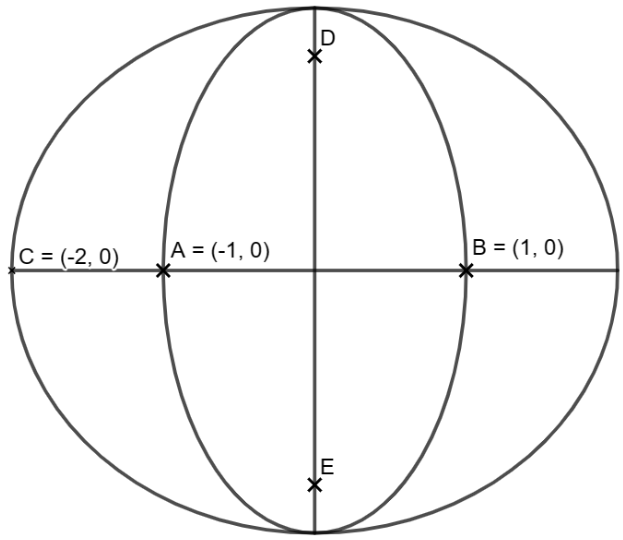
BRněnský KOrespondenční Seminář

XXX. ročník
2023/2024

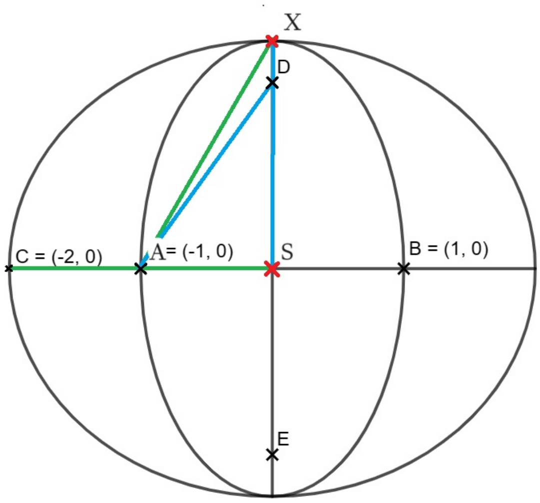
ŘEŠENÍ 2. SÉRIE

KUŽELOSEČKY

ÚLOHA 2.1: Na obrázku vidíte 2 elipsy. Určete vzdálenost ohniska jedné elipsy od ohniska druhé.



ŘEŠENÍ: Střed obou elips si označíme jako S a jejich průsečík jako X (viz obrázek níže). Jednou z vlastností elipsy je, že všechny její body mají od ohnisek stejnou vzdálenost, tzn. $|AX| + |BX| = |AC| + |BC| = = 1 + 3 = 4$. Nyní, protože bod X leží na ose úsečky AB, tak $|AX| = |BX|$ a tedy $|AX| = \frac{2|AX|}{2} = \frac{|AX|+|BX|}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Pomocí Pythagorovy věty teď jednoduše vypočítáme velikost úsečky SX a sice: $|SX| = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Můžeme si všimnout, že je to délka hlavní poloosy menší elipsy a tedy pro libovolný její bod Y platí, že $|DY| + |EY| = 2|SX| = 2\sqrt{3}$. Bod A leží na ose úsečky DE, takže $|DA| = |EA|$ a tedy $|DA| = \frac{|DA|+|EA|}{2} = \frac{2|SX|}{2} = \sqrt{3}$. Vzdálenost dvou ohnisek je tedy $\sqrt{3}$.



ÚLOHA 2.2: Mějme trojúhelník EFX. Nalezněte bod A na straně EF, který leží na hyper-

bole s ohnisky E a F a zároveň na stejné větvi hyperboly leží i bod X. Následně určete vzdálenost $|AE|$ vyjádřenou pomocí délek stran trojúhelníka EFX.

Řešení: Hyperbola má dvě osově souměrná ramena a tedy dva průsečíky s $|EF|$. Označme druhý průsečík A'. Úlohu si rozdělíme na 3 možné případy dle umístění A a ukážeme si, že při všech lze $|EA|$ vyjádřit stejným způsobem.

1. $|EA| > |FA|$

   Z definice hyperboly víme, že platí $|EA| - |FA| = |FA'| - |EA'| = ||EX| - |FX||$, ze znalosti $|EA'| = |FA|$ navíc platí $|EA| - |FA| = |AA'|$. Z výchozí nerovnosti nám také jednoduše vyplývá $||EX| - |FX|| = |EX| - |FX|$. Můžeme tedy psát:

   $$|EA| - |FA| = |FA'| - |EA'| = |EX| - |FX| = |AA'|.$$

   Jelikož $|EA| = |FA'|$, platí $|EF| = |EA| + |FA'| - |AA'| = 2|EA| - |AA'| = 2|EA| - (|EX| - |FX|) = 2|EA| - |EX| + |FX|$.

   Z odvozené rovnice $|EF| = 2|EA| - |EX| + |FX|$ již snadno vyjádříme $|EA| = \frac{|EF| + |EX| - |FX|}{2}$.

2. $|EA| < |FA|$

   Nyní platí $|FA| - |EA| = |AA'|$. Z již vypsaných rovností můžeme s drobnými úpravami ukázat, že $|EF| = |EA| + |FA'| + |AA'| = 2|EA| + |AA'| = 2|EA| + (|FX| - |EX|) = 2|EA| - |EX| + |FX|$. A dostáváme tak stejné vyjádření.

3. $|EA| = |FA|$

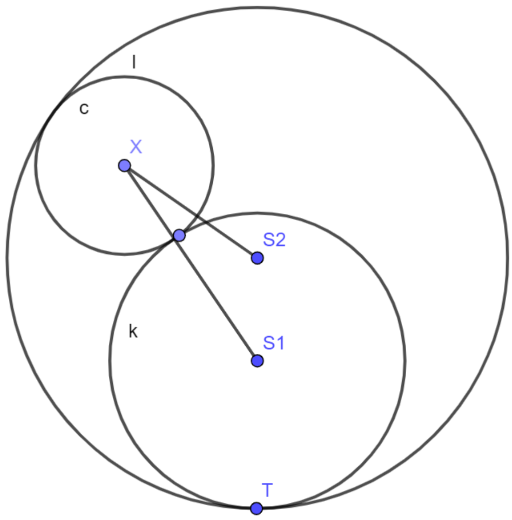
   V tomto speciálním případě hyperbola zdegenerovala na osu úsečky $|EF|$, $A = A'$ a triviálně dostaneme, že $|EA| = \frac{|EF|}{2}$. Jelikož ale v tomto případě platí $|EX| = |FX|$, je toto přesně tvar, na který se nám obecný vzorec redukuje a tedy platí i v tomto případě.

   Nyní můžeme ještě konstatovat, že jsme odpověděli i na první otázku úlohy - nalezení bodu A, jelikož ho nyní můžeme díky výsledné rovnosti nalézt i pouze geometricky.

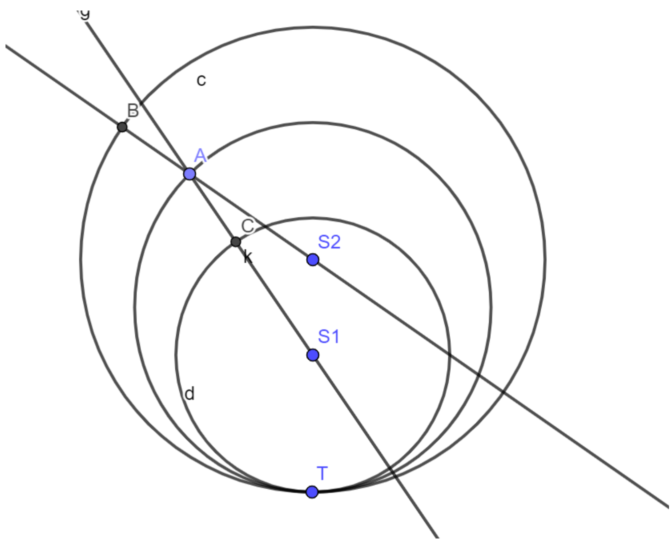
   Pro libovolný trojúhelník EFX tak dostáváme $|EA| = \frac{|EF| + |EX| - |FX|}{2}$.

Úloha 2.3: Máme kružnice k a l, které mají vnitřní dotyk, l leží uvnitř k. Charakterizujte množinu bodů tvořenou středy kružnic, které mají vnější dotyk s l a vnitřní dotyk s k.

Řešení: Uvažme dvě takové kružnice, označme je k, l. Jejich společný bod označme T, jejich středy S_1, S_2 a jejich poloměry si označme r, R. Ukážeme, že hledaná množina je elipsa s ohnisky S_1, S_2 procházející bodem T. Nejprve ukážeme, že každý bod naší hledané množiny leží na této elipse. Označme si X libovolný střed kružnice požadovaných vlastností, x poloměr této kružnice.



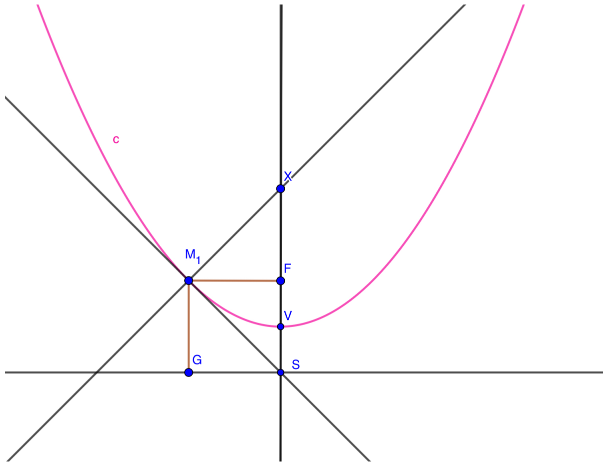
Podívejme se na součet délek úseček XS_1 a XS_2. Úsečka X_S1 má délku rovnu $R-x$, délka úsečky XS_1 je rovna $r+x$. Proto součet těchto vzdáleností je $R+r$, což je konstantní. Bod T zřejmě leží na této elipse. (Pokud považujeme jeden bod za degenerovanou kružnici.) Dále je ještě potřeba ukázat, že každý bod této elipsy je středem nějaké kružnice požadovaných vlastností. Uvažme tedy libovolný bod A ležící na této elipse. Nakresleme si přímky AS_1 a AS_2. Označme B průsečík přímky AS_2 s kružnicí l a C průsečík přímky AS_1 s kružnicí k. Protože tento bod leží na naší elipse, víme, že $AS_1 + AS_2 = R + r$, z toho plyne, že délky úseček AB a AC jsou stejné, proto existuje kružnice mající vnitřní dotyk s l a vnější dotyk s k.



Úloha 2.4: Uvažujte tečnu t k parabole (ohnisko F, vzdálenost ohniska od řidící přímky p) takovou, že prochází bodem S (průnik osy a řidící přímky). Tato tečna protíná parabolu v bodě M. Uvažujte kolmici k k tečně t, procházející bodem M. Tato kolmice k protíná osu paraboly v bodě X. Určete vzdálenost bodu X od ohniska.

Řešení: Udělejme si obrázek. Označme G patu kolmice z bodu M na řidící přímku.

BRKOS Team



Bod M je bod paraboly, z definice paraboly proto musí platit, že vzdálenost bodu M od ohniska F je stejná jako vzdálenost od řídící přímky, tj. $|FM| = |FG|$. Dále víme, že tečna půlí úhel průvodičů, tedy že $|\sphericalangle FMS| = |\sphericalangle SMG|$. Teď víme, že trojúhelníky SMG a SMF jsou podobné, podle věty sus (mají shodnou stranu SM, $|\sphericalangle FMS| = |\sphericalangle SMG|$ a $|FM| = |FG|$). Protože je pravý úhel u vrcholu G, pak je i pravý úhel u vrcholu F. Můžeme nyní prohlásit čtyřúhelník $SFMG$ za čtverec. Úhel $|\sphericalangle SMF| = 45°$ a $|\sphericalangle FMX| = |\sphericalangle SMX| - |\sphericalangle SMF| = 45°$, navíc $|\sphericalangle MFX| = 90°$, trojúhelník MFX je proto rovnostranný pravoúhlý a podobný trojúhelníkům MFS. Odtud $|FX| = |FS| = p$.

Úloha 2.a: Najděte všechna n, pro která lze tabulku $n \times n$ vyplnit přirozenými čísly tak, aby v každém čtverci o velikosti 1 až n byl součet těchto čísel roven prvočíslu.

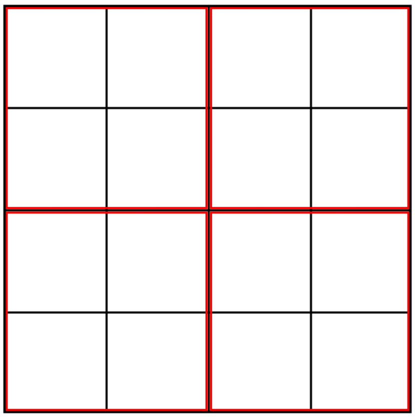
Řešení: Šetříme postupně od nejmenších rozměrů. Pro $n = 1, 2, 3$ najdeme například tato řešení:

2	3	2
3	3	3
2	3	2

3037	3041
2	3011

999983

Nyní ukážeme, že pro $n = 4$ již řešení neexistuje. Všechna prvočísla větší než 2 jsou lichá, proto i součet všech čísel v každé tabulce 2×2 a větší musí být nutně lichý. Rozdělíme si tabulku 4×4 na 4 tabulky 2×2 jako na obrázku:



V každém z červených čtverců musí být součet všech čísel lichý. Zároveň součet všech čísel ve velké tabulce bude roven součtu součtů v červených čtvercích. Půjde tedy o součet čtyř lichých čísel, který je ale sudý, a proto nemůže jít o prvočíslo. Tím jsme ukázali, že tabulku 4×4 nelze vyplnit dle zadání. U všech $n \geq 4$ pak lze říct, že obsahují tabulku 4×4, kterou nelze vyplnit, a tedy ani žádná větší tabulka nevyhoví zadání. Výsledkem je, že jediná n, pro které lze tabulku vyplnit, jsou $1, 2, 3$.

Úloha 2.b: Nalezněte všechny rostoucí funkce $f, g : [1, \infty] \to \mathbb{R}$ (tedy funkce vedoucí z intervalu $[1, \infty]$ do množiny reálných čísel), které splňují:

$$x \cdot e^{f(x)} = e \cdot g^2(x)$$
$$f(f(x)) = f(ln(e \cdot g(x)))$$

Řešení: Využijeme předpoklady na funkce f, g, abychom odvodili, jak nutně musí vypadat. Pak ověříme, zda se skutečně jedná o řešení a budeme hotovi. Nejprve si všimneme, že z předpokladu, že funkce f je rostoucí plyne, že funkce f je prostá. Jistě jste se s pojmem prosté funkce někdy setkali. Prostá funkce na intervalu I je taková, která libovolným dvěma různým číslům $x, y \in I$ přiřadí různá čísla. Matematicky se dá tato myšlenka zformulovat do implikace $f(x) = f(y) \implies x = y$. Můžete si rozmyslet, proč je rostoucí funkce automaticky i prostá. Každopádně pro nás to znamená, že v rovnosti $f(f(x)) = f(ln(e \cdot g(x)))$ můžeme beztrestně vzít na každé straně pouze argumenty uvnitř funkce f a získáme tím rovnost $f(x) = ln(e \cdot g(x))$. Ze zadání tedy plyne, že funkce f, g musí splňovat tuto rovnost. Můžeme tedy dosadit za $f(x)$ do první rovnice a získáváme $x \cdot e^{f(x)} = x \cdot e^{ln(e \cdot g(x))} = x \cdot e \cdot g(x) = e \cdot g^2(x)$. Můžeme obě strany rovnice vydělit nenulovým e a skončíme u rovnice $x \cdot g(x) = g^2(x)$. Chtěli bychom taky vydělit $g(x)$, ale potřebujeme ověřit, že to je nenulové číslo. Protože platí rovnice $x \cdot e^{f(x)} = e \cdot g^2(x)$ a na levé straně rovnice máme součin kladných reálných čísel, jelikož x na $[1, \infty]$ je kladné a umocňování e na cokoliv je opět kladné číslo, musí být i pravá strana rovnice kladné reálné číslo. A proto nesmí $g(x)$ být rovno nule, aby bylo splněno zadání. Tedy víme, že $g(x) \neq 0$ na $[1, \infty]$. Můžeme tedy rovnici $x \cdot g(x) = g^2(x)$ vydělit nenulovým $g(x)$ a získáme $g(x) = x$. Z rovnosti $f(x) = ln(e \cdot g(x))$ pak máme $f(x) = ln(e \cdot x) = 1 + ln(x)$.

Z podmínek ze zadání jsme odvodili, že existuje jediná dvojice rostoucích funkcí f, g, která může splňovat zadání. Zbývá ověřit, zda tato dvojice skutečně zadání splňuje. Jednak je zřejmé, že funkce f, g jsou rostoucí na $[1, \infty]$. Dosaďme do zadání a počítejme: $x \cdot e^{f(x)} = x \cdot e^{1+ln(x)} = x \cdot e \cdot x = e \cdot x^2 = e \cdot g^2(x)$. První rovnice platí. Dále $f(f(x)) = f(1 + ln(x)) = f(ln(e \cdot x)) = f(ln(e \cdot g(x)))$. Tedy i druhá rovnice platí. Celkem máme, že existuje právě jedno řešení $f(x) = 1 + ln(x)$, $g(x) = x$.

Úloha 2.c: Dokažte, že neexistuje normovaný kvadratický polynom s koeficienty v $\mathbb{Z}$, jehož každá nenulová hodnota v celém čísle je součinem n prvočísel.

Řešení: Normovaný polynom druhého stupně bude ve tvaru $f(x) = x^2 + bx + c$.

Po dosazení $f(0) = c$ získáváme $c = 0$ nebo c jako součin n prvočísel. Jelikož n je přirozené, tedy $n \geq 1$, součin n prvočísel bude alespoň 2.

Pro první případ nechť $c \neq 0$.

Dosadíme $f(c^k)$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a získáme $f(c^k) = c^{2k} + bc^k + c = c(c^{2k-1} + bc^{k-1} + 1)$, což má být 0 nebo součin n prvočísel, tedy $c^{2k-1} + bc^{k-1} + 1$ je buďto 0, nebo 1. Pro každé k a každou z možností $0, 1$ je člen b jednoznačně určen, pokaždé se však jedná o jiné číslo. Pokud ho tedy zafixujeme pro $f(c)$, pak pro $f(c^k)$ s $k > 1$ bude maximálně jedna další hodnota dávat výsledek 0 nebo 1, a tedy pro ostatní k nebude hodnota celého polynomu 0 nebo součin n prvočísel.

Pro druhý případ nechť $c = 0$.

Pak $f(x) = x^2 + bx$. Dosadíme postupně $1, -1, 2$ a -2 a získáme $f(1) = 1+b$, $f(-1) = 1-b$, $f(2) = 4 + 2b$ a $f(-2) = 4 - 2b$. Aby platilo $f(1) \geq 2$ a zároveň $f(-1) \geq 2$, pak by muselo platit $b \geq 1$ a zároveň $b \leq -1$. Proto musí platit $f(1) = 0$ nebo $f(-1) = 0$.

Pro první podpřípad nechť $f(1) = 0$, tedy $b = -1$. Pak $f(-1) = 1+1 = 2$, což je součinem 1 prvočísla (tedy $n = 1$), ale $f(-2) = 4 + 2 = 6$, což je součinem 2 prvočísel (a tedy $n = 2$), což dává spor $1 \neq 2$.

Pro druhý podpřípad nechť $f(-1) = 0$, tedy $b = 1$. Pak $f(1) = 1 + 1 = 2$, což je součinem 1 prvočísla (tedy $n = 1$), ale $f(2) = 4 + 2 = 6$, což je součinem 2 prvočísel (a tedy $n = 2$), což dává spor $1 \neq 2$.

Rozebráním všech možných případů jsme dokázali, že polynom s chtěnými vlastnostmi neexistuje.

Úloha 2.D: Mějme přirozená čísla a a b, pro která platí $a^3 + a^2 = b^2 + b$.

1. Najděte všechna řešení této rovnice za předpokladu, že a a b jsou nesoudělná čísla.
2. Dokažte, že pro libovolné $d \in \mathbb{N}$ existuje pouze konečně mnoho řešení rovnice, kde d je největší společný dělitel a a b.

Řešení: Upravme si nejprve rovnici:

$$a^3 + a^2 = b^2 + b$$

$$a^2(a + 1) = b(b + 1)$$

Vzhledem k tomu, že a a b jsou nesoudělné, tak musí platit, že $a^2 | (b + 1)$ a $b | (a + 1)$. Z toho dostaneme nerovnosti:

$$a^2 \leq b + 1$$

$$b \leq a + 1$$

$$a^2 \leq b + 1 \leq a + 2$$

A tedy musí platit:

$$a^2 - a - 2 \leq 0$$

Což je kvadratická rovnice s kladným koeficientem u druhé mocniny, tedy nabývá záporných hodnot pouze mezi svými kořeny, což je -1 a 2. Tedy přirozená čísla, pro které je tato nerovnost splněna je pouze $a = 1$ a $a = 2$. Z toho dostaneme dvě řešení $a = 1$, $b = 1$ a $a = 2$, $b = 3$. Což jsou tedy jediné dvě řešení pro nesoudělné a a b.

Nyní se podívejme na druhý podpříklad. Pokud a a b mají největšího společného dělitele d, můžeme si napsat $a = dx$, $b = dy$, kde x a y jsou nesoudělné. Po rozepsání dostaneme:

$$d^2x^2(dx+1) = dy(dy+1)$$
$$dx^2(dx+1) = y(dy+1)$$

Z toho nyný dostaneme $x^2|(dy+1)$ a $y|(xd^2+d)$. Takže dostaneme nerovnosti:

$$x^2 \leq dy+1$$

$$y \leq xd^2+d$$

druhou nerovnost můžeme upravit na $dy+1 \leq xd^3+d^2+1$ a dostaneme:

$$x^2 \leq dy+1 \leq xd^3+d^2+1$$

$$x^2 - xd^3 - d^2 - 1 \leq 0$$

Což je opět kvadratická rovnice s kladným koeficentem u druhé mocniny. Tudíž nabývá záporných hodnot pouze v hodnotách mezi kořeny. Celých čísel x mezi kořeny je jen konečně mnoho. A když dostaneme, nějaké celé číslo x a z něho celé číslo $a = xd$, pak dostaneme kvadratickou rovnici pro b: $b^2 + b - (a^3 + a^2) = 0$, která má maximálně dvě řešení. Tudíž pro každé d existuje maximálně konečně mnoho řešení.

BRKOS Team