BRněnský KOrespondenční Seminář

XXIX. ročník

2022/2023

řešení 5. série

Nekonečné kloktání

úloha 5.1. Jeden umělec přišel dokonce se soustřednou soustavou potrubí. Začal s jednou trubkou (tzn. válcem) o poloměru průřezu 1, pak do ní vestavěl další o poloměru $\frac{1}{2}$ a se stejným středem, do ní trubku s poloměrem $\frac{1}{3}$ a tak dále. Tímto způsobem vyskládal potrubí s poloměry $\frac{1}{n}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Dokažte, že aby mohl své dílo protnout špejlí tak, aby procházela nekonečně mnoha trubkami, musel by špejli vést společným středem všech trubek.

řešení. Ze zadání máme nekonečně mnoho kružnic se společným středem S a poloměry $\frac{1}{n}$ pro každé přirozené číslo n. Důkaz bude mít dvě části:

1) Přímka p (špejle) vedená středem S protne všechny kružnice.

Důkaz tohoto tvrzení je jednoduchý: jistě pokud přímka prochází středem nějaké kružnice k, musí ji protnout. V našem případě máme přímku procházející středem všech kružnic (jsou soustředné), tedy protne všechny.

2) Přímka p (špejle), na níž S neleží, nemůže nikdy protnout všechny kružnice.

Označme vzdálenost bodu S od přímky p jako x. Jistě existuje bod $X \in p$ splňující $|XS| = x$ (tento bod je určen tím, že přímka XS je kolmá na p). Nyní zvolme nějaké racionální číslo y splňující $0 < y < x$, můžeme tedy psát $y = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$. Platí tak $\frac{1}{b} \leq \frac{a}{b} < x$. Existuje tedy převrácená hodnota přirozeného čísla, která je menší než vzdálenost S od p. Každá kružnice k se středem S a poloměrem $\frac{1}{n}$ pro $n \geq b$ tedy nemůže protínat p, jelikož pro body P na k platí $|PS| \leq \frac{1}{b}$ a pro body Q na p platí $|QS| \geq x > \frac{l}{b}$.

úloha 5.2. Naše mapa je rovina, v nichž máme zadaných n bodů značících přírodní památky. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho funkcí tvaru $y = f(x)$, kde $f(x)$ je polynom n-tého stupně, jejichž grafy se vyhnou zadaným bodům.

řešení. Řešení podle Pavla Hyánka:
Památky si převedeme do kartézské soustavy souřadnic, tzn. přiřadíme je k bodům $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, ..., $[x_n, y_n]$. Protože počet památek n je konečný, jsme schopni najít nejvyšší hodnotu z $y_1, y_2, ..., y_n$. Označme ji y_{max}. Nyní najdeme nejnižší hodnotu z $x_1, x_2, ..., x_n$ a tu označíme jako x_{min}. Polynomy, které nebudou procházet žádnou památkou, budou ve tvaru

$$f(x) = (x - x_{min})^n + y_{max} + a,$$

kde a je reálné kladné číslo. Nemusíme řešit paritu n, pro x z intervalu $[x_{min}, \infty)$ bude $f(x) > y_{max}$. Díky nekonečnosti reálných čísel jsme schopni takto vytvořit nekonečně mnoho polynomů.

úloha 5.3. Potrubín, hlavní město v Zemi potrubí, má kruhový tvar. Zaneseme ho do mapy jako kruh K a bodem P na jeho obvodu zaznačíme Potrubní centrálu. Potrubní trasy v tomto městě jsou zaznačeny jako pravidelné n-úhelníky V_n vepsané K pro každé $n \in \mathbb{N}$, a to tak, že jeden z vrcholů V_n je vždy Potrubní centrála, tedy bod P.

Aby měly přístup k potrubnímu systému, musí domy ve městě, opět zaznačeny body v kruhu K, ležet vždy uvnitř nějakého z mnohoúhelníků V_n. Pro které body kruhu K platí, že mohou označovat domy v Potrubíně?

Řešení. Nejprve dokážeme, že všechny vnitřní body kruhu leží v nějakém V_n. Předpokládejme, že kruh má poloměr 1, jeho střed označme E. Uvažujme libovolný bod d ležící uvnitř kruhu mimo hraniční kružnici. Označme d vzdálenost tohoto bodu od středu kruhu. Jistě $d \in \langle 0, 1)$. Všimněme si, že poloměr kružnice vepsané V_n je z pravoúhlého trojúhelníka roven $\cos \frac{\pi}{n}$. Ukážeme, že s rostoucím n se tento výraz zvětšuje a blíží k jedné.[1] Jinými slovy, pro každé číslo $d \in \langle 0, 1)$ chceme najít $n \in \mathbb{N}$ takové, že $d < \cos \frac{\pi}{n}$ (jistě $\cos \frac{\pi}{n} < 1$). Zvolme za n libovolné přirozené číslo n větší než $\frac{\pi}{\arccos d}$. Potom $\arccos d > \frac{\pi}{n}$ a jelikož funkce $y = \cos x$ je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, dostáváme $d = \cos(\arccos d) < \cos \frac{\pi}{n}$, což jsme chtěli.

To znamená, že pro každý bod D existuje V_n takové, že D leží uvnitř jeho kružnice vepsané, tedy i uvnitř V_n. Nyní se zaměříme na body na kružnici. Všimneme si, že každý vnitřní úhel ve V_n musí mít racionální hodnotu. Proto bod S ležící na kružnici, pro který platí, že velikost úhlu PES je iracionální (ve stupních) nemůže ležet na V_n. Dále uvažujme bod X, který má tento úhel racionální a napišme tento úhel jako $360° \cdot \frac{a}{b}$. Sestrojme pravidelný b-úhelník. Bod X je jeho vrcholem. Hledané body jsou tedy všechny vnitřní body a body na kružnici, s racionálním středovým úhlem.

Úloha 5.4. Pole si představme jako nekonečnou tabulku, která je neohraničená směrem dolů a doprava. Tudíž každému políčku můžeme přiřadit souřadnice (x, y), kde x a y jsou celá nezáporná čísla $(0, 1, 2, 3...)$.

Nyní všechna políčka spojíme do dvojic, ne nutně různých polí. Tedy můžeme spojit políčko (a, b) s políčkem (a, b). A každé políčko je právě v jedné dvojici. Dále platí, že políčko se souřadnicemi tvaru $(0, a)$ můžu dát do dvojice pouze s políčkem se souřadnicemi tvaru $(b, 0)$. A pokud je ve dvojici políčko (a, b) spolu s (c, d), pak je políčko $(a+c, b+d)$ ve dvojici samo se sebou. Zároveň pokud je nějaké políčko (e, f) spojeno samo se sebou, jsou spolu spojena krajní políčka $(e, 0)$ a $(0, f)$.

Ukažte, že v každém řádku a v každém sloupci existuje právě jedno políčko, které je ve dvojici samo se sebou.

Dále najděte všechna políčka, která mohou ve dvojici sama se sebou.

Řešení. Nejdříve ukážeme, že v každém řádku a existuje pole, které je ve dvojici samo se sebou. Uvažme pole $(a, 0)$, které je ve dvojici s polem $(0, b)$. Pak pole (a, b) je ve dvojici samo se sebou.

Předpokládejme, že existuje řádek, ve kterém jsou (alespoň) dvě pole ve svojici sama se sebou. Označme si je (a, b) a (a, c). Potom pole $(a, 0)$ je ve dvojici s $(0, b)$ i s $(0, c)$, což dává spor.

Jelikož v každém řádku je pole nejvýše jedno pole a zároveň alespoň jedno pole samo se sebou, pak v každém řádku je právě jedno pole samo se sebou. Analogicky ukážeme, že v každém sloupci je právě jedno pole samo se sebou ve dvojici.

[1] Přesněji, platí $\lim_{n\to\infty} \cos \frac{\pi}{n} = 1$.

Dále ukažme, že pole $(0,0)$ je ve dvojici samo se sebou. Jelikož $(0,0)$ je pole ve tvaru $(a,0)$, pak je ve dvojici s polem ve tvaru $(0,b)$. Jelikož $(0,0)$ je pole ve tvaru $(0,b)$, pak je ve dvojici s polem ve tvaru $(a,0)$. Jedinné pole ve tvaru $(a,0)$ i $(0,b)$ je pole $(0,0)$, tedy $(0,0)$ je ve dvojici samo se sebou. Podle předchozího pole tvaru $(a,0)$ a $(0,b)$ nemohou být ve dvojici sama se sebou pro kladná a a b.

Zbývá ukázat, že ostatní pole mohou být sama se sebou ve dvojici. Nechť a a b jsou libovolná kladná čísla. Sestrojíme konstrukci, kde pole (a,b) je ve dvojici samo se sebou. Pole $(0,0)$ je ve dvojici stamo se sebou. Pole $(x,0)$ je ve dvojici s $(0,a+b-x)$ pro $0 < x < a+b$, a $(x,0)$ je ve dvojici s $(0,x)$ pro $x \geq a+b$. Pole (x,y) je ve dvojici s $(a+b-x, a+b-x)$ pro $0 < x < a+b$ a $0 < y < a+b$. A nakonec pole (x,y) je ve dvojici s (y,x) pro $x > 0$ a $y > 0$, kde $x \geq a+b$ nebo $y \geq a+b$.

Následující tabulka znázorňuje předchozí konstrukci pro $a = 3$ a $b = 2$. V tabulce je pro každé políčko uvedené s kterým políčkem je ve dvojici.

$(0,0)$	$(4,0)$	$(3,0)$	$(2,0)$	$(1,0)$	$(5,0)$	$(6,0)$	$\dots$
$(0,4)$	$(4,4)$	$(3,4)$	$(2,4)$	$(1,4)$	$(5,1)$	$(6,1)$	$\dots$
$(0,3)$	$(4,3)$	$(3,3)$	$(2,3)$	$(1,3)$	$(5,2)$	$(6,2)$	$\dots$
$(0,2)$	$(4,2)$	$(3,2)$	$(2,2)$	$(1,2)$	$(5,3)$	$(6,3)$	$\dots$
$(0,1)$	$(4,1)$	$(3,1)$	$(2,1)$	$(1,1)$	$(5,4)$	$(6,4)$	$\dots$
$(0,5)$	$(1,5)$	$(2,5)$	$(3,6)$	$(4,5)$	$(5,5)$	$(6,5)$	$\dots$
$(0,6)$	$(1,6)$	$(2,6)$	$(3,6)$	$(4,6)$	$(5,6)$	$(6,6)$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Úloha 5.a. Máme kusy potrubí se dvěma konci, kde každý konec má 1 až n výstupů, kde n je zadané přirozené číslo. Pro každou dvojici (a,b) celých čísel od 1 do n máme právě jeden kus potrubí s a výstupy na jednom konci a b výstupy na druhém.

Jednotlivé kusy potrubí za sebe můžeme připojit jen ve chvíli, kdy mají oba volný konec se stejným počtem výstupů. Jaká mohla být hodnota n, pokud s využitím všech dílků dokážeme vytvořit uzavřený obvod (nebo cestu začínající a končící stejným počtem výstupů)?

Najděte všechna taková n.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že abychom mohli z potrubí vytvořit cyklus, na každý spoj potřebujeme dva konce se stejným počtem výstupů, a tedy celkový počet konců pro každý z počtů výstupů musí být sudý.

Pro libovolné n jsou dílky s koncem a právě $(1,a), (2,a), \dots, (a,a), \dots, (n,a)$, tedy dohromady máme n dílků s $n+1$ konci s a výstupy. Aby bylo $(n+1)$ sudé, musí být n liché.

Nyní indukcí dokážeme, že je opravdu možné sestavit okruh pro libovolné liché n. Báze: pro $n = 1$ máme jen jediný díl, a to $(1,1)$. To nám dává cestu začínající i končící stejným počtem výstupů (tedy 'cyklus'), čímž máme dokázáno pro $n = 1$. Indukční krok: předpokládejme, že dokážeme vytvořit cyklus pro n a dokažme, že pak dokážeme vytvořit cyklus i pro $n+2$. Oproti dílkům v cyklu pro n máme pro $n+2$ navíc dílky $(1,n+1), (2,n+1), \dots, (n,n+1)$, $(1,n+2), (2,n+2), \dots, (n,n+2)$, $(n+1,n+1)$, $(n+1,n+2)$, a $(n+2,n+2)$. Z těch vytvoříme cyklus $(1,n+1)(n+1,2)(2,n+2)(n+2,3)(3,n+1)\dots(n+2,n)(n,n+1)(n+1,n+$

$1)(n+1,n+2)(n+2,n+2)(n+2,1)$. Všimněte si, že je to možné (a můžeme si dovolit '...' v zápisu), neboť vždy dáváme za sebe dílky (lichý,$n+1$)($n+1$,sudý)(sudý,$n+2$)($n+2$,lichý) a n je liché. Původní okruh pro n nyní můžeme rozpojit ve spoji ,1)(1, a volžit do něj cyklus z nových dílků pro $n+2$, který také rozpojíme ve spoji ,1)(1,. Tím získáme cyklus pro $n+2$.

Kromě důkazu jsme také ukázali, jak konstruktivně vytvořit okruh pro libovolné liché n.

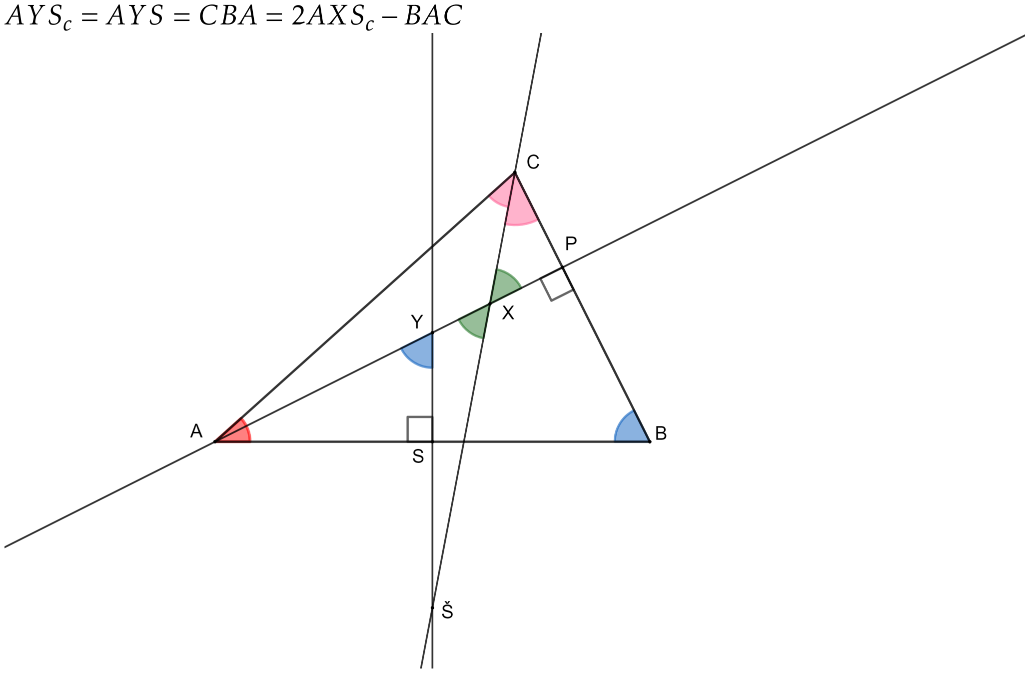
Pozn.: dalším možností je využít k řešení např. eulerovských grafů.

úloha 5.b. Mějme výstup tvaru ostroúhlého trojúhelníku ABC s délkami stran $c > b > a$. Průsečík v_a a osy úhlu ACB označíme X. Průsečík v_a a osy strany c označíme Y. Průsečík osy strany c a osy úhlu ACB označíme S_c.

V takovém případě potřebujeme dvě podpůrné příčky, jedna odpovídá výšce v_a a druhá prochází body Y a S_c.

Určete velikost úhlu mezi nimi, tedy úhlu AYS_c, v závislosti na velikostech úhlů BAC a AXS_c.

řešení. Úhly AXS_c a PXC jsou vrcholové, proto mají stejnou velikost. Dále víme, že součet úhlů v trojúhelníku je vždy 180°. Se znalostí velikostí úhlů PXC a XPC jsme schopni vyjádřit zbylý úhel:
$XCP = 180° - 90° - AXS_c = 90° - AXS_c$.
Toto je polovina úhlu BCA, proto:
$BCA = 180° - 2AXS_c$.
Pro trojúhelník ABC platí:
$CBA = 180° - BAC - ACB = 180° - BAC - 180° + 2AXS_c = 2AXS_c - BAC$
Následně si stačí povšimnout, že trojúhelníky ASY a APB jsou podobné podle věty *uu* ($PAB = YAS$, $APB = ASY = 90°$), proto i zbylé dva úhly mají stejnou velikost. Tedy:
$AYS_c = AYS = CBA = 2AXS_c - BAC$



BRKOS Team

úloha 5.c. Nechť p je liché prvočíslo. Mějme množinu M obsahující $\frac{(p-1)}{2}+1$ čísel. V této množině mějme číslo, které je násobkem p, a dalších $\frac{(p-1)}{2}$ čísel, které všechny dávají jiné zbytky po dělení p a nejsou dělitelné p. Dokažte, že ať si vezmeme libovolné přirozené číslo n, jsme schopni součtem dvou ne nutně různých čísel z množiny M dostat číslo, které dává po dělení p stejný zbytek jako n.

řešení. Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme, že existuje celé číslo a takové, že součet libovolných dvou (ne nutně různých) čísel z množiny M má jiný zbytek po dělení p než a.

Označme číslo v M dělitelné p jako o; dále položme $M^* = M \setminus \{o\}$. Nadále budeme se zbytky po dělení p pracovat pomocí tzv. kongruencí: pro celá čísla m, n píšeme $m \equiv n \pmod{p}$, právě když m dává stejný zbytek po dělení p jako n.

Jistě $a \notin M$; navíc pokud a' dává stejný zbytek po dělení p jako a, tak rovněž $a' \notin M$. Dále uvažujme číslo b takové, že $2b$ dává stejný zbytek po dělení p jako a. Toto číslo vždy existuje: jelikož p a 2 jsou nesoudělná, existují z Bezoutovy rovnosti celá čísla u, v taková, že $2u + pv = 1$. Tedy $2u \equiv 1 \pmod{p}$ a položíme-li $b = ua$, dostáváme, že $2b$ dává stejný zbytek po dělení p jako $2ua$, a tedy i jako a. Tedy $b \notin M$ a pokud pro $b' \in \mathbb{Z}$ platí $b' \equiv b \pmod{p}$, máme $b' \notin M$.

Pro přehlednost nyní zaveďme následující značení: pro celé číslo n definujme $\overline{n}$ jako celé číslo z množiny $\{0, 1, \dots, p-1\}$ splňující $n \equiv \overline{n} \pmod{p}$, tj. $\overline{n}$ dává stejný zbytek po dělení p jako n; jistě pro každé $n \in \mathbb{Z}$ takové $\overline{n}$ existuje právě jedno. Všimněme si, že budeme-li uvažovat $\overline{a}$ místo a, nic se nezmění, jelikož úloha je formulovaná pouze pro zbytky po dělení p. Tzn. pokud neplatí $x + y \equiv a \pmod{p}$ pro žádná $x, y \in M$, totéž je pravda i pro $\overline{a}$. Ze stejného důvodu můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že M obsahuje pouze čísla z množiny $\{0, 1, \dots, p-1\}$ (jelikož $x + y \equiv a \pmod{p}$, právě když $\overline{x} + \overline{y} \equiv a \pmod{p}$).

Uvažujme nyní, kolik existuje různých dvojic čísel $x, y \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ (na pořadí čísel nezáleží) splňujících $x + y \equiv a \pmod{p}$. Jednu z nich už jsme našli: je to dvojice $\overline{b}, \overline{b}$. Vybereme-li nyní libovolné x ze zbývajících $p-1$ čísel od 0 do $p-1$, dostaneme, že je ve dvojici s jediným číslem, a to $\overline{a-x}$; opravdu, z definice máme $x + \overline{a-x} \equiv x + a - x = x \pmod{p}$. Tedy těchto $p-1$ čísel se nám rozdělí do $\frac{p-1}{2}$ různých dvojic (jelikož na pořadí sčítanců nám nezáleží). Započítáme-li i dvojici $\overline{b}, \overline{b}$, získáváme $\frac{p-1}{2} + 1 = \frac{p+1}{2}$ možných dvojic. Žádná takováto dvojice nemůže ležet v M, jinak bychom dostali spor. Už jsme ukázali, že $\overline{a}, \overline{b} \notin M$, tedy dvojice $0, \overline{a}$ a dvojice $\overline{b}, \overline{b}$ v M neleží. Zbývá tedy $\frac{p+1}{2} - 2 = \frac{p-3}{2}$ možných dvojic čísel z množiny $\{0, 1, \dots, p-1\}$, jejichž součet dává stejný zbytek po dělení p jako a. Z každé této dvojice musí v M ležet nejvýše jeden prvek (jinak nastane spor). Na druhou stranu, každé nenulové číslo z M se v nějaké takovéto dvojici vyskytuje. Tedy v M musí ležet nejvýše $\frac{p-3}{2} + 1 = \frac{p-1}{2}$ čísel. Ovšem M má ze zadání $\frac{p-1}{2} + 1$ prvků a dostáváme spor.

úloha 5.d. Jedním ze vzorců pro míchání je $b^2 = a^2 + c^2 - 2act$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou reálná množství daných tří surovin a $0 < t < 1$ je parametr určující typ výsledné směsi. Aby nám směs držela pohromadě, potřebujeme, aby platilo $(a + b + c)^2 > 2\pi ac\sqrt{1 - t^2}$. Dokažte, že to platí pro všechny typy $0 < t < 1$ a všechna kladná reálná a, b, c.

řešení. Všímavý řešitel jistě v zadání zpozoroval kosinovou větu o trojúhelníku. Chtěli bychom ukázat, že pokud máme čtyři čísla a, b, c, t splňující rovnost v zadání, pak bude existovat nějaký vhodný trojúhelník s délkami svých stran právě a, b, c. Poté bychom mohli tuto rovnici interpretovat jako kosinovou větu pro trojúhelník s délkami stran a, b, c. Předpokládejme tedy nyní, že $a, b, c \in \mathbb{R}^+, t \in (0,1)$ a platí rovnost $b^2 = a^2 + c^2 - 2act$.

Pokud by platilo, že $b \geq a + c$, pak $b^2 \geq a^2 + c^2 + 2ac > a^2 + c^2 - 2act$, tedy požadovaná rovnost nemůže být splněna. Kdyby naopak $a \geq b + c$, pak $a - c \geq b$ a $a^2 + c^2 - 2ac \geq b^2$, tedy $a^2 + c^2 - 2act > b^2$ a rovnost opět nemůže být splněna. Případ $c > a + b$ je symetrický, vidíme tedy, že pokud by v alespoň jednom ze tří případů byla porušena trojúhelníková nerovnost, nemohla by platit zadaná rovnice. Zjistili jsme tedy, že pokud platí rovnice $b^2 = a^2 + c^2 - 2act$, musí platit trojice trojúhelníkových nerovností $a+b > c, a+c > b, b+c > a$. Tudíž jsou čísla a, b, c opravdu délkami stran vhodného trojúhelníka.

Využijme nyní znalosti kosinové věty. Víme, že pro délky stran trojúhelníka a, b, c musí platit $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos(\beta)$. Můžeme tedy položit $t = cos(\beta)$. Požadovaná nerovnost, kterou máme dokázat, se nyní zjednoduší na $(a + b + c)^2 > 2\pi acsin(\beta)$, jelikož platí známý vztah $sin^2(\beta) + cos^2(\beta) = 1$, tedy $|sin(\beta)| = \sqrt{1 - cos^2(\beta)}$. Protože je ale $t = cos(\beta) \in (0,1)$, musí platit, že $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a na tomto intervalu je funkce sinus kladná, tedy můžeme psát $sin(\beta) = \sqrt{1 - cos^2(\beta)}$ a naše úprava je korektní.

Můžeme si všimnout, že na pravé straně nerovnosti nám nyní vystupuje vzorec pro obsah trojúhelníka. Platí totiž, že $S = \frac{1}{2}acsin(\beta)$. Nerovnost si tedy můžeme ekvivalentně přepsat na $(a + b + c)^2 > 4\pi S$. Pokud si označíme polovinu obvodu jako s, pak můžeme psát $(2s)^2 > 4\pi S$, což je ekvivalentní s nerovností $s^2 > \pi S$. Pokud by se nám podařilo tuto nerovnost dokázat pro libovolný trojúhelník, což bude nyní naším cílem, je úloha vyřešena.

Potřebujeme dostat do souvislosti polovinu obvodu s a obsah trojúhelníka S. K tomu nám poslouží Heronův vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníka, který říká, že

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Pokusme se nyní získat požadovanou nerovnost pomocí A-G nerovnosti. A-G nerovnost pro libovolná dvě kladná reálná čísla a, b říká, že platí nerovnost $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Za použití této nerovnosti jsme schopni upravit Heronův vzorec následujícím způsobem: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s(s-a)} \cdot \sqrt{(s-b)(s-c)} \leq \frac{s+(s-a)}{2} \cdot \frac{(s-b)+(s-c)}{2} = \frac{1}{4} \cdot (2s-a) \cdot (2s-b-c) \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{(2s-a)+(2s-b-c)}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{4}$. Odvodili jsme tedy, že platí nerovnost $s^2 \geq 4S$. Protože je $4 > \pi$, musí nutně platit i nerovnost $s^2 > \pi S$, což jsme chtěli dokázat. Tvrzení úlohy nyní plyne přímo z dokázané nerovnosti.

BRKOS Team