BRněnský KOrespondenční Seminář

XXIX. ročník

2022/2023

řešení 4. série

Geometrické nerovnosti

úloha 4.1. Na vstupních dveřích visí trojúhelníková cedule. V jejím vnitřku (ne v žádném z vrcholů ani na hraně) je zatlučený háček. Háček je spojený provázkem se dvěma vrcholy cedule tak, že háček a tyto dva vrcholy tvoří trojúhelník. Dokažte, že obvod tohoto „provázkového" trojúhelníku bude vždy menší než obvod cedule, ať už háček zatlučeme kamkoliv.

řešení. Vrcholy trojúhelníkové cedule si BÚNO označme A,B, C. Zatlučený háček představuje vnitřní bod H trojúhelníku ABC. Průsečík přímky AH a úsečky BC označme D. Chceme dokázat:

$$|AB| + |BC| + |CA| > |AB| + |AH| + |BH|$$

Po odečtení dostaneme:

$$|BC| + |CA| > |AH| + |BH|$$

Nyní využijeme následujících trojúhelníkových nerovností:

$$|HD| + |BD| > |HB|$$

$$|AC| + |CD| > |AD| = |AH| + |HD|$$

Po jejich sečtení dostaneme:

$$|HD| + |BD| + |AC| + |CD| > |HB| + |AH| + |HD|$$

V tuto chvíli můžeme odečíst od obou stran:

$$|BD| + |AC| + |CD| > |HB| + |AH|$$

Platí ale $|BD| + |CD| = |BC|$, dostáváme tedy nerovnost: $|AC| + |BC| > |HB| + |AH|$, což jsme chtěli dokázat.

úloha 4.2. Střed kružnice vepsané libovolného trojúhelníku leží uvnitř kružnice opsané. Dokažte toto na první pohled zřejmé tvrzení.

řešení. Řešení podle Josefa Sourala: Označme O střed kružnice opsané, r její poloměr a V střed kružnice vepsané.

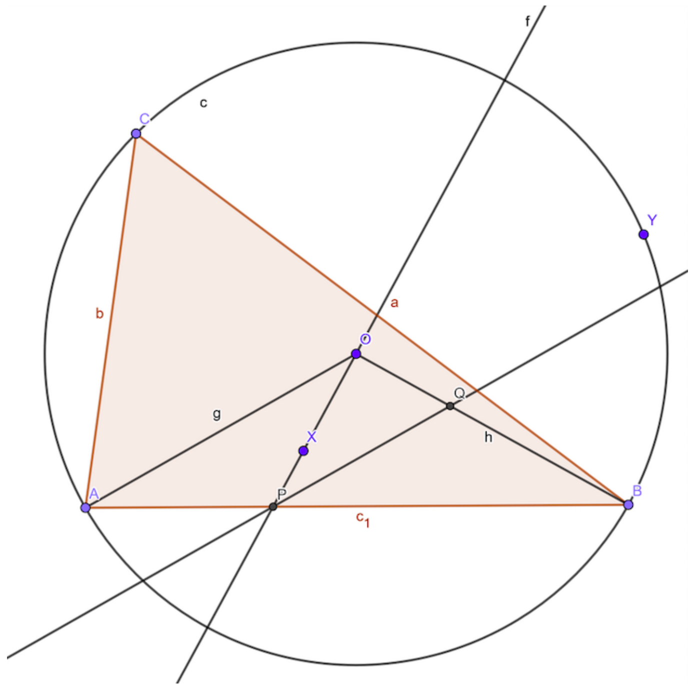
Nejdříve ukážeme, že všechny vnitřní body trojúhelníku $\triangle ABC$ leží uvnitř kružnice opsané. Uvažme libovolný bod X ležící uvnitř trojúhelníku $\triangle ABC$. Polopřímka $\overrightarrow{OX}$ pak protíná obvod $\triangle ABC$ alespoň v jednom bodě. Vzdálenější bod od O pojmenujme P. Jelikož $|OX| < |OP|$, stačí ukázat $r \geq |OP|$.

Bez újmy na obecnosti bod P leží uvnitř strany AB. (Pro ostatní strany je důkaz analogický a pokud je bod P totožný s nějakým z vrcholů, máme hned $r = |OP| > |OX|$.) Bodem P veďme rovnoběžku k OA, která protíná přímku OB v bodě Q. Trojúhelníky $\triangle OAB$ a $\triangle PQB$ jsou podobné podle věty *uu*, jelikož úhly $\sphericalangle OBA$ a $\sphericalangle QBP$ jsou totožné a úhly

$\sphericalangle AOB$ a $\sphericalangle PQB$ jsou souhlasné. Dostáváme tedy $|PQ| = |QB|$. Z trojúhelníkové nerovnosti dostáváme $|OP| < |OQ| + |QP| = |OQ| + |QB| = |OB| = r$.

Ukážeme, že střed kružnice vepsané V leží uvnitř trojúhelníku $\triangle ABC$. Kružnice se dotýká úsečky AB. Leží v polorovině ABC, nebo k ní opačné. Jelikož se dotýká také úsečky AC, tak musí kružnice vepsaná ležet v polorovině ABC. Její střed leží v polorovině ABC, ale ne na hraniční přímce. Analogicky se ukáže, že V leží v polorovinách ACB a BCA. Proto bod V leží uvnitř trojúhelníku $\triangle ABC$.

Jelikož V leží uvnitř trojúhelníku $\triangle ABC$ a každý vnitřní bod je vnitřní bod kružnice opsané trojúhelníku $\triangle ABC$ leží bod V uvnitř kružnice opsané.



úloha 4.3. Vzor tvoří tři kružnice, které se protínají v jednom bodě uvnitř trojúhelníku spojujícího jejich středy. Na vybarvení vzoru byly použity tři barvy - jedna pro plochy mimo kružnice, druhá pro plochy uvnitř právě jedné z nich, a třetí pro plochy uvnitř právě dvou z nich, tedy v průniku dvou kružnic. Ukažte, že víc barev potřeba nebylo, tedy že neexistuje bod, který by ležel ve vnitřku všech tří kružnic.

řešení. Společný průsečík všech tří kružnic označme P, středy kružnic k_1, k_2, k_3 označme popořadě A, B, C. Předpokládejme, že takový bod existuje, označme si ho V. A nyní si řešení rozdělme na dvě možnosti.

První možnost je, že bod leží uvnitř trojúhelníku tvořeného středy kružnic. Můžeme ho spojit s vrcholy tohoto trojúhelníku a nyní bude platit, že obsah tohoto trojúhelníku můžeme napsat jako součet obsahů těch tří trojúhelníků, co nám takto vzniknou. Nyní porovnejme obsahy trojúhelníků ABP a ABV. Tyto dva trojúhelníky mají společnou stranu AB. Zároveň ale platí, že V leží uvnitř k_1, tudíž $|AV| < |AP|$, protože $|AP|$ je poloměr. Stejně tak platí, že $|BV| < |BP|$. Z toho plyne, že obsah trojúhelníků ABV je menší než obsah trojúhelníku ABP. Analogicky to platí i pro dvojice trojúhelníků ACV, ACP a BCV a ACP; dostáváme tedy $ABV + ACV + BCV < ABP + ACP + BCP$. Ale to je spor, protože levá i pravá strana této nerovnosti vyjadřují obsah trojúhelníku ABC.

Druhá možnost je, že by bod V ležel mimo trojúhelník ABC. Potom když opět spojíme bod V s body A, B, C, dostaneme znovu tři trojúhelníky ABV, ACV a BCV. Nicméně tentokrát by dokonce muselo platit, že součet jejich obsahů musí být větší než než obsah ABC, který si můžeme napsat jako součet ABP, ACP a BCP. Nicméně V má být pořád uvnitř všech tří kružnic, tudíž pořád platí nerovnosti $|AV| < |AP|$, $|BV| < |BP|$ atd. Tudíž trojúhelníky ABV, ACV, BCV jsou (postupně) menší než ABP, ACP,BCP, tudíž součet jejich obsahů nemůže být větší než obsah ABC.

Bod V tedy nemůže existovat.

Úloha 4.4. Tento kaleidoskop má kukátko, ve kterém se při každém otočení objeví jiný útvar. Pro každý takový útvar platí, že jeho každé dva body mají od sebe vzdálenost nejvýše 1. Zároveň pokud je nějaký bod vzdálen nejvýše 1 od každého bodu v útvaru, pak je v útvaru také obsažen. Ukažte, že při žádných dvou otočeních neuvidíme stejný útvar; tedy že existuje nekonečně mnoho nepodobných útvarů, které se mohou v kaleidoskopu ukázat.

Řešení. V tomto vzorovém řešení bych chtěl přibližně nastínit myšlenkové postupy, které by potenciálního řešitele mohly navést ke správnému řešení. Pro přehlednost si označme obě podmínky na hledané množiny čísly: číslem (1) budu značit podmínku, že každé dva body od sebe mají vzdálenost nejvýše jedna. Číslem (2) budu označovat podmínku na maximalitu, tedy že pro každý bod vzdálen nejvýše jedna od každého bodu v útvaru platí, že je v útvaru obsažen. (Mimochodem, tato podmínka je ekvivalentní tvrzení, že pro libovolný bod, který není obsažen v útvaru platí, že od nějakého bodu z útvaru má vzdálenost větší než jedna.)

Na začátek udělejme pár pozorování. Chtěli bychom zjistit, jak útvar vyhovující zadání vůbec může vypadat. Představme si tedy nějakou množinu náhodně rozházených bodů v rovině. První pozorování je, že kdyby se v této množině nacházely dva body, které by měly vzdálenost větší než jedna, automaticky by nám byla porušena podmínka (1). Odteď tedy předpokládejme, že v naší množině mají každé dva body vzdálenost nejvýše jedna.

Zopakujme si nyní definici konvexnosti. Rovinný útvar je konvexní, pokud s každými dvěma svými body obsahuje i úsečku jimi určenou. Víme, že průnik libovolných konvexních útvarů musí být také konvexní útvar. Proč? Uvažme dva body z tohoto průniku. Oba musí být obsaženy v každém z pronikaných útvarů, jinak by se v průniku neocitly. Protože každý z pronikaných útvarů je konvexní, obsahuje i úsečku určenou těmito dvěma body. Protože tuto úsečku obsahuje každý z pronikaných útvarů, musí být obsažena i v jejich průniku. Proto průnik konvexních útvarů musí obsahovat s každými svými dvěma body i úsečku mezi nimi, a tedy splňuje definici konvexnosti.

Vraťme se k naší původní úvaze. Nyní si v naší množině bodů vyberme libovolné dva význačné body. Víme, že oba dva mají vzdálenost nejvýše jedna od všech ostatních bodů v útvaru, i od sebe navzájem. To znamená, že kdybychom v každém bodu z útvaru kromě našich dvou význačných bodů sestrojili kružnici s poloměrem 1, budou naše význačné body oba ležet v každé z těchto kružnic. To není nic jiného, než že budou ležet v průniku všech těchto kružnic. Víme (tak nějak intuitivně, dá se samozřejmě dokázat, ale to není předmětem této úlohy), že kružnice je konvexní útvar. Proto musí být (podle předchozí úvahy) i průnik libovolných kružnic konvexní útvar. To znamená, že průnik všech kružnic bude s našimi dvěma význačnými body obsahovat i úsečku mezi nimi. Tedy víme, že každý bod na této úsečce má vzdálenost nejvýše jedna od všech ostatních bodů naší množiny. Od obou význačných bodů má vzdálenost nejvýše jedna, jelikož tyto body jsou od sebe vzdáleny nejvýše jedna a tento bod leží na úsečce mezi nimi. A od všech ostatních bodů má vzdálenost nejvýše jedna, jelikož leží v průniku kružnic, které mají poloměr 1 a středy ve všech těchto ostatních bodech množiny.

Co nám tyto úvahy říkají? Představme si množinu bodů, která splňuje podmínku (1). Dokázali jsme, že aby byla splněna i podmínka (2), musí tato množina nutně s každými svými dvěma body obsahovat i úsečku mezi nimi. To je ale přesně konvexnost! Tedy najednou se nám začíná rýsovat představa o tom, jak budou naše hledané množiny vypadat.

Tady si dovolím menší odbočku. Pokud si někteří z vás množinu splňující podmínku (1) představovali jako množinu disjunktních bodů (označme například X), můžou být teď mírně zmateni. Když přece k množině X přidám úsečku mezi každými dvěma body z této množiny, nezaručuje mi to, že vznikne konvexní útvar! Je to pravda. Nicméně jsme dokázali, že pokud útvar splňující podmínku (1) nebude konvexní, tedy nebude obsahovat nějaký bod z úsečky mezi dvěma jeho body, nemůže splňovat podmínku maximality (2). Tedy konvexnost je nutná pro to, aby nějaký útvar splnil podmínky ze zadání. V případě množiny disjunktních bodů X by se to vyřešilo tak, že v prvním kroku přidáme mezi každé dva body útvaru i úsečku mezi nimi. Vznikne větší množina. Ve druhém kroku uděláme úplně to stejné s touto větší množinou. Pokud tento proces "zkonvexování"provedeme dostatečně mnohokrát, vznikne nám konvexní útvar, kterému říkáme konvexní obal množiny X. Ekvivalentně se dá charakterizovat jako průnik všech konvexních množin, které obsahují množinu X. Má zajímavé uplatnění ve fyzice - těleso položené na rovnou zem je ve stabilní poloze, právě když kolmý průmět jeho těžiště na zem je obsažen v konvexním obalu množiny opěrných bodů tělesa (bodů, ve kterých těleso přijde do styku se zemí).

Ještě, než se pustíme do hledání útvarů ze zadání, zavedeme následující pojem, který nám později pomůže: Nechť $r \in \mathbb{R}^+$. O nějakém rovinném útvaru řekneme, že je r-konvexní, jestliže každé dva jeho body A, B mají vzdálenost nejvýše $2r$ a zároveň tento útvar obsahuje s každými dvěma svými různými body A, B i průnik obou kruhů, které jsou ohraničeny kružnicemi s poloměrem r procházejícími body A, B. Pokud mají dva body A, B vzdálenost právě $2r$, musí daný útvar obsahovat celý kruh s průměrem AB.

Vidíme hned, že r-konvexnost je silnější podmínka, než běžná konvexnost. Platí zřejmě, že každý r-konvexní útvar je konvexní. Dokažme nyní na první pohled zřejmé tvrzení, že kruh s poloměrem r je r-konvexní.

Cílem je tedy dokázat, že kruh s poloměrem r obsahuje s každými dvěma svými body i průnik obou kruhů, které mají poloměr r a jejichž hraniční kružnice těmito body prochází. Pro přehlednost budeme dále v textu označovat tento průnik jako r-bublinku určenou dvěma body A, B.

Nejprve zvažme případ, kdy oba body A, B vybereme na kružnici ohraničující původní kruh. Z definice je r-bublinka určená těmito dvěma body průnikem dvou kruhů s poloměrem r, jejichž hraniční kružnice prochází oběma těmito body. Ale jeden z těchto kruhů je přímo náš původní kruh. Tedy r-bublinka určená dvěma body na hranici kruhu je průnikem tohoto kruhu s jiným kruhem. Nutně musí být tedy podmnožinou původního kruhu.

Uvažme tedy případ, kdy alespoň jeden z bodů A, B leží uvnitř kruhu s poloměrem r. Pak sestrojíme jednu z hraničních kružnic s poloměrem r, která prochází oběma body A, B. Musí se s kružnicí ohraničující původní kruh protnout ve dvou bodech. Tyto body určí r-bublinku, označme ji X, která podle předchozího bodu bude náležet do původního kruhu. Stejný proces provedeme s druhou kružnicí s poloměrem r, která prochází body A, B, a získáme tak druhou r-bublinku, označme ji Y, která náleží do původního kruhu. Body A, B určují r-bublinku, která bude průnikem r-bublinek X a Y. Jelikož r-bublinky X a Y leží v původním kruhu, bude jejich průnik také ležet v původním kruhu. Tedy celkem bude r-bublinka určená libovolnými dvěma body kruhu s poloměrem r ležet v tomto kruhu, a proto je kruh s poloměrem r r-konvexní.

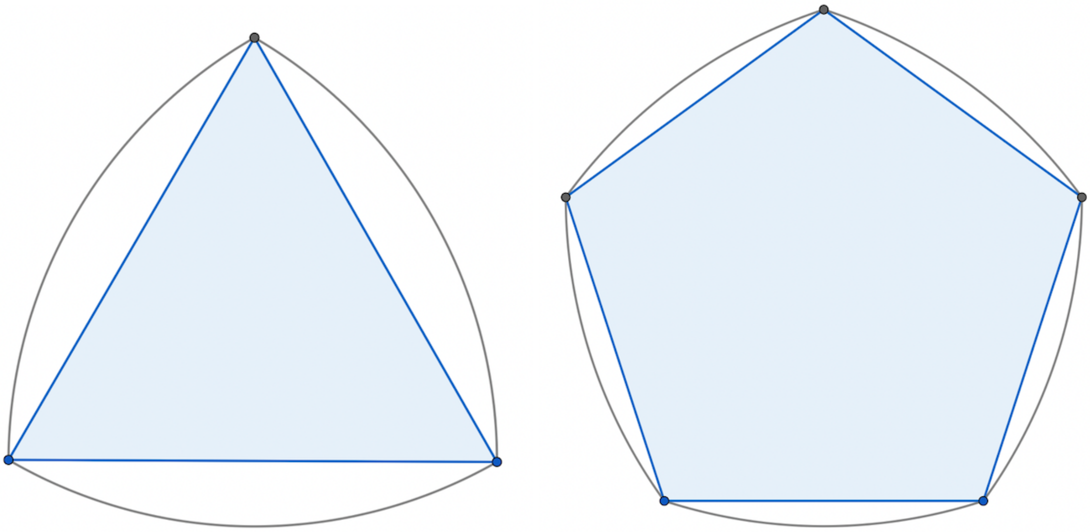
Vraťme se ke hledání útvarů ze zadání. Nyní už víme, že hledané útvary musí být konvexní. Pozor - nestačí pouze, aby útvar splňoval podmínku (1) a byl konvexní - představte si čtverec o délce strany třeba $\frac{1}{4}$, ten určitě nesplňuje podmínku maximality (2). Podmínka konvexnosti za předpokladu (1) je tedy pouze nutná, nikoliv dostačující. Vybaveni předchozími znalostmi přemýšlejme, jak může vypadat konvexní množina vyhovující zadání. Po chvilce přemýšlení nás může napadnout následující konstrukce:

Uvažujme pravidelný $(2n+1)$-úhelník, kde $n \in \mathbb{N}$, přičemž délka jeho nejdelší úhlopříčky je rovna jedné. Můžeme jeho vrcholy označit cyklicky jako $A_0A_1 \dots A_{2n}$. Sestrojme $(2n+1)$ kružnic tak, že mají středy ve vrcholech A_i, poloměr roven jedné a leží na nich vrcholy A_{i+n}, A_{i+n+1} (samozřejmě indexy bereme modulo $(2n+1)$). Velikost úsečky A_iA_{i+n} je rovna jedné, jelikož je právě nejdelší úhlopříčkou v tomto $(2n+1)$-úhelníku. Přesvědčme se, že útvar vzniklý průnikem kruhů ohraničených těmito $(2n+1)$ kružnicemi bude splňovat podmínky ze zadání.

Nejprve maximalita (2). Uvažme libovolný bod A ležící mimo popsanou množinu. To znamená, že neleží v průniku všech popsaných kruhů. Tedy existuje kruh, od jehož středu má daný bod vzdálenost větší než jedna. Ale střed tohoto kruhu patří do naší popsané množiny, tedy bod A nemůže patřit do naší množiny. Podmínka maximality je tedy dokázána.

Nyní vzdálenosti bodů. Vyberme si libovolný bod našeho útvaru. Ten musí mít jistě vzdálenost od všech vrcholů pravidelného $(2n+1)$-úhelníka nejvýše jedna, jelikož leží v průniku kružnic s poloměry jedna a středy v právě těchto vrcholech. To znamená, že sestrojíme-li kruh s poloměrem 1 v tomto vyznačeném bodě, pak bude obsahovat všechny vrcholy pravidelného $(2n+1)$-úhelníka. Protože je kruh konvexní útvar, bude obsahovat i konvexní obal těchto $(2n+1)$ bodů, což je přesně celý $(2n+1)$-úhelník. Zbývá ukázat, že tento kruh bude obsahovat i části sestrojeného útvaru, které neleží uvnitř pravidelného $(2n+1)$-úhelníka. Ale my víme, že kruh s poloměrem 1 je 1-konvexní. Tedy musí s každými dvěma body obsahovat i 1-bublinku jimi určenou. Zejména musí tento kruh obsahovat i 1-bublinky určené každými dvěma sousedními vrcholy pravidelného $(2n+1)$-úhelníka. Ale sjednocení všech těchto bublinek a pravidelného $(2n+1)$-úhelníka nám dává celý útvar, tedy kruh musí obsahovat celý útvar! A protože kruh s poloměrem 1 sestrojený v libovolném bodě daného útvaru obsahuje celý útvar, platí, že každá dvojice bodů v tomto útvaru má vzdálenost nejvýše 1. Podmínka (1) je tedy dokázána.

Pro různá $n \in \mathbb{N}$ budou výsledné útvary jistě nepodobné, jelikož budou ohraničeny různými počty kružnicových oblouků. Zároveň tato konstrukce funguje pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, kterých je nekonečně mnoho, tedy i hledaných útvarů bude nekonečně mnoho. Na obrázku jsou příklady těchto útvarů pro $n = 1$ a $n = 2$.



ÚLOHA 4.A. Prostírání má tvar čtverce a je sestavené z menších čtvercových částí, všech stejné velikosti. Dá se mimo jiné přestavět na obdélníkové, které má jednu stranu o 6 dílků delší, než druhou. Kolik dílků má strana původního čtvercového prostírání? Najděte všechna možná řešení.

ŘEŠENÍ. Řešíme rovnici $a^2 = b(b+6)$.

$$\begin{aligned} a^2 &= b(b+6) \\ a^2 &= b^2 + 6b \\ a^2 &= (b+3)^2 - 9 \\ (b+3)^2 - a^2 &= 9 \\ (a+b+3)(b-a+3) &= 9 \end{aligned}$$

Součin dvou celých čísel dá číslo 9. Nejprve si všimněme, že číslo $a+b+3$ je kladné, proto hledáme součin dvou přirozených čísel. Dále si všimněme, že číslo $a+b+3$ je ostře větší než číslo $b-a+3$. Hledaná dvojice tedy musí být $(9,1)$. Dostaneme tedy dvě rovnice:

$$\begin{aligned} a+b+3 &= 9 \\ -a+b+3 &= 1 \end{aligned}$$

Vyřešením dostaneme $(a,b) = (4,2)$. Původní čtverec má tedy délku strany 4.

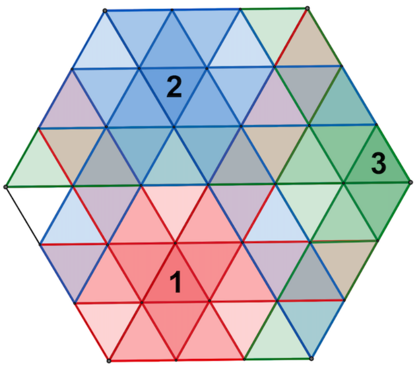
ÚLOHA 4.B. Opěradlo židle je složeno ze čtyř čtverců pošitých látkou. Dokažte, že každé tehdy koupitelné (tedy celočíselné) množství látky jde rozdělit do čtyř čtverců s celočíselnou hranou (jinými slovy dokažte, že každé nezáporné celé číslo umíme napsat jako součet čtyř druhých mocnin celých čísel).
Úloha sama o sobě není snadná, ale pokud využijete skutečnost, že každé nezáporné celé číslo umíme napsat jako součet tří druhých mocnin celých čísel právě tehdy, když nelze rozložit na součin $4^r(8k+7)$ pro žádné přirozené r a k, určitě to zvládnete :).

BRKOS Team

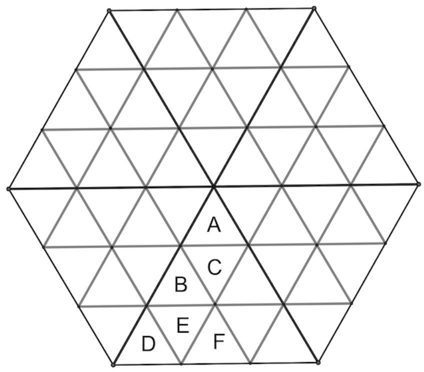
ŘEŠENÍ. Prvně se podíváme na čísla n taková, která nelze vyjádřit ve tvaru $4^r(8k+7)$, pro $r,k \in \mathbb{N}$. Ze zadání víme, že tato čísla lze zapsat jako součet tří druhých mocnin celých čísel $a^2+b^2+c^2$. Jako součet čtyř druhých mocnin je tedy zapíšeme jednoduše jako $a^2+b^2+c^2+0^2$.
Zbývá nám tedy vyřešit čísla $n = 4^r(8k+7)$, pro $r,k \in \mathbb{N}$. Vidíme, že všechna tato čísla jsou dělitelná čtyřmi, číslo $n-1$ čtyřmi dělitelné jistě není, tj. lze zapsat jako součet tří druhých mocnin celých čísel $a^2+b^2+c^2$. Číslo n lze tedy zapsat jako $a^2+b^2+c^2+1^2$.

ÚLOHA 4.C. Hra má tvar pravidelného šestiúhelníku sestaveného z 54 trojúhelníkových dílků. K hrací desce patří i vyřezávané figurky, které se dají umisťovat na jednotlivé dílky. V pravidlech hry je psáno, že každá z nich 'pokrývá' všechny dílky v řadách, ve kterých stojí, i všechny sousedící alespoň rohem (viz nákres). Z hrací desky v tomto obchodě se časem jeden z dílků ztratil, má jich tedy jen 53. Kolik nejméně figurek byste potřebovali umístit, aby pokryly všechny neztracené dílky? Umístění ztraceného dílku si můžete zvolit sami.

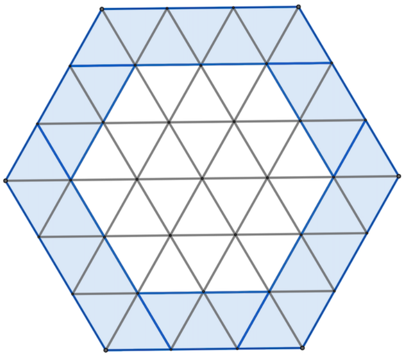
ŘEŠENÍ. Hrací plochu bez jednoho dílku jde pokrýt třemi figurkami viz obrázek.



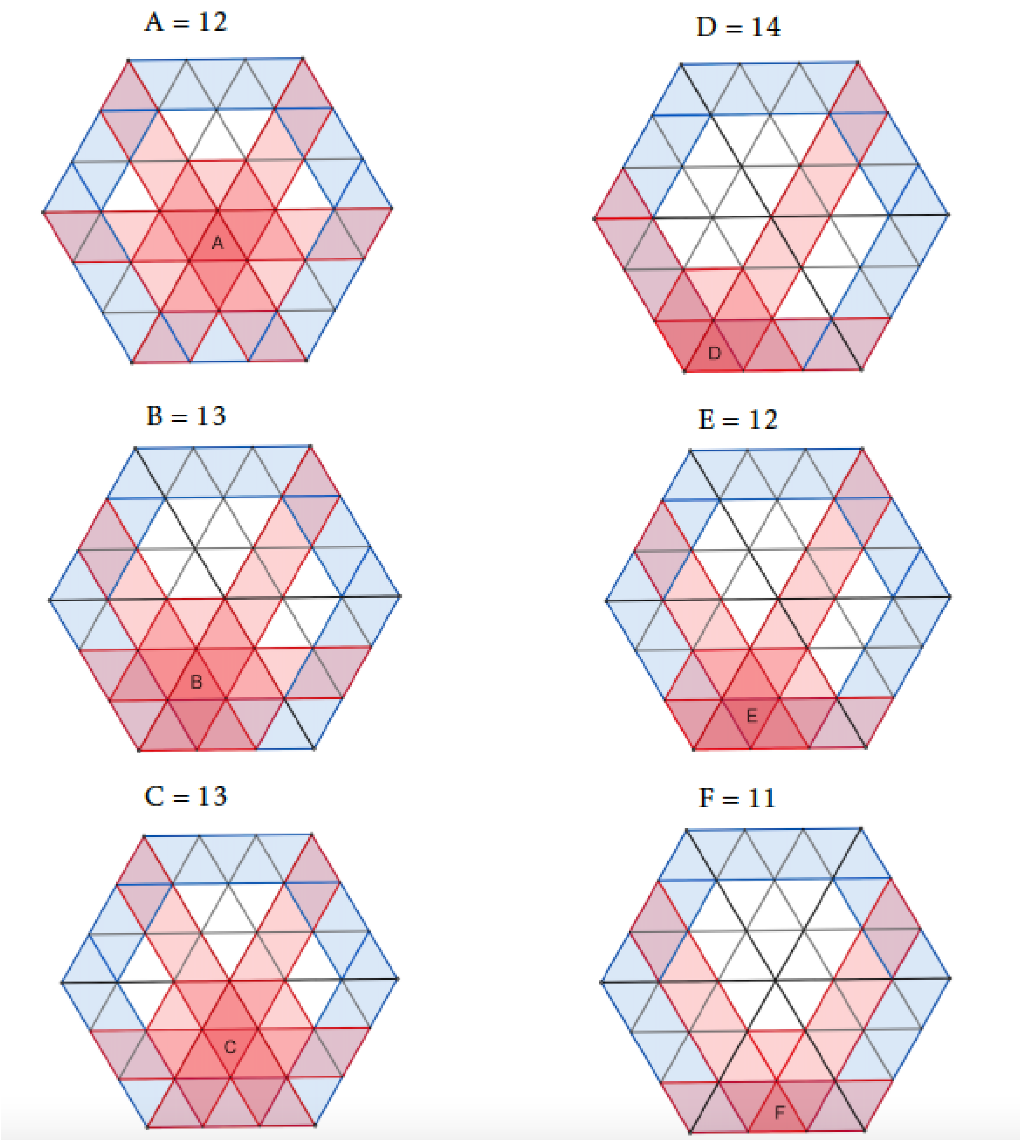
Teď stačí dokázat, že to nejde pokrýt jednou a dvěmi figurkami a máme hotovo. Nejdříve si povšimněme, že na hracím poli je pouze šest polí takových, že když na ni figurku postavíme, bude zakrývat odlišný počet polí.



Figurka na pozici A zakryje nejvíce polí, konkrétně 31 a to nestačí ($31 < 53$). Jedna figurka tedy pole nepokryje.
Dále budeme zkoumat pouze 30 polí po okraji.



Z těchto 30 polí bychom potřebovali překrýt alespoň 29 polí (ztracený dílek by byl na okraji). Zjistíme, kolik polí na kraji zakrývá figurka postavená na dané pozici A,B,C,D,E a F.



BRKOS Team

Nejvíce okrajových polí pokryje figurka na pozici D a to 14. Pokud by obě figurky stály na pozici D, 29 krajních polí nezakryjí. Zakrývají $14 + 14 = 28$ polí, přitom některé z nich se navíc překrývají (je pole, které je pokryto oběma figurkami), takže celkový počet pokrytých polí je vždy dokonce menší než 28.

ÚLOHA 4.D. Skříňka je na vrchní straně označená prvočíslem, označme ho p, a skládá se z přihrádek očíslovaných postupně všemi přirozenými čísly k nesoudělnými s p^3 menšími než p^3. V přihrádce s číslem k je tolik předmětů, kolik je nezáporných řešení rovnice

$$kx \equiv x \pmod{p^3}$$

menších než p^3. Určete počet předmětů v celé skříňce.

Poznámka pro řešitele, co nerozumí uvedené rovnici: nezoufejte, jedná se pouze o zjednodušený zápis tvrzení „kx dává stejný zbytek jako x po dělení p^3“.

ŘEŠENÍ. K vyřešení této úlohy využijeme tzv. Eulerovu funkci, která se značí ϕ. Ta pro libovolné přirozené číslo n určí, kolik existuje přirozených čísel menších než n, která jsou s n nesoudělná. (Nesoudělnost dvou přirozených čísel m, n znamená, že čísla m, n nemají kromě 1 žádného jiného společného dělitele, tedy že 1 je jejich největší společný dělitel, což značíme $(m, n) = 1$.) Například triviálně máme, že 1 je nesoudělná s libovolným jiným přirozeným číslem n, jelikož největší společný dělitel $(1, n) = 1$.

Zkusme si nejprve spočítat Eulerovu funkci pro nějaké prvočíslo p. Víme, že každé prvočíslo má právě dva dělitele - jedničku a sebe samo. Kdyby mělo být s nějakým jiným přirozeným číslem n soudělné, muselo by prvočíslo p také dělit číslo n. Žádného jiného společného dělitele kromě jedničky mít nemohou, protože p žádného jiného netriviálního dělitele kromě p nemá. Proto musí být se všemi čísly menšími než ono samo nesoudělné - prvočíslo p totiž nemůže dělit žádné číslo menší než p. Získáváme tedy, že $\phi(p) = p - 1$.

Dále spočtěme hodnotu Eulerovy funkce pro nějakou mocninu prvočísla, například p^k. Abychom zjistili, kolik existuje čísel menších jak p^k, která jsou s p^k nesoudělná, stačí od p^k odečíst všechna čísla menší nebo rovna p^k s ním soudělná. To budou všechna čísla, která jsou dělitelná prvočíslem p. Když si představíme čísla od 1 do p^k zapsaná do řady, je lehké se přesvědčit, že dělitelné prvočíslem p bude každé p-té číslo, a celkem jich tedy bude $\frac{p^k}{p} = p^{k-1}$. Celkem získáváme, že $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1} \cdot (p - 1)$.

Pusťme se do řešení samotné úlohy. Víme, že celkem máme $\phi(p^3) = p^2(p-1)$ přihrádek ve skříni. Upravme si kongruenci na tvar $(k - 1)x \equiv 0 \pmod{p^3}$. Nyní postupně rozebereme všechny případy podle toho, jaký je největší společný dělitel čísel p^3 a $k - 1$, a přihrádky ve skříni si tak přehledně rozdělíme do čtyř disjunktních skupin.

Uvažme nejprve případ, kdy $(p^3, k - 1) = p$. Poté se dá číslo k zapsat jako $k = ap + 1$, kde $(a, p^3) = 1$. Víme, že a nesmí být větší než p^2, aby k nebylo větší než p^3, a také $(a, p^3) = 1$. Takovýchto a bude existovat právě $\phi(p^2) = p(p-1)$. Tudíž bude existovat $p(p-1)$ přihrádek s tou vlastností, že $(p^3, k - 1) = p$. Pro každou z těchto přihrádek bude existovat právě $p - 1$ přirozených čísel x menších než p^3, která budou splňovat kongruenci $(k - 1)x \equiv 0 \pmod{p^3}$ - budou to právě přirozená čísla menší než p^3, která jsou násobky p^2. Protože nás ale zajímají nezáporná řešení rovnice, je potřeba započítat i nulu. Celkem tedy tyto přihrádky přičtou do výsledného součtu $p(p - 1) \cdot [(p - 1) + 1] = p(p - 1) \cdot p = p^2(p - 1)$.

Dále uvažme případ, kdy $(p^3, k-1) = p^2$. Stejnou úvahou jako v předchozím bodě zjistíme, že takovýchto k menších než p^3 existuje $p-1$, tedy máme $p-1$ přihrádek s touto vlastností. Pro každou z nich (opět podobně jako v předchozím bodě) bude existovat p^2-1 přirozených čísel menších než p^3, která budou splňovat kongruenci $(k-1)x \equiv 0 \pmod{p^3}$ - budou to právě přirozená čísla menší než p^3, která jsou násobky p. Opět nesmíme zapomenout na nulu - celkem tedy tyto přihrádky přičtou do výsledného součtu $(p-1)\cdot[(p^2-1)+1] = (p-1)\cdot p^2 = p^2(p-1)$.

Nyní uvažme případ, kdy $(p^3, k-1) = p^3$. Takové k bude existovat pouze jedno, a to $k=1$. Pro hodnotu $k=1$ budou všechna nezáporná celá čísla menší než p^3 řešit kongruenci $(k-1)x \equiv 0 \pmod{p^3}$, tedy celkem tento případ do výsledného součtu přispěje p^3 předmětů.

Nakonec zvažme případ, kdy $(p^3, k-1) = 1$. Skříň celkem obsahuje $\phi(p^3) = p^2(p-1)$ přihrádek. Stačí nám od tohoto počtu tedy odečíst všechny přihrádky, které jsme již v předchozch třech případech započítali. Těchto přihrádek tedy bude existovat celkem $p^2(p-1) - p(p-1) - (p-1) - 1$. Kongruenci $(k-1)x \equiv 0 \pmod{p^3}$ v tomto případě bude splňovat jediné nezáporné celé číslo menší než p^3, a to nula. Tyto přihrádky tedy do výsledného součtu přispějí $p^2(p-1) - p(p-1) - (p-1) - 1$.

Je jasné, že pro číslo přihrádky k žádný jiný případ, než čtyři výše zmíněné, nemůže nastat. Stačí nám tedy pouze sečíst dílčí mezivýsledky jednotlivých případů a získáváme, že celkem bylo v celé skříňce $p^2(p-1)+p^2(p-1)+p^3+p^2(p-1)-p(p-1)-(p-1)-1 = 4(p^3-p^2)$ předmětů.

BRKOS Team