BRněnský KOrespondenční Seminář

XXIX. ročník
2022/2023

ŘEŠENÍ 3. SÉRIE

p-VALUACE

ÚLOHA 3.1. Nechť p, q jsou prvočísla. Určete (v závislosti na p a q) nejvyšší mocninu p takovou, že dělí výraz $(p^q + q)(q^p + p)$.

(**PŮVODNÍ ZADÁNÍ:** Klárka hraje hru pro maximálně $(p^q + q)(q^p + p)$ hráčů, kde p, q jsou prvočísla. V prvním kole přizve ke hře $p - 1$ dalších orgů. V každém kole přizve každý ze současných hráčů $(p - 1)$ svých kamarádů. Kolik kol budou hrát (tedy kolikrát mohou takto zvýšit počet hráčů)?)

ŘEŠENÍ. Hledáme p-valuaci výrazu $(p^q + q)(q^p + p)$. Úlohu si rozdělím na dva případy:

1. $p \neq q$
   $v_p[(p^q + q)(q^p + p)] = v_p(p^q + q) + v_p(q^p + p)$
   Pro (p^q+q) i (q^p+p) je vždy jeden ze sčítanců dělitelný p a druhý ne, proto $v_p(p^q+q) = 0$ a $v_p(q^p + p) = 0$. $v_p[(p^q + q)(q^p + p)] = 0 + 0 = 0$; nejvyšší mocnina p dělící výraz $(p^q + q)(q^p + p)$ když $p \neq q$ je nultá mocnina.

2. $p = q$
   $v_p[(p^q + q)(q^p + p)] = v_p[(p^p + p)(p^p + p)]$
   $(p^p + p)(p^p + p) = p^2(p^{p-1} + 1)^2$
   Závorka $(p^{p-1}+1)$ není dělitelná p, proto $v_p[(p^q+q)(q^p+p)] = v_p(p^2)+v_p((p^{p-1}+1)^2) = 2+0 = 2$. Nejvyšší mocnina p dělící výraz $(p^q+q)(q^p+p)$ když $p = q$ je druhá mocnina.

Odpověď je tedy nultá mocnina v případě $p \neq q$ a druhá mocnina v případě $p = q$.

ÚLOHA 3.2. Tonda rád riskuje, a tak si každý pátek zajde do hazardní herny. V rohu tam stojí automat s tlačítky očíslovanými 0 až $p-1$, kde p je prvočíslo. V každém herním kole náhodně zobrazí na obrazovce číslo N. Tonda pak vymačká posloupnost $N + 2$ tlačítek (označme ji $k_{-1}, k_0 \dots, k_N$, kde k_i má hodnotu i-tého zmáčknutého tlačítka), na základě které automat rozhodne, zda vydá výhru. Po uplacení programátora automatu zjistil, že výhru vydá právě tehdy, když

$$v_p\left(\frac{1}{p} + \sum_{n=-1}^{N} k_n \cdot p^n\right) = N + 1.$$

Poraďte mu strategii v závislosti na N.

ŘEŠENÍ. Označme si $S = \frac{1}{p} + \sum_{n=-1}^{N} k_n p^n$. Jestliže $v_p(S) = N + 1$, znamená to, že existuje celé číslo a nesoudělné s p takové, že $S = ap^{N+1}$. Především tedy S musí být celé číslo: rozepíšeme-li si $S = \frac{1}{p} + \frac{k_{-1}}{p} + \sum_{n=0}^{N} k_n p^n$, kde zbývající suma je zjevně celočíselná, dostaneme, že $\frac{1+k_{-1}}{p}$ musí být celé číslo. Jelikož $k_{-1} \in \{0, \dots, p-1\}$, nutně $k_{-1} = p - 1$. Tedy $S = 1 + \sum_{n=0}^{N} k_n p^n$.

Nyní indukcí ukážeme, že všechna k_n musí být rovna $p - 1$. Pro $n = -1$ jsme to již ukázali. Předpokládejme, že nyní tvrzení platí pro všechna $n \in \{-1, 0, \dots, n_0\}$, kde $n_0 < N$, a ukážeme, že tvrzení platí i pro n_0+1. Upravme si naše S:

$$\begin{aligned}
S &= 1 + \sum_{n=0}^{n_0}(p-1)p^n + \sum_{n=n_0+1}^{N} k_n p^n \\
&= 1 + (p-1)(1+p+\cdots+p^{n_0}) + \sum_{n=n_0+1}^{N} k_n p^n \\
&= 1 + (p-1)\cdot\frac{p^{n_0+1}-1}{p-1} + \sum_{n=n_0+1}^{N} k_n p^n \\
&= p^{n_0+1} + \sum_{n=n_0+1}^{N} k_n p^n
\end{aligned}$$

(V úpravách jsme použili vzorec pro součet členů geometrické posloupnosti.) Pokud $n_0+1<N$, máme

$$S = (1+k_{n_0+1})p^{n_0+1} + p^{n_0+2}\sum_{n=n_0+2}^{N} k_n p^{n-n_0-2}.$$

Jelikož zároveň $S = ap^{N+1}$, což je výraz dělitelný p^{n_0+2}, musí p^{n_0+2} dělit i výraz $(1+k_{n_0+1})p^{n_0+1}$. To je ovšem možné jen tehdy, pokud $p|(1+k_{n_0+1})$, tedy nutně $k_{n_0+1}=p-1$.

Pokud $n_0+1=N$, dostaneme $S=(1+k_N)p^N$. Aby tento výraz byl roven ap^{N+1}, musí být $1+k_N$ dělitelné p, a tedy opět $k_{n_0+1}=k_N=p-1$.

Tím jsme dokončili důkaz indukcí. Poznamenejme, že existuje alternativní argument[1], který ovšem vychází z toho, že už máme tip, že řešení je $k_n=p-1$. Totiž pokud si za pro všechna n dosadíme $k_n=p-1$, dostaneme

$$\frac{1}{p} + (p-1)\sum_{n=-1}^{N} p^n = \frac{1}{p} + (p-1)\cdot\frac{p^{N+2}-1}{p(p-1)} = p^{N+1}.$$

Tedy pokud pro nějaké n platí $k_n<p-1$, máme $S<p^{N+1}$, což je ale spor: p^{N+1} je nejmenší číslo s p-valuací $N+1$.

Úloha 3.3. Prvočíselný počet řešitelů BrKoSu hraje hru, která obsahuje x červených a y žlutých výherních žetonů, kde x,y jsou lichá celá čísla. Celkem je v banku $x^{10}-x^8y^2-x^2y^8+y^{10}$ žetonů, hraje se na několik kol. V každém kole jeden z hráčů vyhraje a vezme si k sobě *přesně* $\frac{p-1}{p}$-násobek žetonů aktuálně v banku, p značí počet hráčů. Hra končí ve chvíli, kdy v banku zbude počet žetonů nedělitelný p. Pro každé možné p určete nejmenší počet kol, který hra může mít.

Řešení. Počet žetonů v banku si označíme jako X. Po prvním kole v banku zůstane $\frac{X}{p}$ žetonů. Aby bylo tedy první kolo odehráno, musí být X dělitelné naším prvočíslem p. Po druhém kole bude v banku $\frac{X}{p^2}$ a po n-tém kole $\frac{X}{p^n}$ žetonů. Hledáme, kolik kol lze minimálně odehrát, tzn. $v_p[x^{10}-x^8y^2-x^2y^8+y^{10}]$. Tento výraz si upravíme:

[1] přebírám od Danči Strnadové :)

$$v_p[x^{10}-x^8y^2-x^2y^8+y^{10}] = v_p[(x+y)^2(x-y)^2(x^2+y^2)(x^4+y^4)] = \\ = 2v_p(x+y)+2v_p(x-y)+v_p(x^2+y^2)+v_p(x^4+y^4)$$

Můžeme si všimnout, že když nyní dosadíme $x = p$ a $y = 1$, dostaneme:

$$2v_p(p+1)+2v_p(p-1)+v_p(p^2+1)+v_p(p^4+1) = 0$$

Vidíme tedy, že nemusí být odehráno ani jedno kolo, tedy minimálně lze odehrát 0 kol. Toto platí pro všechna prvočísla $p > 2$. Pro $p = 2$ to musíme vyřešit zvlášť, protože x a y jsou ze zadání lichá.

Označme si tedy $x = 2k+1$ a $y = 2l+1$. Nyní se postupně koukneme na 2-valuace $v_2(x+y)$, $v_2(x-y)$, $v_2(x^2+y^2)$, $v_2(x^4+y^4)$.

$$v_2(x+y) = v_2(2k+2l+2) = 1+v_2(k+l+1) \\ v_2(x-y) = v_2(2k-2l) = 1+v_2(k-l)$$

Můžeme si všimnout, že vždy právě jedno z čísel $k+l+1$ a $k-1$ bude dělitelné dvěma. (Pokud jsou obě sudá nebo obě lichá, bude $k-l$ sudé, pokud je jedno liché a druhé sudé, bude to naopak.) Tedy $2v_2(x+y)+2v_2(x-y) \geq 6$.

$$v_2(x^2+y^2) = v_2(4k^2+2k+4l^2+2l+2) = 1+v_2(2k^2+k+2l^2+l+1) \\ v_2(x^4+y^4) = v_2(16k^4+32k^3+24k^2+8k+16l^4+32l^3+24l^2+8l+2) = \\ 1+v_2(8k^4+16k^3+12k^2+4k+8l^4+16l^3+12l^2+4l+1)$$

Nyní když budou mít k a l stejnou paritu (tzn. budou buď obě sudá, nebo obě lichá), bude $v_2(x^2+y^2) = 1$ a $v_2(x^4+y^4) = 1$. Pokud budou mít k a l různou paritu, tato hodnota se nezmenší. Minimální hodnota výrazu $= 2v_2(x+y)+2v_2(x-y)+v_2(x^2+y^2)+v_2(x^4+y^4)$ bude tedy 8.

Pokud bude tedy počet hráčů 2, odehraje se minimálně 8 kol a pokud bude počet hráčů vyšší, nemusí se odehrát žádné kolo.

Úloha 3.4. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n$ jsou přirozená. Označme $X = [(a_1,a_2),(a_2,a_3),\ldots,(a_n,a_1)]$, $Y = ([a_1,a_2],[a_2,a_3],\ldots,[a_n,a_1])$; kde $(b_1,\ldots,b_n)$ značí největší společný dělitel a $[b_1,\ldots,b_n]$ nejmenší společný násobek.
Martin s Vítkem hrají hru. Martin zvolí číslo n a Vítek pak čísla $a_1,\ldots,a_n$. Martin vyhraje pokud $X|Y$ nebo $Y|X$. Najděte všechna taková n, že když je Martin zvolí, určitě vyhraje bez ohledu na čísla $a_1,\ldots,a_n$ vybraná Vítkem.

Řešení. Pro $n = 1$ jistě $X = Y$, tedy vyhraje Martin. Stejně tak zvítězí v případě $n = 2$: tady totiž dostaneme $X = (a_1,a_2)$ a $Y = [a_1,a_2]$, a tedy $X|Y$. Předpokládejme tudíž dále $n > 2$.

Ukážeme, že pro $n > 2$ Martin vyhraje, právě když n bude liché. Nechť nejprve $n > 2$ je sudé. Ukážeme konkrétní příklad, kdy vyhraje Vítek[2]: volme $a_1 = 9, a_2 = 6$, $a_3 = a_5 = \cdots =$

[2] Příklad je převzatý z řešení Viktory Goly :)

$a_{n-1} = 1$, $a_4 = a_6 = \cdots = a_n = 2$. Potom:

$$X = [(9,6),(1,2),\ldots,(1,2)] = [3,1,\ldots,1] = 3,$$
$$Y = ([9,6],[1,2],\ldots,[1,2]) = (12,2,\ldots,2) = 2.$$

Jelikož dvojka a trojka jsou čísla nesoudělná, Vítek vítězí.

Nyní předpokládejme, že $n > 2$ je liché. Ukážeme sporem, že vždy Y dělí X, a tedy vyhrává Martin. Z části 3 Věty 1 ve studijňáku víme, že $Y|X$, právě když pro každé prvočíslo p platí $v_p(Y) \leq v_p(X)$. Pro spor tedy budeme předpokládat, že existuje prvočíslo p a číslo $k \in \mathbb{N}$ takové, že $v_p(Y) \geq k$, $k > v_p(X)$. Ze studijního textu můžeme odvodit pro libovolné prvočíslo p následující rovnosti:

$$v_p(X) = \max(v_p((a_1,a_2)),\ldots,v_p((a_n,a_1))) = \max(\min(v_p(a_1),v_p(a_2)),\ldots,\min(v_p(a_n),v_p(a_1))),$$
$$v_p(Y) = \min(v_p([a_1,a_2]),\ldots,v_p([a_n,a_1])) = \min(\max(v_p(a_1),v_p(a_2)),\ldots,\max(v_p(a_n),v_p(a_1))).$$

Předpokládejme, že z našich n čísel $a_1,\ldots,a_n$ má nadpoloviční většina – tedy alespoň $\frac{n+1}{2}$ – p-valuaci větší nebo rovnu k. Potom ovšem v alespoň jedné z dvojic $(a_1,a_2),\ldots,(a_n,a_1)$ budou obě čísla mít p-valuaci větší nebo rovnu k (pokud by bylo v každé dvojici nejvýše jedno, bylo by jich nejvýše $\frac{n}{2}$, jelikož dvojic je n a každé číslo je ve dvou dvojicích). Označme si tato čísla jako a_i, a_{i+1}; potom $v_p(X) \geq \min(v_p(a_i), v_p(a_{i+1}) \geq k$, což je spor s naším předpokladem.

V opačném případě má nadpoloviční většina čísel $a_1,\ldots,a_n$ p-valuaci menší než k, tedy v alespoň jedné z dvojic $(a_1,a_2),\ldots,(a_n,a_1)$ jsou dvě čísla s p-valuací menší než k. Označme si tato čísla jako a_j, a_{j+1}. Potom $v_p(Y) \leq \max(v_p(a_j,a_{j+1})) < k$, což je opět spor s naším předpokladem.

Celkem tedy dostáváme, že Martin zvítězí, právě když je n liché nebo rovno dvěma.

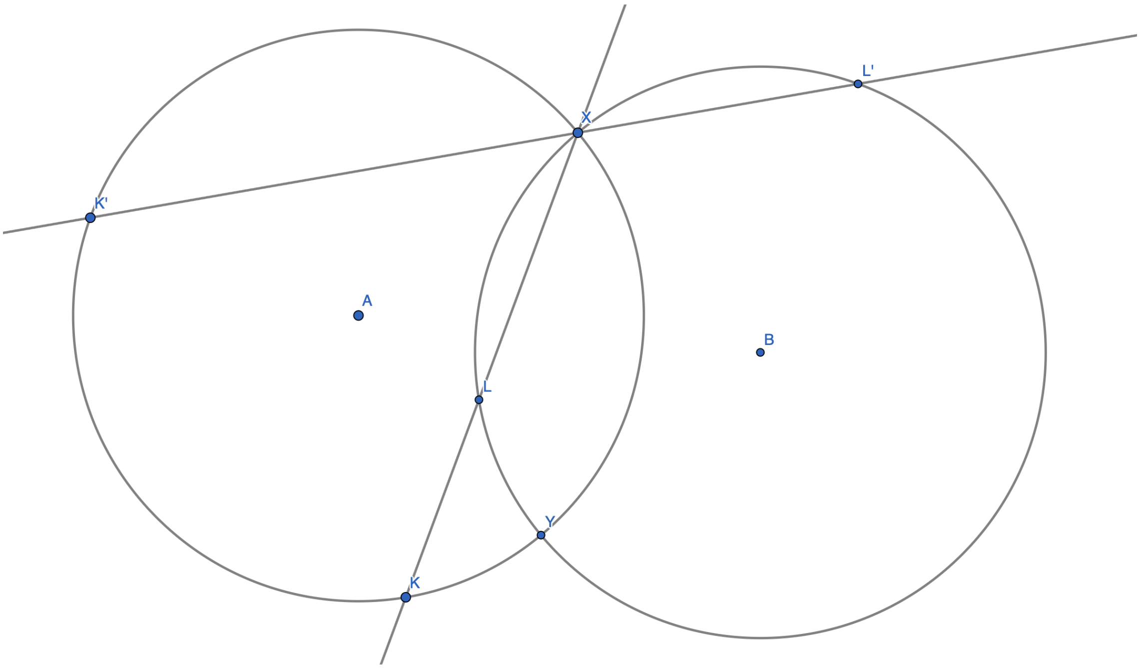
Úloha 3.a. Dalibor navrhuje hru. Na herním plánu má 2022 bazénů. Chtěl by mezi nimi nakreslit tobogány tak, že se dá z každého dojet soustavou tobogánů do jakéhokoli jiného. Je ale líný a nechce se mu kreslit více než musí. Kolik nejméně tobogánů musí nakreslit? (Pozn. tobogány jsou jednosměrné.)

Řešení. Bazény si očíslujeme 1 až 2022. Vzhledem k tomu, že jsou tobogány jednosměrné, musí do každého z bazénů vést alespoň 1 tobogán (jinak se do něj prostě není jak dostat). Dolní limit pro počet tobogánů je tedy 2022. Pokusme se dokázat, že je to též hledaná hodnota a to nalezením konkrétního řešení. Poměrně jednoduše nás může napadnout, že z tobogánů lze vytvořit cyklus - z každého bazénu číslo n povede tobogán do bazénu číslo $n+1$ a z bazénu 2022 opět do bazénu 1.

Můžeme se takto dostat z bazénu 1 opět do bazénu 1, přičemž při tom projdeme všechny bazény. Úloha je hotova, musíme vytvořit nejméně 2022 tobogánů.

Úloha 3.b. Matyáš vymyslel hru s poněkud komplikovaným herním polem, které potřebuje větví vyrýsovat do písku. Má však k dispozici jen poměrně malé volejbalové hřiště, a proto potřebuje určit, zda se mu zamýšlený tvar pole na hřiště vleze. Chce vytvořit dvě kružnice se stejným poloměrem $k(A,r)$, $l(B,r)$ protínající se v bodech X a Y, přičemž velikost $|XY|$ je 27. Následně povede tečnu ke kružnici k procházející bodem X, která zároveň dle jeho požadavku musí procházet bodem B. Poté si zvolí libovolnou přímku p, která prochází bodem X a nejedná se o tečnu ke k ani k l. Označí průsečík k a p různý od X jako K a průsečík l a p různý od X jako L. Jaká je největší možná hodnota $|XK| \cdot |XL|$, kterou výběrem přímky p mohl získat? Své tvrzení dokažte.

Řešení. Spousta z vás zapomněla uvážit všechny různé polohy přímky p. Ukažme nyní, že to není potřeba.



Nechť přímka p prochází vnitřkem úhlu AXB. poté body K i L leží na stejné polopřímce např. XK. Zobrazme bod K v osové souměrnosti podle osy AX a bod L v osové souměrnosti podle osy BX. Protože osy AX, BX prochází středy kružnic k, l, zobrazí se body K, L opět po řadě na kružnice k, l. Navíc víme, že AX je kolmé na BX, protože BX je tečnou ke kružnici k. Tedy polopřímka XK rozdělí pravý úhel AXB na dva úhly, AXK a LXB. Velikosti těchto úhlů i délky úseček XK, XL budou v osové souměrnosti zachovány; není pak těžké si rozmyslet, že bod X a obrazy bodů K, L v osových souměrnostech budou všechny ležet na jedné přímce. Tedy jsme ukázali, že pokud přímka p prochází úhlem AXB, pak je možné body K a L osově zobrazit tak, že velikosti $|KX|$, $|LX|$ zůstanou zachované a zároveň budou tvořit s bodem X přímku. Tato situace přesně odpovídá průnikům nějaké přímky p, která neprochází úhlem AXB, s kružnicemi k, l Tedy obě dvě situace, které ze zadání mohou vyplynout, jsou naprosto shodné a je možné zaměřit se jen na jednu z nich. Zabývejme se dále touto druhou situací, kdy p neprochází úhlem AXB.

Uvažme přímku v libovolné poloze popsané výše. Úhly XKY a XLY budou mít vždy stejnou velikost, a to 45°, jelikož jsou obvodovými úhly k tětivě XY. Jejich hodnotu lze zjistit z toho, že středový úhel příslušný tětivě XY je 90° (ověření tohoto tvrzení už nechám na vás). Z tohoto plyne, že ať umístíme přímku p kamkoliv, vzniklý trojúhelník KYL bude vždy pravoúhlý rovnoramenný, a takový je pouze jeden, tedy všechny si budou podobné.

Ať umístím přímku p jakkoliv, bude platit, že vzdálenost bodů K, L může být nejvýše 54. Body K, L totiž vždy s bodem Y tvoří pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník, jehož délka přepony je jednoznačně určena délkou jeho odvěsny. Délka jeho odvěsny může v našem případě být nanejvýš $\sqrt{2} \cdot 27$, což je průměr kružnice k, tedy celkem největší délka úsečky KL může být $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 27 = 54$

Nyní využiji další pomocné tvrzení, jehož ověření opět nechám na vás (snadno plyne např. z AG nerovnosti). Mám-li dvě proměnné x, y s konstantním součtem $x + y = c$, pak výraz $x \cdot y$ nabývá maxima právě tehdy, když je $x = y = \frac{c}{2}$, tedy maximem je hodnota $\left(\frac{c}{2}\right)^2$. Pro libovolnou polohu přímky p je tedy vzdálenost bodů K, L nanejvýš 54, a tedy je součin délek XK, XL nanejvýš $\left(\frac{54}{2}\right)^2 = 27^2$.

Našli jsme horní mez výrazu $|XK| \cdot |XL|$, která platí pro všechny námi uvažované polohy přímky p, tedy $|XK| \cdot |XL| \leq 27^2$ pro libovolnou polohu přímky p. Zbývá ukázat, že taková přímka p, pro kterou platí $|XK| \cdot |XL| = 27^2$, existuje, což jste všichni zvládli sami. :)

Úloha 3.c. Skupinka malých bobrů si ráda hraje v říční deltě a staví v ní hráze. V deltě se řeka několikrát rozdělí na místech nazývaných větvení. Na prvním větvení se řeka rozdělí na dva menší toky. Každý z těchto toků se po jedné bobří míli (tedy v druhém větvení) rozdělí na tři ještě menší toky. Obecně dále platí, že na lichých větveních se řeka rozděluje na dvě části a na sudých větveních na tři. Na každém rozvětvení má každý z nových toků šanci $\frac{1}{2}$, že na něm bobři postaví hráz a řeku tak zahradí. Jaká je pravděpodobnost, že po sedmé úrovni rozvětvení bude dále pokračovat alespoň jeden tok řeky?

Řešení. Na začátek bylo důležité si uvědomit, že pravděpodobnosti pokračování jednotlivých toků nejsou nezávislé. Zadání si také můžeme zjednodušit tím, že nebudeme počítat přímo pravděpodobnost, že bude pokračovat alespoň jeden tok (což by intuitivně znamenalo sčítat pravděpodobnosti pro jeden a více), ale že nám stačí vypočítat pravděpodobnost P_z, že nebude pokračovat ani jeden. Výsledek pak získáme jako $P = 1 - P_z$.

Nejjednodušší je začít s výpočtem od konce, tedy od sedmého větvení. Víme, že pokud už voda doteče až na sedmé větvení, pak nebude žádný z toků pokračovat s pravděpodobností 1/4 (máme 4 možnosti: potečou oba, pouze levý, pouze pravý, nebo žádný z nich). Stejné rozložení platí pro libovolné liché větvení. Obdobně pro sudá větvení máme, že s 1/8 budou pokračovat všechny, s 3/8 právě dva, s 3/8 právě jeden a s 1/8 žádný.

Označme si pravděpodobnost zastavení všech toků na konkrétním větvení sedmé úrovně P_{z7}. Pravděpodobnost zastavení všech toků předchozí (tedy šesté, sudé) úrovně, bude $P_{z6} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4^3} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cdot P_{z7} + \frac{3}{8} \cdot P_{z7}^2 + \frac{1}{8} \cdot P_{z7}^3$. Mocniny pravděpodobností z následujícího větvení jsme získali násobením pravděpodobností, že bude později zastaven každý z odsud pokračujících toků. Obdobným způsobem získáme pro předchozí (liché) patro výpočet $P_{z5} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \cdot P_{z6} + \frac{1}{4} \cdot P_{z6}^2$. Obecně tedy máme vzorce pro lichá a sudá patra:

$$P_{zi} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cdot P_{z(i+1)} + \frac{3}{8} \cdot P_{z(i+1)}^2 + \frac{1}{8} \cdot P_{z(i+1)}^3$$

$$P_{zi} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \cdot P_{z(i+1)} + \frac{1}{4} \cdot P_{z(i+1)}^2,$$

S pomocí těchto vzorců stačí dopočítat P_{z1} a z ní $P = 1 - P_{z1} = 0.5260997$.

Úloha 3.d. Terka je čtyřdimenzionální dívka, která si hraje s 8 třírozměrnými krychlemi, jejichž stěny obarvila červenou a modrou barvou, přičemž všechny obarvila stejným způsobem (na každou stěnu dala právě jednu barvu a je možné, že nějakou barvu vůbec nepoužila). Krychle pak slepila dohromady stěnami tak, že vytvořila čtyřrozměrnou krychli (teserakt), přičemž vždy slepila pouze stejně obarvené stěny. Kolik možných teseraktů takto mohlo vzniknout?

Intuitivně řečeno, dva teserakty považujeme za stejné, pokud jeden můžeme získat z druhého čtyřrozměrnou „rotací" nebo „zrcadlením". Formálně řečeno, dva teserakty A a B považujeme za stejné, pokud existuje zobrazení f z vrcholů teseraktu A do vrcholů teseraktu B takové, že:

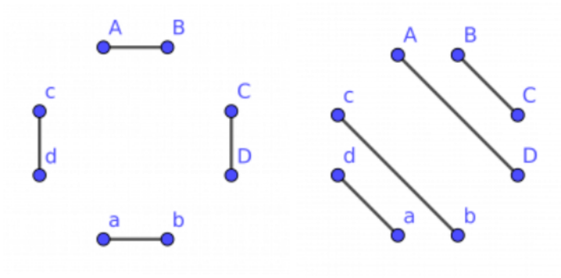
- pro každý vrchol b teseraktu B existuje vrchol a teseraktu A takový, že $f(a) = b$.
- mezi vrcholy u a v teseraktu A existuje hrana právě tehdy, když existuje hrana mezi vrcholy $f(u)$ a $f(v)$ teseraktu B.
- pokud vrcholy a, b, c a d v teseraktu A ohraničují stěnu, tak má tato stěna stejnou barvu jako stěna ohraničená vrcholy $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ a $f(d)$ v teseraktu B.

Řešení. Teserakty a jiná čtyřrozměrná tělesa se nám špatně představují a ještě hůř se nám s nimi pracuje. Proto nebylo úlohu vhodné řešit tím, že bychom si představovali různé čtyřrozměrné rotace, zrcadlení atd. Místo toho bylo lepší o teseraktech s obarvenými stěnami přemýšlet čistě kombinatoricky: jako o struktuře tvořené několika „objekty", které mezi sebou mohou mít různé vztahy (proto se takovým strukturám říká relační, z anglického relation = vztah).

Teserakt lze chápat jako strukturu se čtyřmi druhy objektů (vrcholy, hrany, stěny a krychle), mezi kterými může být mnoho různých vztahů (např. vztah mezi dvěma vrcholy „být spojeny hranou" nebo vztah mezi dvěma stěnami „ležet na stejné krychli"). Ne všechny tyto objekty a vztahy jsou ale relevantní pro řešení úlohy. Ve skutečnosti nám stačí zúžit se jen na krychle (kterých je v teseraktu jen 8) a uvědomit si, že dvě krychle mohou sousedit modrou stěnou, červenou stěnou nebo nesousedit vůbec (to jsou tři možné vztahy). Navíc víme, že každá krychle k sousedí se všemi ostatními krychlemi kromě jedné, o které řekneme, že je *opačná* ke krychli k. Označme tedy krychle a, b, c, d, A, B, C, D, přičemž dvě krychle jsou označené stejným písmenem (jedna malým, druhá velkým), pokud jsou si navzájem opačné.

V průběhu řešení se budeme kreslit teserakty jako diagramy: krychle teseraktu budou tečky (označené odpovídajícími písmeny), které budou spojené čárou, pokud spolu dané dvě krychle sousedí červenou stěnou. Všimněme si, že pokud tečky nejsou spojené, tak to, jestli je mezi nimi modrá nebo žádná stěna, vyplyne z toho, jakými písmeny jsou tečky označené. Nyní máme jednoduchý způsob, jak přijít na to, jestli jsou dva teserakty stejné nebo ne: pokud se jeden dá získat z druhého přejmenováním teček, jedná se o stejné teserakty (přičemž dvě opačné krychle musí i po přejmenování být opačné). Příklad vidíme na obrázku (t1, t2), kde jsou zobrazené dva teserakty, přičemž pravý jde z levého získat přejmenováním B <=> D a b <=> d (zbylé krychle se nezmění), a tedy se jedná o stejný teserakt, jen jinak „otočený". Geometricky toto přejmenování odpovídá určité „rotaci" (např. si představte, že B je „levá" krychle, b „pravá", D „přední" a d „zadní"). Všimněte si také, že z takovéto „přejmenovávací funkce" můžeme snadno získat funkci f ze zadání, která přejmenovává vrcholy teseraktu (každý vrchol je totiž jednoznačně určen tím, v kterých krychlích se nachází), a naopak (krychle je určena svými vrcholy).

BRKOS Team



Obrázek 1: t1, t2

Nyní k samotnému řešení úlohy. Postupně projdeme všechny možné případy podle toho, jak Terka krychle obarvila předtím, než je slepila do teseraktu. Ze zadání víme, že všech osm krychlí obarvila stejným způsobem.

- Pokud mají krychle všechny stěny modré, vznikne při složení jen jeden možný teserakt. V diagramu to odpovídá sitauci, kdy mezi tečkami nejsou žádné čáry (a nic nám tedy nebrání v přejmenovávání). +1
- Pokud mají krychle právě jednu stěnu červenou, odpovídá to diagramům, kdy z každé tečky vychází právě jedna čára. Jeden možný teserakt poskládaný z takovýchto krychlí jsme již viděli na obrázku výše. Snadno si lze rozmyslet, že každý teserakt, kde soused áčka je opačný k sousedu Áčka (tuto podmínku označme [1]), je možné přejmenováním převést na teserakt na obrázku t1. Pokud podmínka [1] není splněna, můžeme souseda áčka přejmenovat na b a souseda Áčka na c. Tím je určeno i to, které krychle budou B a C. Nyní nám zbývají už jen dvě krychle, a ty pojmenujeme tak, aby B sousedilo s d (viz obrázek t3). Na takto získaný teserakt jde tedy převést každý teserakt, který nesplňuje [1]. Zároveň po přejmenování nemůže [1] začít ani přestat platit, a tak lze z těchto krychlí poskládat právě dva různé teserakty (t1 a t3). +2

Pokud mají krychle dvě stěny červené, tak jsou dvě možnosti: buď spolu tyto dvě stěny sdílí hranu, nebo ne. Tyto případy rozebereme postupně.

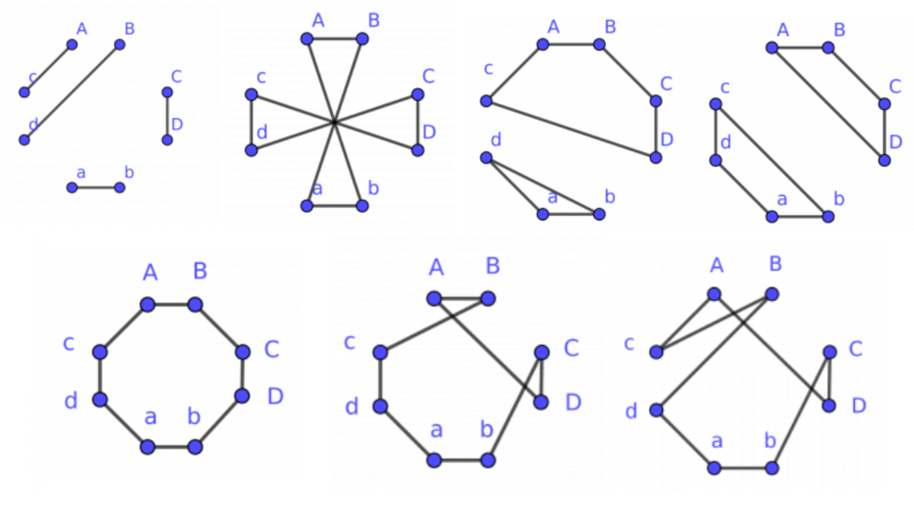
- Jednodušší případ je, když jsou červené stěny na opačných stranách krychlí. To totiž odpovídá diagramu, v němž má každá tečka dva sousedy, kteří jsou si navzájem opační. Takový teserakt lze zjevně přejmenovat tak, aby vypadal jako na obrázku t4. +1
- Složitější případ nastane, když spolu červené stěny na krychlích sousedí hranou. Nyní jsme totiž v situaci, kdy každá krychle má dva sousedy, kteří NEJSOU opační. Když začneme v libovolné tečce, můžeme přejít čárou do další, z té opět do další atd., dokud se nevrátíme tam, kde jsme začali, a tedy nám vznikne „cyklus“ (nemůže nám vzniknout „lízátko“, protože pak by jedna tečka měla tři sousedy). Pokud tento cyklus nepokryje celý obrázek, můžeme začít jinde a vybudovat další cyklus. Vidíme tedy, že celý obrázek je tímto způsobem pokryt cykly. Protože každý cyklus má délku alespoň tři, máme následující možnosti, jaké délky mohou cykly

mít: (5,3), (4,4) nebo (8) = jeden dlouhý cyklus. Postupně tyto tři možnosti zanalyzujeme.

- Pokud mají cykly délky 5 a 3, jistě se nachází v cyklu délky 5 dvě navzájem opačné tečky. Ty můžeme přejmenovat na c a C. Zbytek teček pak můžeme přejmenovat tak, abychom získali teserakt t5. **+1**

- Nyní uvažme případ dvou cyklů délky 4. Není možné, aby v jednom z nich byly dvě navzájem opačné tečky, protože spolu sousedit nemohou a žádná tečka nemůže sousedit s oběma z nich. Můžeme tedy v jednom cyklu přejmenovat tečky na a, b, c, d v tomto cyklickém pořadí (viz t6). Jedna možnost nastane, pokud A má sousedy opačné k sousedům áčka (tedy B a D), jak je vidět na obrázku. Jinak nastane druhá možnost, protože mezi variantami, kdy má A za sousedy B, C nebo D, C, se dá přejít přejmenováním. Celkem tedy dva teserakty. **+2**

- Nejsložitější případ nastane, když je obrázek pokryt jedním cyklem délky 8. Dvě navzájem opačné krychle spolu nemohou sousedit ani nemohou sdílet souseda (=být ve vzdálenosti 2), a tedy jsou buď ve vzdálenosti 3 nebo 4. Rozebereme si případy podle toho, kolik dvojic opačných krychlí je ve vzdálenosti 3 a kolik ve vzdálenosti 4. Případ, kdy všechny dvojice jsou ve vzdálenosti 3, vidíme na obrázku t7. Na obrázku t8 jsou pak všechny ve vzdálenosti 4 a na obrázku t9 je polovina ve vzdálenosti 3 (bB a cC) a polovina ve vzdálenosti 4 (aA a dD). Dá se ověřit, že na jeden z těchto obrázků se dá převést každý obrázek pokrytý jedním cyklem délky 8. **+3**

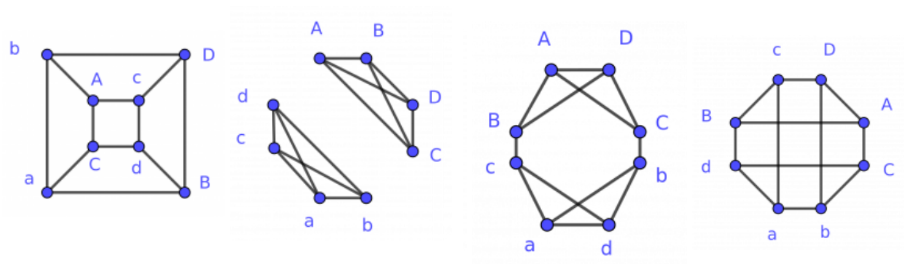


Obrázek 2: t3, t4, t5, t6, t7, t8, t9

Nyní se podívejme na případ, kdy mají krychle 3 stěny červené. Zde jsou opět dvě možnosti: buď se jedná o dvě protilehlé stěny a jednu další, nebo ne (např. červené jsou levá, spodní a přední stěna).

Začneme s případem, kdy červené stěny jsou na dvou protilehlých stěnách krychlí a na jedné další. Jedna možnost, jak může diagram vypadat, je obrázek t4 plus z každé tečky jedna čára navíc. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že z a vede čára do d. Z A může vést čára do D, nebo do c (vedla-li by do C, prohodíme c a C). V obou případech pak už vznikne jenom jeden možný teserakt (protože můžeme prohodit b a B), zatím jsme tedy na dvou teseraktech. Teserakt jde ale z takovýchto krychlí poskládat i jinak než rozšířením t4. Dá se zkontrolovat, že jediná další možnost je teserakt na obrázku t10. +3

Zbývá už jen případ, kdy každá krychle má tři červené stěny, ale žádné dvě NEJSOU na protihlých stranách. Bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že sousedi áčka jsou b, c a d. Každý z nich má další dva sousedy, jedna možnost tedy je, že jsou spojeny pouze mezi sebou a žádná čára nevede mezi malým a velkým písmenem (viz t11). Další dvě možnosti vidíme na obrázcích t12 a t13. +3



Obrázek 3: t10, t11, t12, t13

Případy, kdy jsou na každé krychli čtyři nebo více červených stěn, řešit nemusíme, protože stačí zopakovat předchozí úvahy s prohozením rolí červených a modrých stěn (např. 4 červené je totéž co 2 modré, a těch je stejný počet jako pro 2 červené).

Celkem je tedy mohla složit $2 * (1 + 2 + 7) + 6 =$ **26** možností.

BRKOS Team