. První sloupec (růžový) jistě nebude pokrývat stejné tetromino jako to, které bude pokrývat políčko hned pod Ničotou. (U prvních dvou řádků je to proto, že jsou od sebe moc daleko a u třetího řádku by se muselo jednat o I-tetromino). Růžové tetromino má tedy dvě možnosti, jak může vypadat: buď to bude T-tetromino, nebo to bude L-tetromino. Podle toho už jednoduše doplníme žluté tetromino. Pro tuto možnost jsou tedy dva způsoby, jak tabulku vyplnit.

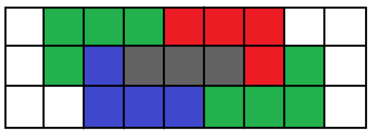
Třetí možnost je, že I-tetromino bude začínat na třetím políčku od okraje tabulky. V tomto případě však máme problém hned u umístění prvního kousku. Opět bychom chtěli



umístit L-tetromino tak, aby pokrývalo čtvereček uprostřed pod Ničotou, ale při obou otočení nám tento dílek rozdělí tabulku na části, jejichž počet čtverečků není dělitelný čtyřmi. Pro tuto možnost tedy neexistuje žádný způsob, jak tabulku vyplnit.



Našli jsme tři způsoby, jak tabulku vyplnit, a po vynásobení čtyřmi kvůli symetriím tedy dostáváme 12 způsobů, jak tabulku vyplnit za pomoci I-tetromina.
Zbývá nám tedy vyřešit kolika způsoby to lze vyplnit bez použití I-tetromina. Zřejmě políčka uprostřed pod a nad Ničotou mohou být pokrytá pouze L-tetrominy. Máme dva způsoby jejich natočení (vrchní do prava a spodní do leva a naopak). Nyní máme jedno políčko nad Ničotou a jedno pod Ničotou, na která (bez použití I-tetromina) mohou dosáhnout pouze (zelená) L-tetromina a vyzbily nám opět dvě čtveřice, které lze zaplnit jen jedním způsobem. Bez použití I-tetromina tedy máme dvě možnosti, jak tabulku vyplnit.



Celkem tedy dostáváme $12 + 2 = 14$ možností, jak tabulku vyplnit podle zadání.

**Úloha 3.b.** Určete, pro které konvexní mnohoúhelníky $\mathfrak{w}$ platí, že existuje kružnice $k$ jim vepsaná taková, že se dotýká $\mathfrak{w}$ právě ve středech všech stran.

**Řešení.** Pokusíme se dokázat, že zadání splňují pouze pravidelné n-úhelníky. Nejprve ukážeme, že to pro libovolný pravidelný n-úhelník platí a poté, že to pro žádný další n-úhelník neplatí.

Daný pravidelný n-úhelník si rozdělíme na n rovnoramenných trojúhelníků se základnami splývajícími se stranami n-úhelníku a společným vrcholem $S$. Každému pravidelnému n-úhelníku lze zřejmě vepsat kružnici se středem S a poloměrem o velikosti výšky libovolného z trojúhelníků. Strany n-úhelníku jsou tečny této kružnice. Víme, že obecně se tečna $t$ kružnice $k$ se středem $S$ dotýká v bodě $T$ tak, že $ST \nparallel t$. Vzhledem k tomu, že v rovnoramenném trojúhelníku splývá výška a těžnice, můžeme ihned říci, že v našem případě budou body dotyku všech stran n-úhelníku se stranou kružnice paty výšek daných trojúhelníků a tedy bude bod doteku vždy střed dané strany. Tím jsme dokázali první část.

Druhou část budeme dokazovat sporem. Budeme předpokládat, že výchozí tvrzení platí pro nějaký n-úhelník, který není pravidelný. Dále předpokládejme, že tomuto obecnému n-úhelníku lze vepsat kružnici. Pokud by tomu tak nebylo, je důkaz triviální. Označme střed kružnice vepsané $S$ a body doteku po směru hodinových ručiček $T_1 \dots T_n$. Dále označme opět po směru hodinových ručiček vrcholy n-úhelníku $A_1 \dots A_n$ tak, aby $A_1, A_2, T_1$ ležely na společné straně n-úhelníku. Pro libovolný lichý index $j$ bude platit $\sphericalangle ST_jA_j = 90°$. Zároveň jistě ze zadání $|A_jT_j| = |T_jA_{j+1}|$ a $|A_jS| = |A_{j+1}S|$. Trojúhelníky $A_jST_j, T_jSA_{j+1}$ jsou tak podle věty SuS shodné. Obdobně například pomocí věty Ssu dokážeme shodnost trojúhelníků $A_{j+1}ST_j, A_{j+1}ST_{j+1}$. Ty mají totiž společnou stranu, úhly při bodech dotyku pravé a $|A_{j+1}T_j| = |A_{j+1}T_{j+1}|$, protože jsou to části tečen vedené ze společného bodu.

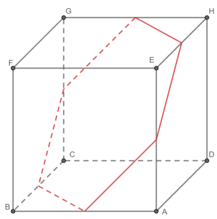
Ukázali jsme tak, že daný n-úhelník musí mít všechny strany stejně dlouhé, protože $|A_jT_j| = |T_jA_{j+1}|$ a $|A_{j+1}T_{j+1}| = |T_jA_{j+1}|$ a ze shodnosti trojúhelníků také, že má všechny vnitřní úhly stejně velké. Toto jsou ovšem postačující podmínky pro pravidelný n-úhelník. Došli jsme tak ke sporu, jelikož jsme předpokládali, že náš n-úhelník pravidelný není. Můžeme tedy říci, že žádný n-úhelník, který není pravidelný nemůže splňovat podmínky ze zadání.

Pouze pravidelné n-úhelníky splňují podmínky ze zadání.

**ÚLOHA 3.C.** Ňouma si vzal krychli a nůž. Krychli rozřízl na dvě části rovinným řezem. Poté spočítal počet vrcholů obou částí, které mu vznikly, a tato čísla sečetl. Jaké největší číslo takto mohl získat? Dokažte, že je největší.

**ŘEŠENÍ.**

Průnik krychle a roviny je $n$–úhelník, přičemž strany $n$–úhelníka jsou průnikem stěn krychle s rovinou a vrcholy $n$–úhelníku jsou průnikem roviny a hran (popř. vrcholů) krychle. Krychle má 6 stěn, proto lze sestrojit nejvýše 6–úhelník a to například řezem procházejícím 6ti středy hran krychle. Vzniklé dva útvary mají v součtu 20 vrcholů ($2 \cdot 6$ ze vzniklého 6–úhelníku + 8 vrcholů původní krychle).



**ÚLOHA 3.D.** Nalezněte všechny spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastností $f\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{f(a)} + \frac{1}{f(b)}$ pro všechna nenulová reálná $a, b$. Nápověda: Nepracujte s definicí spojité funkce. Použijte následující pojmy:

- Hustá podmnožina reálných čísel $H \subset \mathbb{R}$ má tu vlastnost, že pro libovolné reálné číslo $a \in \mathbb{R}$ existuje číslo z husté podmnožiny $b \in H$ libovolně blízko k $a$ (přesněji pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ a $\epsilon > 0$ existuje $b \in H$ tak, že $|a - b| < \epsilon$). Příklad husté podmnožiny v $\mathbb{R}$ jsou například racionální čísla $\mathbb{Q}$, jelikož pro libovolné reálné číslo můžeme sestrojit posloupnost racionálních čísel, která se k němu přibližují libovolně blízko. Další příklad husté podmnožiny v $\mathbb{R}$ jsou tzv. dyadická racionální čísla. Jsou to racionální čísla, která se dají zapsat ve tvaru $\frac{a}{2^m}$ pro $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}_0$. Ve svých řešeních nemusíte dokazovat, že tyto množiny jsou husté v $\mathbb{R}$.

- Máme-li zadané funkční hodnoty na husté podmnožině v $\mathbb{R}$, pak existuje nejvýše jedna spojitá funkce jimi procházející. Hodnoty na husté podmnožině tedy jednoznačně zadávají spojitou funkci. Jinak řečeno, pro spojité funkce platí, že konverguje-li posloupnost bodů na reálné ose k $x$, pak konverguje posloupnost obrazů k $f(x)$.

**Řešení.** Pokusme se odvodit z rovnice ze zadání vztah, který by nám pomohl v řešení úlohy. První pozorování je, že máme-li nenulové reálné $a$, pak platí

$$f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{2}{a}\right)=\frac{1}{f(a)}+\frac{1}{f(a)}=\frac{2}{f(a)}$$

neboli $f(a)f(\frac{2}{a})=2$. Nyní není zcela jasné, jak pokračovat. Je potřeba zkoušet nápady, než na něco narazíme. Zkusme si tedy třeba nějaké nenulové $a$ rozepsat jako $a=\frac{a}{3}+\frac{2a}{3}$. Potom

$$f\left(\frac{a}{3}+\frac{2a}{3}\right)=f(a)=f\left(\frac{1}{\frac{3}{a}}+\frac{1}{\frac{3}{2a}}\right)=\frac{1}{f\left(\frac{3}{a}\right)}+\frac{1}{f\left(\frac{3}{2a}\right)}=\frac{1}{\frac{2}{f\left(\frac{2a}{3}\right)}}+\frac{1}{\frac{2}{f\left(\frac{4a}{3}\right)}}=\frac{f\left(\frac{2a}{3}\right)+f\left(\frac{4a}{3}\right)}{2}$$

To je docela zajímavé pozorování. Zjistili jsme, že hodnota funkce v nenulovém bodě $a\in\mathbb{R}$ musí splňovat, že je průměrem funkčních hodnot symetricky rozložených kolem bodu $a$. Stejný postup by snad měl fungovat, i kdybychom si rozepsali číslo $a$ obecně jako $a=ka+(1-k)a$. Postup je poté zcela stejný:

$$f(ka+(1-k)a)=f(a)=f\left(\frac{1}{\frac{1}{ka}}+\frac{1}{\frac{1}{(1-k)a}}\right)=\frac{1}{f\left(\frac{1}{ka}\right)}+\frac{1}{f\left(\frac{1}{(1-k)a}\right)}=\frac{1}{\frac{2}{f(2ka)}}+\frac{1}{\frac{2}{f(2(1-k)a)}}=\frac{f(2ka)+f(2(1-k)a}{2}$$

Tato rovnost platí pro všechna $k\neq 0,1$, vzhledem k tomu, jak jsme ji sestrojili - potřebovali jsme, aby výrazy $k,(1-k)$ byly invertibilní, tedy nenulové. Pojďme se zamyslet, co nám tato rovnost $f(a)=\frac{f(2ka)+f(2(1-k)a)}{2}$ říká. Můžeme si ji BÚNO přepsat na $f(a)=\frac{f(a-k)+f(a+k)}{2}$ pro všechna $k\neq a$. V podstatě vyjadřuje, že "funkční hodnota průměru je průměr funkčních hodnot".

Nyní přichází hlavní úvaha úlohy. Předpokládejme, že již známe funkční hodnoty hledané funkce $f$ v bodech 1 a 2. Víme, že funkce $f$ musí splňovat rovnost $f(a)=\frac{f(a-k)+f(a+k)}{2}$. Tím pádem je jednoznačně určena i funkční hodnota v bodě 3, jelikož $2=\frac{1+3}{2}$, tedy $f(2)=\frac{f(1)+f(3)}{2}$, z čehož plyne $f(3)=2f(2)-f(1)$. Všimněte si, že funkční hodnota $f(3)$ leží na přímce určené hodnotami $f(1)$ a $f(2)$ díky našemu odvozenému vztahu. Stejným způsobem máme určené hodnoty $f(4),f(5),\ldots$ ve všech kladných přirozených číslech, a opět všechny leží na přímce určené hodnotami $f(1),f(2)$. S hodnotou v nule musíme být opatrní, protože tam nám ze zadání odvozená rovnost neplatí, ale víme, že $f(-1)$ leží opět na přímce určené $f(1),f(2)$, jelikož $1=\frac{-1+3}{2}$, tedy $f(-1)=2f(1)-f(3)$. Tedy i funkční hodnoty ve všech záporných celých číslech budou stejným postupem ležet na přímce určené body $f(1),f(2)$. Pokud tedy známe funkční hodnoty $f(1),f(2)$, pak známe funkční hodnoty ve všech celých číslech kromě nuly. Funkce $f$ musí ale splňovat odvozené pravidlo. Protože známe $f(k)$ i $f(k+1)$, musí být $f\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\frac{f(k)+f(k+1)}{2}$. Známe tedy funkční hodnoty i v číslech "mezi"celými čísly, tedy v číslech tvaru $\frac{k}{2}$, kde $k$ je liché celé číslo. Všechny tyto funkční hodnoty opět leží na přímce určené $f(1),f(2)$. Tento proces můžeme opakovat, tedy známe i funkční hodnoty v číslech $\frac{k}{4}$, kde $k$ je liché celé číslo apod. Začíná se nám tu rýsovat právě hustá množina dyadických racionálních čísel v $\mathbb{R}$.

*BRKOS Team*

Vskutku, pro libovolné dyadické racionální číslo jsme schopni po konečně mnoha krocích odvodit jeho funkční hodnotu a ta bude ležet přesně na přímce určené hodnotami $f(1), f(2)$.

Pojďme si zopakovat, co víme. Pro hledanou funkci $f$ ze zadání jsme odvodili, že musí splňovat vztah $f(a) = \frac{f(a-k)+f(a+k)}{2}$ pro všechna $k \neq a$. Předpokládáme-li, že známe funkční hodnoty v bodech 1 a 2, jsme schopni podle tohoto pravidla odvodit i funkční hodnoty v libovolném dyadickém racionálním čísle kromě nuly. Všechny funkční hodnoty v těchto číslech budou ležet na přímce určené body $f(1), f(2)$.

Nyní už jsme skoro hotovi. Ze zadání víme, že spojité funkce jsou určené jednoznačně svými hodnotami na hustých množinách v $\mathbb{R}$. Dyadická racionální čísla bez nuly jsou pořád hustá v $\mathbb{R}$ a máme na nich určenou funkci - přímku. Víme, že těmito body určitě prochází spojitá funkce - přímka definovaná na celém $\mathbb{R}$, která je určitě spojitá. Zároveň je jediná spojitá, která těmito body může procházet. Z toho nám vychází, že pokud máme funkci ze zadání $f$, která je spojitá a známe funkční hodnoty $f(1)$ a $f(2)$, pak funkce $f$ je přímka na dyadických rac. číslech, a tudíž je přímka i na celém $\mathbb{R}$ díky tomu, že funkční hodnoty na husté podmnožině definují nanejvýš jednu spojitou funkci. Závěr je, že hledaná funkce $f$ musí být přímka.

Nyní už jsme skoro na konci. Velice jsme si zjednodušili tvar funkce $f$ - víme, že to musí být přímka. Takovéto funkce mají obecně tvar $f = ax + b$. Zbývá dosadit tento tvar do zadání a ověřit, které přímky jsou řešením. Počítejme:

$$f\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = a\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + b := \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)} = \frac{1}{ax+b} + \frac{1}{ay+b}$$

Aby bylo $f$ řešením, musela by tato rovnost platit pro všechna nenulová reálná $x, y$. Nejprve předpokládejme, že zároveň $a \neq 0, b \neq 0$ a dojděme ke sporu:

Můžeme dosadit $y = -x$ a máme

$$a\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{-x}\right) + b = a0 + b = b = \frac{1}{ax+b} + \frac{1}{-ax+b} = \frac{b-ax}{b^2 - a^2x^2} + \frac{b+ax}{b^2 - a^2x^2} = \frac{2b}{b^2 - a^2x^2}$$

Toto ale není možné, protože by rovnost $b = \frac{2b}{b^2-a^2x^2}$ musela platit pro každé nenulové $x \in \mathbb{R}$, což očividně neplatí. Alespoň jedno z čísel $a, b$ musí být tedy nulové. Kdyby $a = 0$, pak po dosazení získáváme $b = \frac{2}{b}$. Řešením této rovnice je $b = \pm\sqrt{2}$. Kdyby naopak $b = 0$, pak

$$a\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{ax} + \frac{1}{ay}$$

neboli

$$a^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Tato rovnost platí očividně pro $a = \pm 1$. Poslední možnost, kdy $a = b = 0$ očividně řešení být nemůže.

Zjistili jsme tedy, že pokud je $f$ spojitým řešením úlohy ze zadání, pak $f$ je přímka tvaru buď $f = \pm\sqrt{2}$, nebo $f = \pm x$. Všechny čtyři funkce jsou spojitými řešeními hledané rovnosti, což ověříme zkouškou:

$$f\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \pm\sqrt{2} = \frac{2}{\pm\sqrt{2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{2}} + \frac{1}{\pm\sqrt{2}} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}$$

*BRKOS Team*

$$f\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\pm\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{\pm x}+\frac{1}{\pm y}=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}$$

Jsme hotovi.

*BRKOS Team*