BRněnský KOrespondenční Seminář

XXX. ročník

2023/2024

řešení 1. série

Úvodní rozcestník

úloha 1.1. Dokažte, že neexistují celá čísla k, l taková, že $2023k + 1785l = 1$.

řešení. Provedeme důkaz sporem. Budeme předpokládat, že nějaká taková $k, l \in \mathbf{Z}$ existují. Všimneme si, že obě čísla 2023 i 1785 jsou dělitelné sedmi. (Dokonce i 17, ale to pro účely řešení není důležité). Můžeme proto 7 vytknout a získáme:

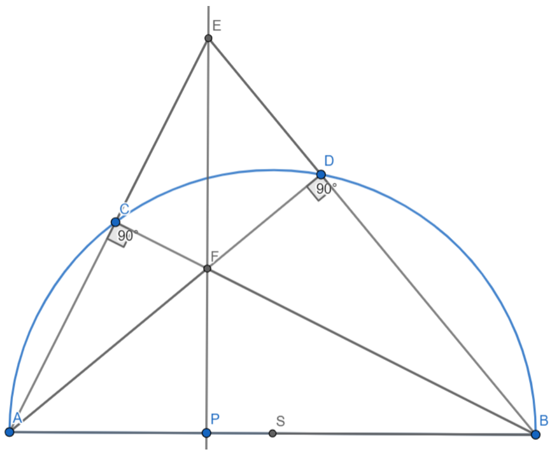
$$7 \cdot (289k + 255l) = 1.$$

Protože jsme předpokládali, že k, l jsou celá, pak víme, že levá strana rovnice je dělitelná sedmi. Pravá strana ale sedmi dělitelná není. Přicházíme proto ke sporu. Žádná taková k, l neexistují.

úloha 1.2. Mějme půlkružnici k s průměrem A, B. Na této půlkružnici leží dva další body C a D. Všechny body A, B, C, D jsou navzájem různé. Nyní nechť E je průsečík přímek AC a BD. Dokažte, že kolmice na AB, procházející bodem E a přímky BC a AD se všechny protínají v jednom bodě.

řešení. Úlohu si načrtneme - viz obrázek:

Úhly ACB a ADB jsou pravé, protože leží na thaletově kružnici nad úsečkou AB. Nyní uvažujme trojúhelník ABE. Přímky AD a BC jsou výškami, protože jsou kolmé postupně ke stranám AE a BE a procházejí protějšími vrcholy. V jejich průsečíku musí ležet ortocentrum trojúhelníku - označme jej F. Nyní ukážeme, že kolmice z bodu E na stranu AB bude procházet bodem F. To je však zřejmé, neboť se jedná o třetí výšku v trojúhelníku, která bodem F jakožto ortocentrem musí vždy procházet.



Ještě je třeba prošetřit případy, kdy budou body C,D na kružnici v opačném pořadí (tedy bod D bude blíže bodu A než bod C). Náčrt takové situace bude stejný, pouze se vymění body C, D a E, F. Stále platí $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB| = 90°$. Označme F průsečík přímek AD, BC. Nyní uvažujme trojúhelník ABF. Přímky AC a BD jsou výškami, protože jsou kolmé postupně ke stranám BF a AF a procházejí protějšími vrcholy. V jejich průsečíku musí ležet ortocentrum trojúhelníku - zároveň se jedná o náš bod E. Nyní ukážeme, že kolmice z bodu E na stranu AB bude procházet bodem F. Přímka, která je kolmá na stranu a prochází ortocentrem ale musí být výška, a tedy bude procházet i protějším vrcholem, což je právě F. □

BRKOS Team

Úloha 1.3. Uvažujme
$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3$$
Víte, že $f(n)$ je polynom 4. stupně. Nalezněte $f(n)$ a indukcí dokažte, že pro váš polynom tvrzení platí pro všechna přirozená n.

Řešení. Různými způsoby se dá uhádout, že náš polynom 4. stupně by mohl být $(\frac{n(n+1)}{2})^2$.

Pro tento polynom nyní chceme použít indukci, abychom dokázali, že je roven v n součtu třetích mocnin čísel od jedné po n.

1. Pro $n = 1$ dostaneme: $\frac{1\cdot 2}{2} = 1^3$

2. Nyní předpokládejme, že daná rovnost platí pro n. Pomocí této skutečnosti se pokusme dokázat, že rovnost platí i pro $n+1$. Nejprve využijme indukční předpoklad na upravení součtu třetích mocnin:
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3.$$
Nyní dále upravme pravou stranu:
$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\frac{n^2+4(n+1)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$
Tedy jsme dokázali, že skutečně pokud platí rovnost pro n, pak platí pro $n+1$.

Proto daná rovnost platí, pro všechna přirozená n.

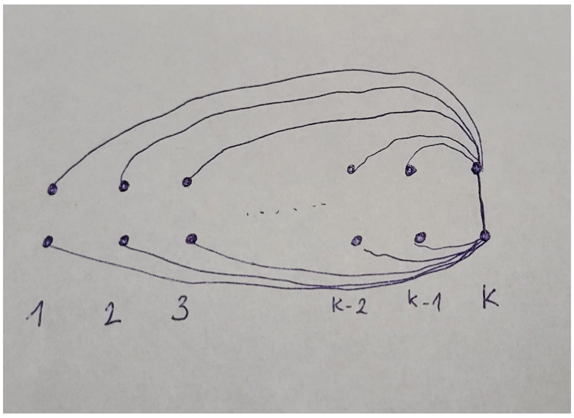
Úloha 1.4. Pro která přirozená k a n existuje souvislý graf o $n \cdot k$ vrcholech, který obsahuje n vrcholů stupně i pro každé přirozené i od 1 do k? Řešte pro lichá k a svoji odpověď dokažte.

Řešení. Nejprve se zamysleme, co kdyby n bylo 1. Musel by exstovat vrchol X stupně k, ovšem náš graf by měl pouze k vrcholů. To znamená, že takový vrchol X nemůže existovat, neboť může být spojen pouze s $k-1$ vrcholy.

Kdyby k bylo rovno 1, musel by každý vrchol mít stupeň 1, což je pro $n > 2$ spor se souvislostí. Pro $n = 1$ by měl graf pouze jeden vrchol, tedy žádnou hranu. Pro $n = 2$ řetězec se dvěma vrcholy vyhovuje zadání.

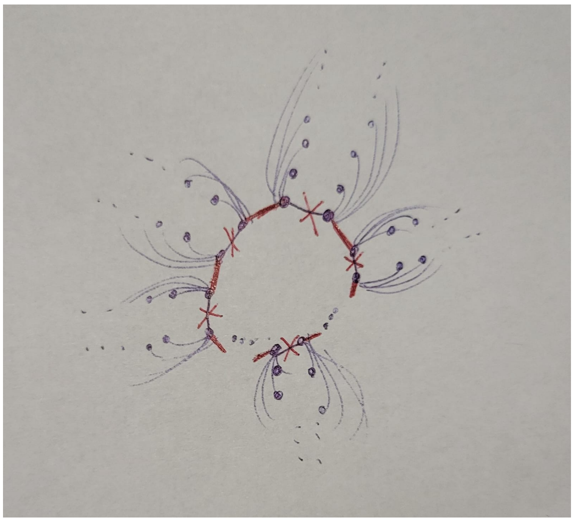
Dále tedy předpokládejme, že $2 \leq k, n$. Pro každý graf platí, že počet hran je roven polovině součtu stupňů všech vrcholů. Součet stupňů všech vrcholů je jednoduše $k \cdot \frac{n\cdot(k+1)}{2}$, proto počet hran musí být $k \cdot \frac{n\cdot(k+1)}{4}$. Nikoho snad nepřekvapí, že počet hran musí být celočíselný. Ze zadání víme, že k je liché, proto aby počet hran byl celočíselný musí platit $2|n$ nebo $4|k+1$, tedy $2|n$ nebo $k = 4l - 1$ pro nějaké přirozené l. Nyní je na čase pro obě z variant představit konkrétní konstrukci požadovaného grafu.

Předpokládejme nejprve, že n je sudé číslo. Ukážu, že pro každé liché k bude existovat daný graf. Nejprve si ukažme konkrétní konstrukci pro $n = 2$, kterou poté využijeme. Seřaďme si vrcholy do obdélníkové tabulky o velikosti $2 \times k$. Cílem bude mít v každém i. sloupci 2 vrcholy stupně i. Nejprve spojme vrcholy v k. sloupci se všemi ostatními vrcholy v daném řádku. Tím dostaneme $k-1$ hran. Aby tyto dva vrcholy měli stupeň k, spojme je spolu. Vrcholy v prvním a posledním řádku již mají požadovaný stupeň.



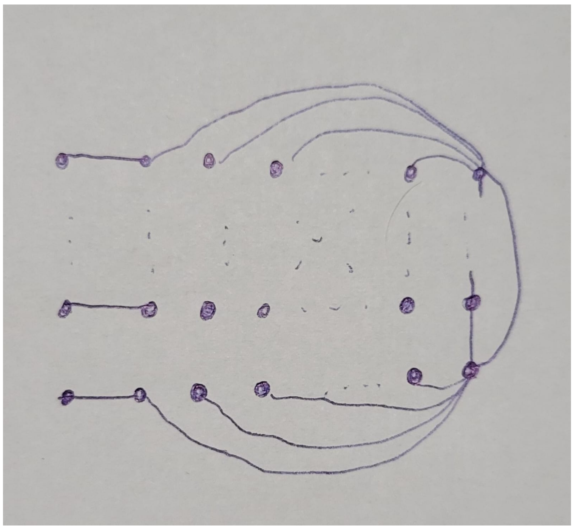
Dále se podívejme na vrcholy v $k-1$. řádku zatím z nich vede pouze jedna hrana. Spojme je se všemi vrcholy daného řádku, které ještě nemají požadovaný stupeň. Opět bude o jednu hranu méňe, proto spojme tyto dva vrcholy spolu. Nyní budou mít požadovaný stupeň navíc vrcholy v $k-1$. a ve 2. řádku. Tento postup opakujme, dokud nám nezbyde jediný sloupec, v němž dva vrcholy spolu propojíme. Výsledný graf je zcela evidentně souvislý.

Jak si nyní poradit, když n bude větší než 2? Rozdělme si všech n řádků do dvojic (n je sudé), v každém provedeme zmíněnou konstrukci. Výsledný graf ale nebude souvislý! To jednoduše napravíme tím, že sestrojíme cyklus na vrcholech stupně k a odebereme hranu, která původně v každé dvojici propojovala vrcholy stupně k.

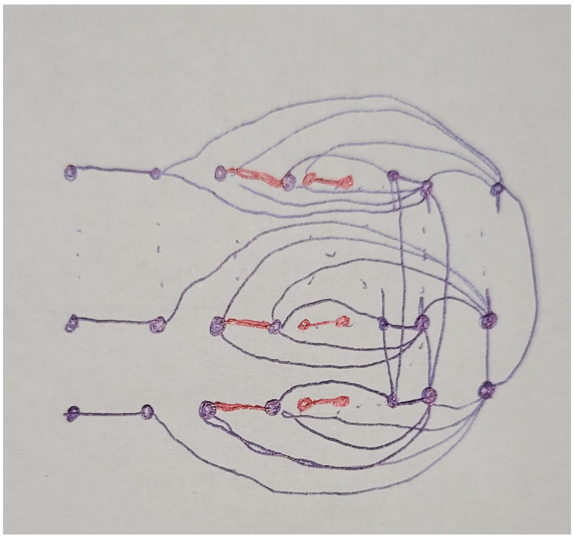


Dále předpokládejme, že n je libovolné a k lze zapsat ve tvaru $4l-$, kde $l \in \mathbb{N}$. Zároveň už můžeme předpokládat, že n je liché a alespoň 2, tedy, že n je alespoň 3. Tento předpoklad využijeme. Popíšu tedy konstrukci: Opět si seřaďme vrcholy do obdélníkové tabulky $n \times k$, kde v každém i. sloupci budeme chtít mít n vrcholů stupně i. Nejprve spojme v každém řádku vrchol z prvního sloupce s vrcholem ve druhém sloupci, zároveň vrchol v k. sloupci spojme se všemi vrcholy daného řádku, kromě vrcholů 1,2, tedy tak, aby měl po provedení tohohle kroku stupeň $k-2$. Protože však má stupeň o dva nižší, vytvořme cyklus na všech vrcholech v k. sloupci. (Toto můžeme provést, protože n je alespoň 3.)

BRKOS Team



Tedy vrcholy ze sloupce 1,2 a k už mají požadovaný stupeň. Vrcholů, které zatím nemají požadovaný stupeň je v každém slopci $4l - 1 - 3 = 4l - 4$, což je dělitelné čtyřkou. Dále opakujme následující postup: Vrcholy v posledním sloupci, které ještě nemají správný stupeň spojujme s předchozími vrcholy na daném řádku, dokud nebude mít tento vrchol stupeň o dva nižší než je stupeň požadovaný.



Tohle provedeme přesně s polovinou vrcholů, které po prvním kroku neměly požadovaný stupeň, dále už to nebude možné. Všechny ostatní vrcholy mají na konci tohoto provedení stupeň o jedna nižší, než chceme. Kolik takových vrcholů je? Po prvním kroku nám zbylo $4l-4$ vrcholů, polovinu z nich jsme dostali na správný stupeň, druhá polovina má stupeň o jedna nižší, tedy $2l - 2$ vrcholů z každého řádku má stupeň o jedna nižší než mít má. Krása však nastane v momentě, kdy si uvědomíme, že tento počet je dělitelný dvojkou a stačí nám tedy rozdělit tyto vrcholy do dvojic a spojit hranou. Výsledný graf bude zcela zřejmě souvislý.

Výsledkem tedy je, že takový graf existuje pro dvojice (n, k), kde $2|n$ nebo $k = 4l - 1$ a pro dvojici $(1, 2)$.

Úloha 1.a. Kouma si chce přehrát náhodně 2 písničky z Ňoumova playlistu. Třetina

BRKOS Team

z písniček v playlistu je od jeho oblíbeného kapely Imagine Numbers. Určete celkový počet písniček v playlistu, pokud víte, že pravděpodobnost, že obě přehrané písničky budou Imagine Numbers, je 1/11.

Řešení. Označme si n počet všech písniček. Písniček od Imagine Numbers bude $\frac{n}{3}$. Poprvé vybíráme z n písniček, přičemž $\frac{n}{3}$ je od Imagine Numbers. Pravděpodobnost výběru písničky od Imagine Numbers jako 1. písničky je $p_1 = \frac{\frac{n}{3}}{n}$ Podruhé vybíráme z $n-1$ písniček, přičemž $\frac{n}{3}-1$ je od Imagine Numbers. Pravděpodobnost výběru písničky od Imagine Numbers jako 2. písničky je $p_2 = \frac{\frac{n}{3}-1}{n-1}$.

Takto definované pravděpodobnosti jsou již na sobě nezávislé a platí tedy:

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{11}$$

Nebo-li:

$$\frac{\frac{n}{3}}{n} \cdot \frac{\frac{n}{3}-1}{n-1} = \frac{1}{11}$$

Víme, že n je kladné, tedy dostáváme jednoduchou lineární rovnici, jejímž řešením je $n = 12$.

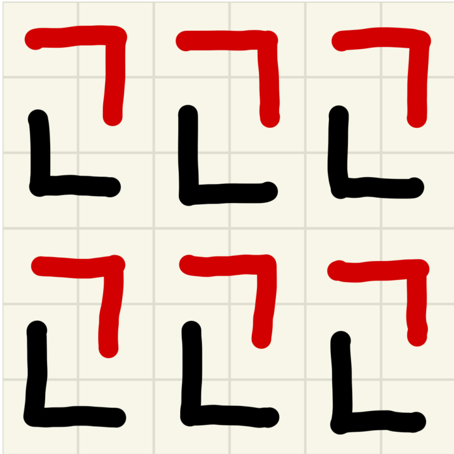
V playlistu je 12 písniček.

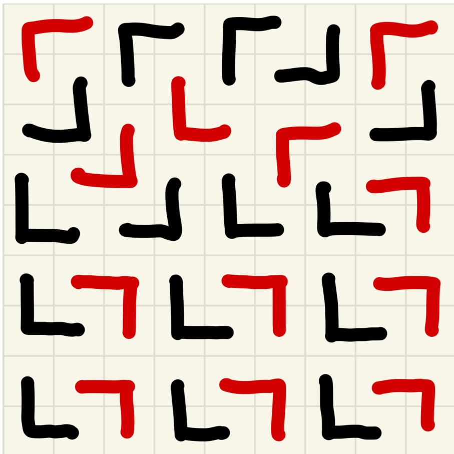
Úloha 1.b. Které šachovnice $n \times n$ pro n v rozmezí $1-10$ jsme schopni beze zbytku vyplnit pomocí kostiček ve tvaru čtverce 2×2 s chybějícím rohem?

Řešení. První krok je uvědomit si, že čtverec 2×2 bez jednoho rohu je složen celkem ze tří čtverečků 1×1. Aby tedy nějaká šachovnice s délkou strany n mohla být beze zbytku vyplněna pomocí těchto útvarů, musí být počet jejích dílků dělitelný třemi, neboli $3 \mid n^2$. Číslo 3 se v součinu $n \cdot n$ může objevit pouze tak, že bude obsaženo v každém z činitelů n, protože je prvočíslem. Tedy pokud $3 \mid n^2$, pak $3 \mid n$. (Ekvivalentní formulace, snad také zřejmá, je $3 \nmid n \implies 3 \nmid n^2$.)

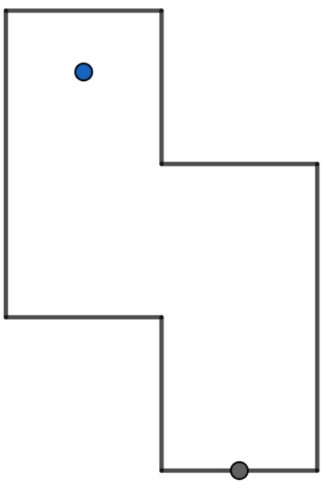
Pro n v rozmezí od 1 do 10 jsou čísla dělitelná třemi právě tři, a to 3, 6 a 9. Stačí se tedy omezit na ně. Nejprve ukážeme, že pro $n = 3$ šachovnice pomocí dílků ze zadání vyskládat nejde. Uvažme všechny čtyři rohové dílky 1×1 šachovnice 3×3. Je evidentní, že není možné pokrýt dva takovéto dílky jedním útvarem ze zadání (čtvercem 2×2 bez jednoho rohu), protože pak by v alespoň jednom směru x nebo y musel tento útvar být tři jednotky dlouhý, ale v obou směrech má maximální délku dvě. K pokrytí všech čtyř rohových čtverečků 1×1 bychom tedy potřebovali alespoň 4 útvary. Ale čtverec o rozměru 3×3 obsahuje celkem 9 malých čtverečků, tedy k pokrytí bychom měli použít právě tři útvary ze zadání, což je spor.

Pro $n = 6$ a $n = 9$ vhodná pokrytí šachovnic najít lze. Pro $n = 6$ jednoduše, pro $n = 9$ to dá trochu víc práce. Příklady najdete na obrázcích (barvy jsou použity jen pro lepší rozlišení jednotlivých dílků):





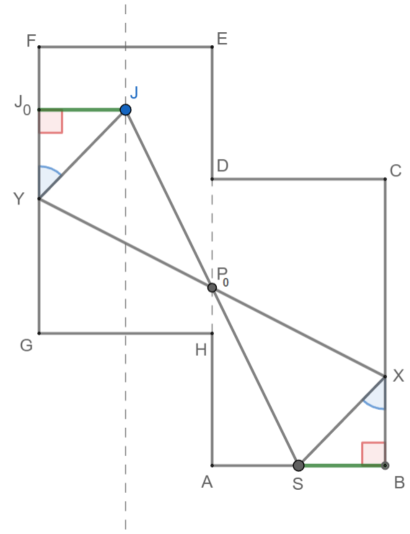
úloha 1.c. Máme minigolfovou dráhu ve tvaru dvou posunutých shodných obdélníků (viz obrázek). Snažíme se odpálit míček (šedý bod ve středu úsečky) a dostat ho do jamky (modrý bod v ose obdélníku). Ukažte, že lze jamku trefit přímo (tzn. spojit dva body úsečkou ležící uvnitř útvaru), právě když lze jamku trefit pomocí právě dvou odrazů o svislé krajní stěny (tzn. jeden o pravou stěnu a jeden o levou).



BRKOS Team

ŘEŠENÍ.

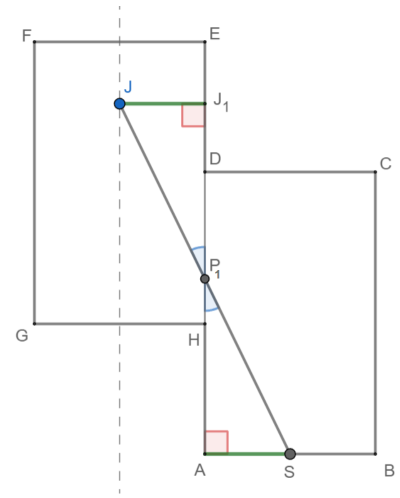
Popis 1. obrázku:
A, B, C, D, E, F, G, H - rohy minigolfového hřiště
S - počáteční pozice míčku
J - jamka
J_0 - pata kolmice z bodu J na stranu FG
X, Y - body odrazu
P_0 - průsečík trajektorií



Nejdříve se zaměřím na trasu míčku se dvěma odrazy. Podle věty *usu* jsou trojúhelníky SBX a JJ_0Y shodné:
1. $|SB| = |JJ_0| = \frac{|AB|}{2}$ (S je střed AB a J leží na (správné) ose shodného obdelníka)
2. $|\sphericalangle XBS| = |\sphericalangle YJ_0J|$ (pata kolmice a vrchol obdelníka)
3. $|\sphericalangle SXB| = |\sphericalangle JYJ_0|$ (úhel dopadu a úhel odrazu od rovnoběžných stran)

Proto tedy $|XS| = |YJ|$ a zároveň jsou tyto úsečky rovnoběžné (svírají s rovnoběžkami BC a FG stejný úhel). Čtyřúhelník $SXJY$ je tedy rovnoběžník a pro každý rovnoběžník platí, že se jeho úhlopříčky navzájem půlí: $|XP_0| = |YP_0|$ a $|SP_0| = |JP_0|$. Trajektorie míčku se tedy protnou v polovině obou cest.

Popis 2. obrázku:
A, B, C, D, E, F, G, H - rohy minigolfového hřiště
S - počáteční pozice míčku
J - jamka
J_1 - pata kolmice z bodu J na stranu DE
P_1 - průsečík SJ a AE



Pokud se zaměříme na trasu bez odrazů, můžeme si povšimnout, že trojúhelníky ASP_1 a J_1JP_1 jsou shodné podle věty *usu*:
1. $|SA| = |JJ_1| = \frac{|AB|}{2}$ (S je střed AB a J leží na (správné) ose shodného obdelníka)
2. $|\sphericalangle SAP_1| = |\sphericalangle JJ_1P_1|$ (pata kolmice a vrchol obdelníka)
3. $|\sphericalangle AP_1S| = |\sphericalangle J_1P_1J|$ (vrcholové úhly)

Ze shodnosti trojúhelníků tedy víme, že $|SP_1| = |JP_1|$. Body P_0 i P_1 jsou středem trasy SJ, proto tedy $P_0 = P_1$. Závěrem můžeme říct, že se trajektorie vždy protnou na úsečce AE. Pokud jejich průsečík leží na úsečce DH, jamku jde trefit, jak přímo, tak se dvěma odrazy, pokud jejich průsečík bude ležet mimo úsečku DH, tak jamku nelze trefit přímo a ani se dvěma odrazy o krajní stěny BC a FG.

BRKOS Team

ÚLOHA 1.D. Určete poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC se stranami a, b, c a úhly α, β a γ, když víte, že platí:

$$\left(\frac{1}{b}\right)(a + b\sin\gamma) - \frac{b}{a} = \frac{c^2 - 2b^2}{ab}$$
$$a^2 - b^2 + 80 = a(2a + b\sin\gamma)$$

ŘEŠENÍ. Postupnými ekvivalentními úpravami převedeme první rovnici na:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{b}\right)(a + b\sin\gamma) - \frac{b}{a} &= \frac{c^2 - 2b^2}{ab} && / \cdot ab \\ a^2 + ab\sin\gamma - b^2 &= c^2 - 2b^2 && / + 2b^2 \\ a^2 + b^2 + ab\sin\gamma &= c^2 \end{aligned}$$

a druhou rovnici na:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + 80 &= a(2a + b\sin\gamma) \\ a^2 - b^2 + 80 &= 2a^2 + ab\sin\gamma && / + b^2 - a^2 \\ 80 &= a^2 + b^2 + ab\sin\gamma \end{aligned}$$

Vidíme, že levá strana první rovnice a pravá strana druhé rovnice jsou stejné a tedy:

$$c^2 = 80$$
$$(c - \sqrt{80})(c + \sqrt{80}) = 0$$

Vzhledem k tomu, že c je délka strany trojúhelníku, tak $c > 0$ a tedy:

$$c = 4\sqrt{5}$$

Nyní když od první rovnice odečteme kosinovu větu ($a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2$) a dostaneme

$$\begin{aligned} -2ab\cos\gamma &= ab\sin\gamma && / : ab; \quad a > 0; b > 0 => ab \neq 0 \\ -2\cos\gamma &= \sin\gamma && / : \cos\gamma; \quad kdyby \quad \cos\gamma = 0; \quad pak \quad \sin\gamma \neq 0 \end{aligned}$$

A protože víme, že platí $\cos x^2 + \sin x^2 = 1$, tak $\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \sin\gamma^2}$ a tedy:

$$\begin{aligned} \pm 2\sqrt{1 - \sin\gamma^2} &= \sin\gamma && /^2 \\ 4(1 - \sin\gamma^2) &= \sin\gamma^2 && / + 4\sin\gamma^2 \\ 4 &= 5\sin\gamma^2 && / : 5 \\ \sin\gamma^2 &= \frac{4}{5} && /\sqrt{} \\ \sin\gamma &= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že γ je vnitřní úhel trojúhelníku, tak $\gamma \in (0, \pi)$ a tedy $\sin\gamma > 0$. Dostáváme:

$$\sin\gamma = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

BRKOS Team

Nyní použijeme sinovu větu, která říká, že $2r = \frac{c}{\sin\gamma}$ a tedy:

$$r = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{4\sqrt{5}}{2\frac{2\sqrt{5}}{5}} = 5$$

Poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC je tedy 5.

BRKOS Team