BRněnský KOrespondenční Seminář

XXIX. ročník

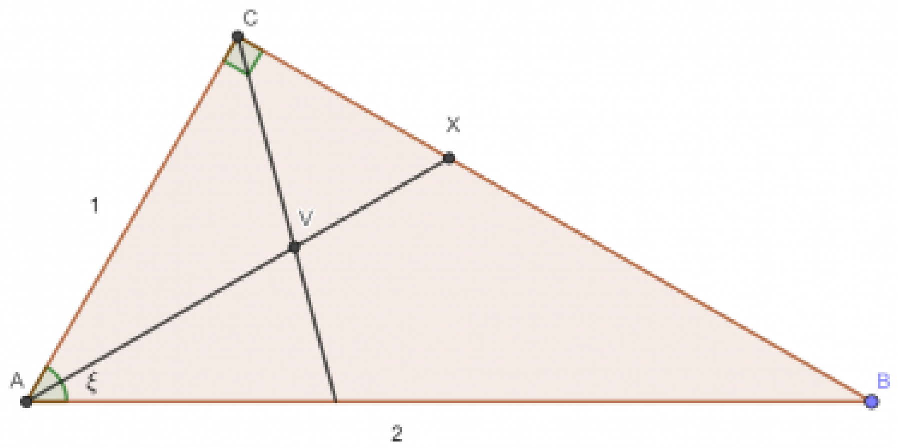
2022/2023

ŘEŠENÍ 2. SÉRIE

Ščvrčkův bod

Úloha 2.1. Ščvrček brkosí (*Gryllus bombycillae*) je středně velký druh cvrčka. Krytky jeho křídel jsou trojúhelníkové s modrou skvrnou. Označme si jeden z těchto trojúhelníků ABC s pravým úhlem u vrcholu C, $|AB| = 2$ a $|AC| = 1$. Bod V je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, bod X je průsečík přímek AV a BC. Modrá oblast na krytce je vymezená body C, V, X. Určete velikost úhlu CVX.

Řešení. První pozorování je, že střed kružnice vepsané leží na osách všech vnitřních úhlů trojúhelníka.



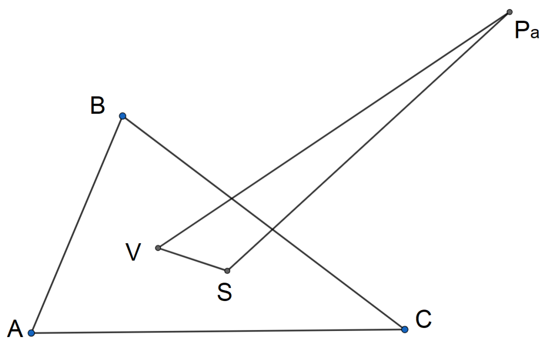
Úhel ACV má tedy velikost 45°. Spočítáme velikost úhlu CAV. Ta je poloviční oproti velikosti úhlu $\xi = CAB$, kterou spočítáme následovně:

$$\cos \xi = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{2}$$
$$\xi = 60°$$

Tedy $|\sphericalangle CAV| = 30°$. Velikost úhlu AVC zjistíme dopočtem do 180°, tedy $|\sphericalangle AVC| = 105°$. Hledaný úhel je doplňkem úhlu AVC do přímého úhlu, tedy $|\sphericalangle CVX| = 180° - 105° = 75°$.

Úloha 2.2. KoMáR (*Culex mathum*) je patrně nejznámější druh komára v České republice. Jeho výrazným rysem je trojúhelníková hlava a ještě trojúhelníkovější sosák. Jejich proporce jsou spolu úzce propojené, což si můžeme znázornit následovně: Střed kružnice opsané hlavě-trojúhelníku ABC označme S. Střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC označme V. Střed kružnice připsané trojúhelníku ABC ke straně a označme P_a. Máme fotografii sosáku – známe tedy $|SV|, |SP_a|$ a $|P_aV|$. Zkonstruujte hlavu-trojúhelník ABC. Pro zápis řešení použijte postup pro řešení konstrukčních úloh popsaný ve studijním textu k této sérii.

Řešení. Náčrt:

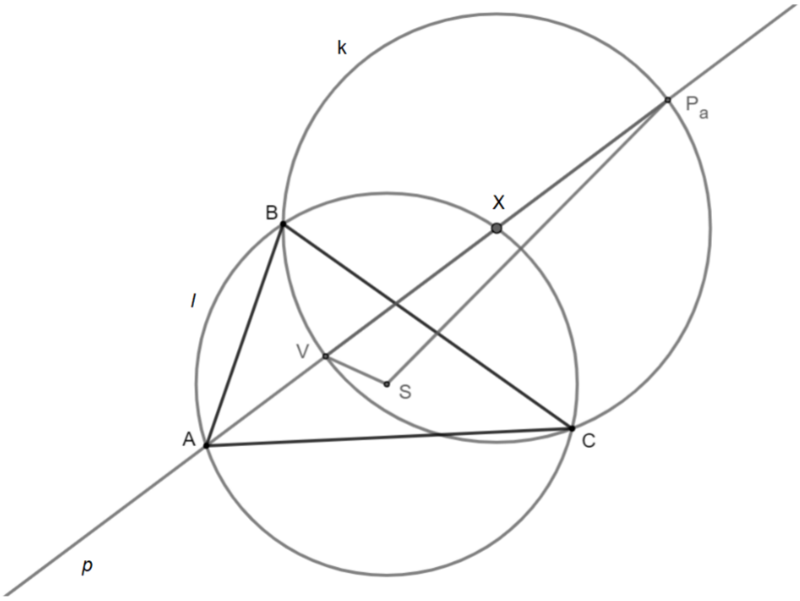


Rozbor: Z pomocného textu víme, že Švrčkův bod je stejně vzdálen od středu kružnice vepsané, zbývajících dvou vrcholů trojúhelníku a středu kružnice připsané k dané straně. Tyto 4 body leží na jedné kružnici se středem ve Švrčkově bodu. Zároveň je Švrčkův bod středem úsečky VP, kde V je střed kružnice vepsané a P je střed kružnice připsané. Také platí, že Švrčkův bod leží na kružnici opsané danému trojúhelníku. Zápis konstrukce:

1. VSP_a; podle věty sss
2. X; X je střed VP_a (Švrčkův bod)
3. k; k je Thaletova kružnice se středem X a poloměrem $|XV|$
4. l; l je kružnice se středem S a poloměrem $|SX|$
5. p; p je přímka, která prochází body V a P_a
6. A; A je průsečík l a p; $A \neq X$
7. B, C; body B a C jsou průsečíky k a l
8. ABC

BRKOS Team

Řešení:



Počet řešení:

KoMáR (Culex mathum) je patrně nejznámější druh komára v České republice. Doposud nevymřel, proto jsou délky zadané tak, že tato úloha má alespoň jedno řešení. Je taky dáno, že sosák je trojúhelníkového tvaru, proto nemůžou nastat jiné situace. Tato úloha má 2 řešení, osově souměrná podle přímky p. Záleží, jestli bod S zkonstruujeme nad nebo pod VP_a.

Úloha 2.3. BrNOČní motýl (*Papilio brnocto*) rád létá kolem svítících žárovek, přičemž jeho dráha splňuje velmi přísná pravidla. Dokažte, že pro libovolný $\triangle ABC$ tvoří jeho Švrčkovy body S_a, S_b, S_c ostroúhlý trojúhelník. Sestrojte $\triangle ABC$, znáte-li $|S_aS_b|$, $|S_bS_c|$ a $|S_cS_a|$. Pro zápis řešení použijte postup pro řešení konstrukčních úloh popsaný ve studijním textu k této sérii.

Řešení. První částí úlohy je dokázat, že $\triangle S_aS_bS_c$ je vždy ostroúhlý. Pomocí obvodových úhlů vidíme, že:

$$|\sphericalangle S_aS_cC| + |\sphericalangle S_bS_cC| = |\sphericalangle S_aAC| + |\sphericalangle S_bBC| = 90 - |\sphericalangle S_cCB|$$

Úhel u vrcholu S_c bude tedy vždy menší než 90, tzn. ostrý. Úplně stejně to pak uděláme pro zbylé dva úhly a dostáváme, že $\triangle S_aS_bS_c$ je vždy ostroúhlý. Nyní se vrhneme na samotnou konstrukci.

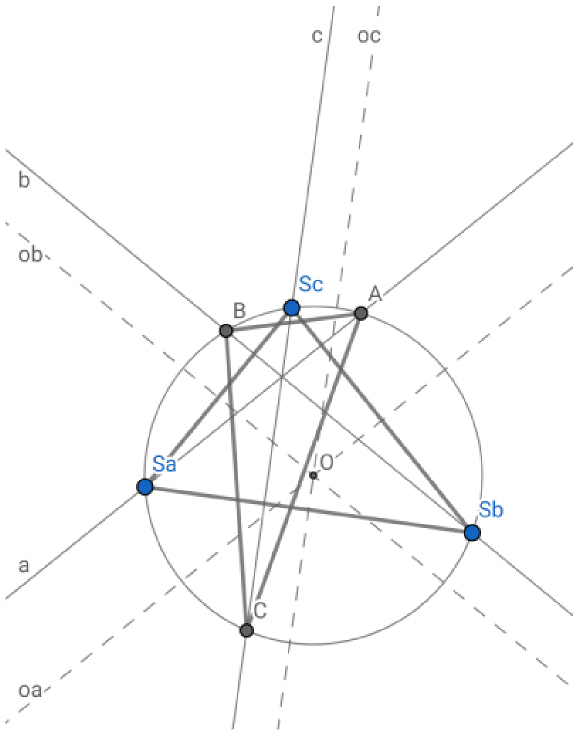
Rozbor:

Z věty o třech prstech ($|S_aB| = |S_aC| = |S_aV|$, kde V je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC) vidíme, že $|S_cA| = |S_cV|$ a $|S_bA| = |S_bV|$ a čtyřúhelník S_cAS_bV je tedy deltoid, tzn.

$S_cS_b \perp AV$. Analogicky pro S_cBS_aV a S_aCS_bV. Stačí nám tedy sestrojit $\triangle\, S_aS_bS_c$, k němu kružnici opsanou a poté vést každým vrcholem kolmici k protější straně. Body A, B a C nalezneme na průsečících těchto přímek s kružnicí.

Zápis konstrukce:

1. $\triangle\, S_aS_bS_c$ (sss)
2. o_a, o_b, o_c - osy stran
3. O, $O \in o_a \cap o_b \cap o_c$
4. $k(O, |OS_a|$
5. a, $S_a \in a$, $a \perp S_bS_c$
6. A, $A \in k \cap a$
7. b, $S_b \in b$, $b \perp S_aS_c$
8. B, $B \in k \cap b$
9. c, $S_c \in c$, $c \perp S_aS_b$
10. C, $C \in k \cap c$
11. $\triangle\, ABC$



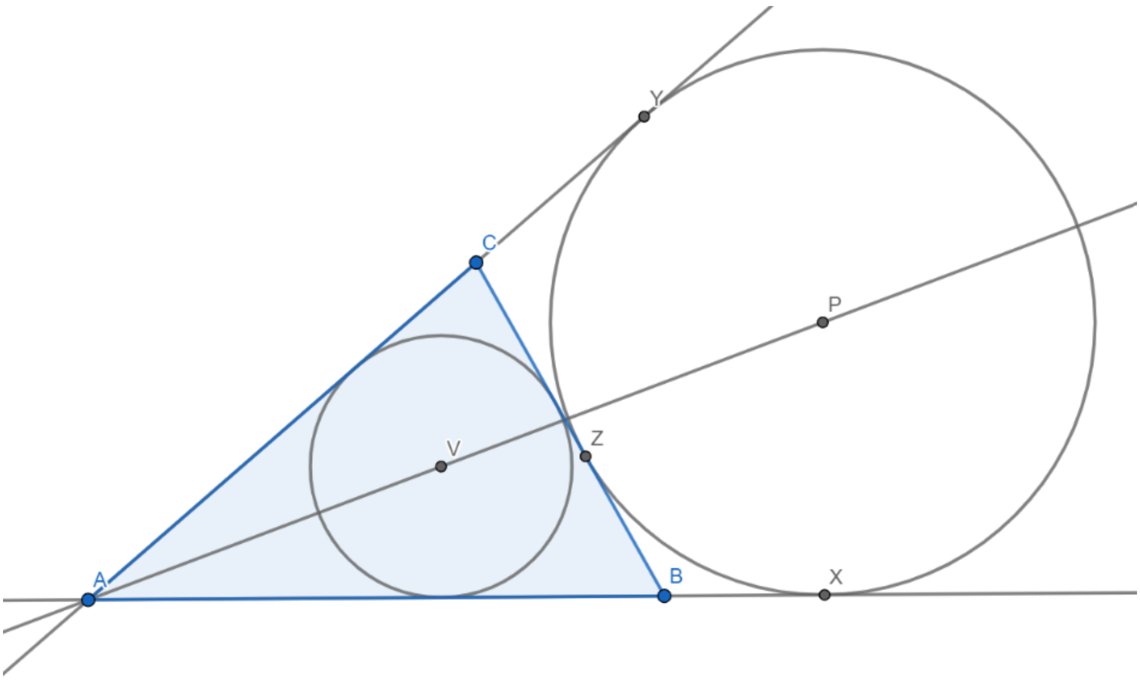
BRKOS Team

Počet řešení:

Úloha má řešení pouze tehdy, když bude trojúhelník $S_aS_bS_c$ ostroúhlý. Na začátku si $\triangle\, S_aS_bS_c$ můžeme zkonstruovat dvěma způsoby, oba však budou souměrná podle strany, kterou narýsujeme jako první.

Úloha 2.4. Mravkolev Markovův (*Myrmeleon markovii*) je speciální druh mravkolva, který si staví pasti ve tvaru trojúhelníku. Sestrojte půdorys pasti, jestliže znáte její obvod, poloměr kružnice vepsané a poloměr kružnice připsané k jedné ze stran. Pro zápis řešení použijte postup pro řešení konstrukčních úloh popsaný ve studijním textu k této sérii.

Řešení. Náčrt:



Rozbor:

Nejdříve ukážeme pomocné tvrzení: Nechť AT_1 a AT_2 jsou tečny ke kružnici $k(s,r)$. Pak, $|AT_1| = |AT_2|$. Toto tvrzení plyne z toho, že $\triangle\, AST_1 \cong \triangle\, AST_2$ jsou shodné podle věty Ssu, jelikož AS je společná strana, $|ST_1| = |ST_2| = r$ a $|\sphericalangle AT_1S| = |\sphericalangle AT_2S| = \frac{\pi}{2}$.

Označme k kružnici připsanou $\triangle\, ABC$ ke straně BC. Označme X bod dotyku přímky AB s kružnicí k, Y bod dotyku přímky AC s kružnicí k a Z bod dotyku přímky BC s kružnicí k. Nakonec označme poloměr kružnice vepsané $\triangle\, ABC$ jako r. Ukážeme s využitím pomocného tvrzení, že $AX = \frac{o}{2}$:

$$o = a + b + c = b + c + |BZ| + |ZC| = b + c + |BX| + |CY| = |AX| + |AY| = 2|AX|$$

BRKOS Team

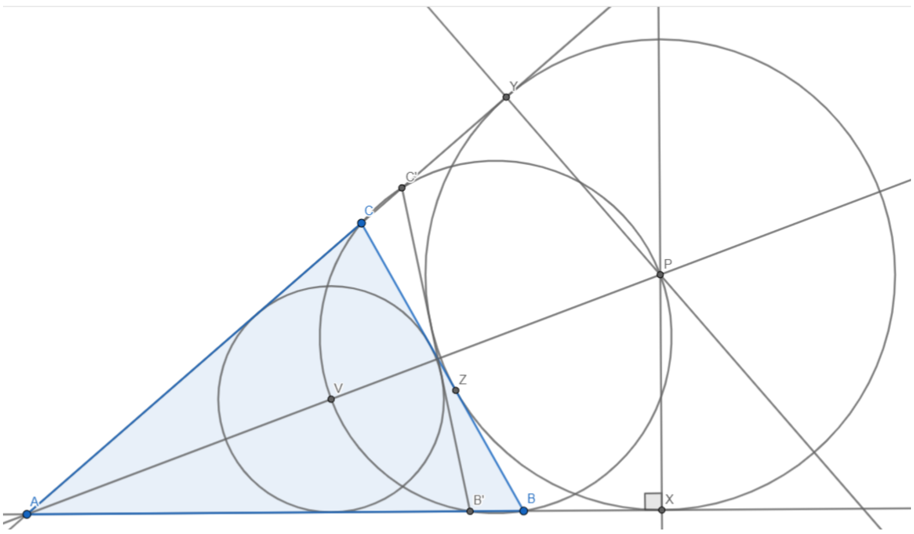
Dokážeme tedy zkonstruovat $\triangle AXP$ podle věty *sus*.

Bod V leží ve vzdálenosti r od přímky AB. Leží tedy na rovnoběžce ve vzdálenosti r od AB.

Nakonec využijeme tvrzení z pomocného textu, které nám říká, že body B a C leží na Thaletově kružnici nad průměrem VP.

Zápis konstrukce:

1. $\triangle AXP(Ssu)$
2. $\triangle APY(sss)$
3. $p, p \| AX$, vzdálenost přímek p a AX je r
4. $V, V \in p \cap AP$
5. τ_{VP}, τ_{VP} je Thaletova kružnice nad průměrem VP
6. $B, B \in \tau_{VP} \cap AX$
7. $C, C \in \tau_{VP} \cap AX$, pokud τ_{VP} protíná AY musí navíc platit $|AB| \neq |AC|$
8. $\triangle ABC$



Počet řešení: Úloha má až dvě řešení. (Tato řešení jsou symetrická až na pojmenování bodů B a C.) Počet řešení závisí na počtu průsečíku τ_{VP} s AX.

úloha 2.a. Mandělinka prvočí (*Leptinoťarsa primoprotozoae*) dospívá sedm let a poté se množí mitózou. Rozdělí se přesně tolikrát, kolik je dělitelů součinu letopočtů těchto let. Dokažte, že se rozdělí alespoň 60 krát (tedy že součin libovolných 7 po sobě jdoucích přirozených čísel má nejméně 60 dělitelů).

řešení. Součin čísel v obecné sedmici po sobě jdoucích přirozených čísel si označíme následovně:

$$S = k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot (k+4) \cdot (k+5) \cdot (k+6), \text{ kde } k \in \mathbb{N}$$

Platí:

$$2|k \Leftrightarrow 2|(k+2) \Leftrightarrow 2|(k+4) \Leftrightarrow 2|(k+6),$$
$$2|(k+1) \Leftrightarrow 2|(k+3) \Leftrightarrow 2|(k+5).$$

Nejméně jedno z čísel ze zadané sedmice bude dělitelné 4 (tedy bude mít v rozkladu na součin prvočísel dvojku nejméně v druhé mocnině) $\Rightarrow$ S obsahuje v rozkladu na součin prvočísel nejméně 4 dvojky. Analogicky lze ukázat, že v rozkladu S budou nejméně 2 trojky, 1 pětka a 1 sedmička. Platí tedy:

$$S = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot Z, \text{ kde } Z \in \mathbb{N}$$

Nyní nám stačí dokázat, že výraz V = $p_1^{i_1} \cdot \dots \cdot p_n^{i_n} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ má alespoň 60 různých dělitelů. Je více způsobů jak tuto úlohu vyřešit, nejjednodušší ale nejspíše je zaměřit se na mocniny $i_1 \dots i_n$. Prvočíslo p_j ($1 \le j \le n$) se v libovolném děliteli výrazu V může vyskytovat v i_j+1 různých mocninách (včetně nulté mocniny). Obecný vzorec pro výpočet dělitelů takového výrazu V nám tedy dává jako odpověď počet $(i_1+1)\cdots(i_n+1)$.

Počet dělitelů výrazu $V = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ je tedy roven číslu $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60$. Z toho ale vyplývá, že V má 60 různých dělitelů, tedy $S = V \cdot Z$ má nejméně 60 různých dělitelů, což jsme chtěli dokázat.

BRKOS Team

úloha 2.b. Vodoměrky Caratheodoryho (*Hydrometra carathēodori*) žijí v oblastech rozsahu 4×4 políček, kde na každém políčku je buďto ostrůvek, proud dolů (na jih), nebo proud doprava (na východ). Vodoměrka přistává v levém horním rohu a nechává se unášet proudem. Pokud dopluje na ostrov, zůstane tam a nepokračuje dál. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodné takové oblasti vodoměrka dopluje až za její hranici? (Náhodná oblast je taková, že na každém políčku je se stejnou pravděpodobností náhodně jeden ze tří povrchů (ostrůvek, proud dolů, nebo doprava), každý s pravděpodobností $\frac{1}{3}$, a povrch jednotlivých políček je navzájem nezávislý.)

řešení. Většina z vás řešila příklad tabulkou, vypsáním pravděpodobnosti dostání se na dané políčko, což je samozřejmě naprosto legitimní způsob, avšak pro rozsáhlejší pole by byl hůř aplikovatelný. I z tabulky šlo něco vypozorovat – jedná se o osekaný Pascalův trojúhelník s vrcholem na počátečním políčku, podělený číslem 3^k, kde k je vzdálenost políčka od počátku.

Každopádně to šlo spočítat i jednoduševji. BÚNO nám stačí spočítat, že vodoměrka opustí oblast vpravo a vynásobit to dvěma, jelikož pravděpodobnosti opuštění vpravo a spodem jsou zřejmě stejné a navzájem jsou tyto jevy neslučitelné. Nejkratší cesta má délku 4 (vždy doprava), nejdelší sedm (4 vpravo, 3 dolů). Pro každou délku cesty máme přesně dáno, kolik jakých proudů potřebujeme, takže pravděpodobnost, že nastanou je $\frac{1}{3^n}$, kde n je délka cesty.

Už stačí jenom spočítat, kolik různých cest dané délky může být. Zde je důležité si uvědomit, že poslední krok musí být ven (doprava), takže kombinujeme jen $n-1$ proudů. Výslednou pravděpodobnost tedy můžeme spočítat jako $2\sum_{n=4}^{7}\binom{n-1}{3}\frac{1}{3^n} = \frac{226}{2187}$.

úloha 2.c. Životní cyklus cikád (*Cicadoidea*) trvá prvočíselný počet let dávající zbytek 1 po dělení čtyřmi. Cikáda třídělná (*Magicicada tripartitum*) je navíc známá tím, že její životní cyklus začíná jen v letech n takových, že n^2-p má alespoň tři prvočíselné dělitele. Dokažte, že takových n je nekonečně mnoho a tyto cikády proto nevyhynou.

řešení. Zafixujme prvočíslo p, které dává zbytek 1 po dělení čtyřmi. Ukážeme, že existuje nekonečně mnoho n takových, že n^2-p má alespoň tři prvočíselné dělitele.

Předpokládejme, že najdeme alespoň jedno takové n, tzn. že existuje nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$ a různá prvočísla q_1, q_2, q_3 tak, že $q_1q_2q_3$ dělí n_0^2-p. Uvažme nyní pro jakékoli přirozené k číslo $n_k = n_0 + kq_1q_2q_3$. Potom jistě i n_k^2-p je dělitelné q_1, q_2, q_3 jelikož

$$n_k^2 - p = (n_0 + kq_1q_2q_3)^2 - p \equiv n_0^2 - p \equiv 0 \pmod{q_i}$$

pro $i = 1, 2, 3$. Tedy najdeme-li jedno n splňující podmínky ze zadání, automaticky jich již máme nekonečně mnoho. [1]

Ukážeme, že hledané n je například $n = p^2$. Víme, že p můžeme napsat jako $p = 4k+1$ pro

[1] Úvaha v tomto odstavci převzata od Terky Krejčí :)

nějaké $k \in \mathbb{N}$, tedy

$$\begin{aligned} n^2 - p &= p^4 - p \\ &= p(p^3 - 1) \\ &= p(p-1)(p^2+p+1) \\ &= 4k(4k+1)(16k^2+12k+3). \end{aligned}$$

Tento součin je jistě dělitelný dvěma a p. Výraz $p^2 + p + 1$ zjevně není dělitelný p a z posledního řádu výpočtu výše vidíme, že se jedná o liché číslo, které je navíc jistě větší než jedna, tedy musí existovat prvočíslo q různé od dvojky a p, které dělí $p^2 + p + 1$. Dohromady má tedy $p^4 - p$ alespoň tři prvočíselné dělitele: dvojku, p a q.

Poznámka na závěr: obdobnou úvahu lze ukázat, že pro $n = p^a, a > 1$ bude mít $n^2 - p$ rovněž alespoň tři prvočíselné dělitele.

Úloha 2.D. Ska$\mathbb{R}$abeus zlatý (*ScaRabaeus aureus*) byl posvátný ve starověkém Egyptě. Na jeho počest nazývali staří Egypťané reálná čísla r ve tvaru $a + b\sqrt{5}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, scarabreálná. Pro $r = a + b\sqrt{5}$ označme $rac(r) = a$, $irac(r) = b$. Označme $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ zlatý řez. Ukažte, že každé číslo tvaru $r = 2\varphi^{2n}$ je scarabreálné a platí $rac(r) = 5F(n)^2 + 2(-1)^n$, $irac(r) = F(2n)$, kde $F(m)$ je m-té Fibonacciho číslo.

Řešení. Toto vzorové řešení je inspirováno několika vašimi řešeními. Postavíme ho na následujícím vyjádření pro n-té Fibonacciho číslo, které nebudeme dokazovat (více se můžete dočíst na wikipedii):

$$F(n) = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}},$$

kde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ je zlatý řez. Pomocí ekvivalentních úprav nyní ukážeme požadovanou rovnost:

$$\begin{aligned} 5F(n)^2 + 2(-1)^n + F(2n)\sqrt{5} &= 5\left(\frac{\varphi^n - (\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}\right)^2 + 2(-1)^n + \left(\frac{\varphi^{2n} - (-\varphi)^{-2n}}{\sqrt{5}}\right)\sqrt{5} \\ &= (\varphi^n - (-\varphi)^{-n})^2 + 2(-1)^n + \varphi^{2n} - (-\varphi)^{-2n} \\ &= \varphi^{2n} - 2\varphi^n(-\varphi)^{-n} + (-\varphi)^{-2n} + 2(-1)^n + \varphi^{2n} - (-\varphi)^{-2n} \\ &= 2\varphi^{2n} - 2\left[\varphi\left(-\frac{1}{\varphi}\right)\right]^n + 2(-1)^n \\ &= 2\varphi^{2n} - 2(-1)^n + 2(-1)^n \\ &= 2\varphi^{2n} \end{aligned}$$

Vidíme, že n můžeme zvolit libovolně, ale na platnosti odvození vztahu to nic nezmění. Tedy jsme rovnost dokázali pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Dokonce se nám podařilo ukázat i slabší tvrzení scarabreálnosti čísla $2\varphi^{2n}$, jelikož pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $F(n) \in \mathbb{N}$, tedy jistě $5F(n)^2 + 2(-1)^n \in \mathbb{Z}$, $F(2n) \in \mathbb{Z}$.

BRKOS Team