BRněnský KOrespondenční Seminář

XXIX. ročník

2022/2023

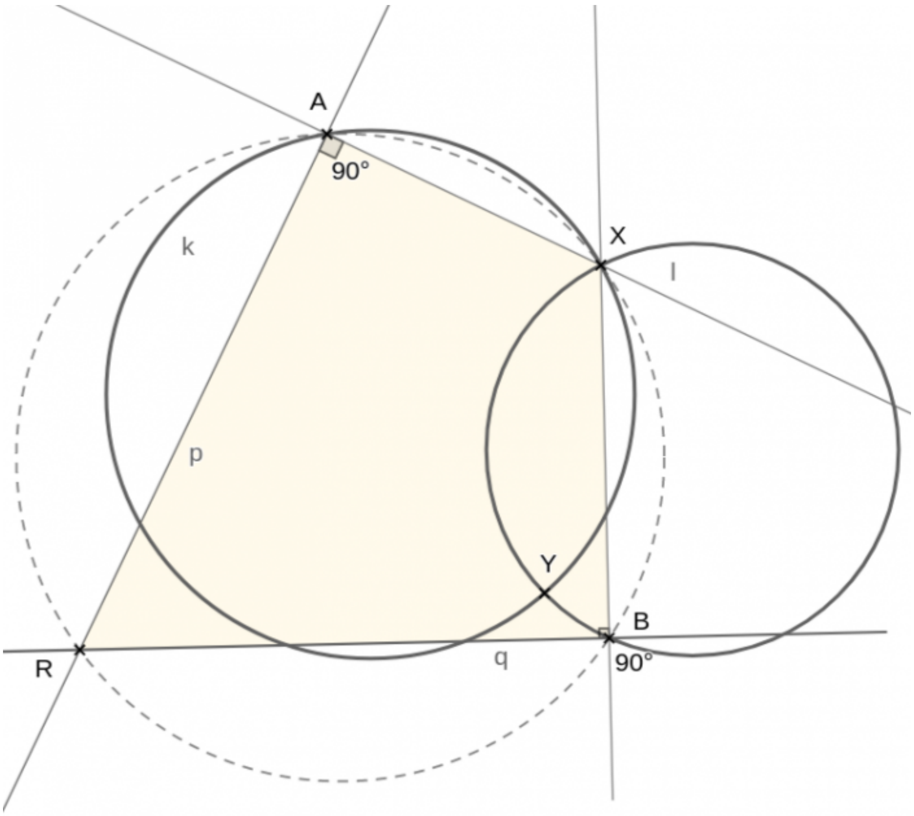
ŘEŠENÍ 1. SÉRIE

Úvodní salát

ÚLOHA 1.1. Máme součástku, která vypadá jako dvě kružnice, označme je k, l, které se protínají v různých bodech X, Y. Uvažme bod A na kružnici k a bod B na kružnici l tak, že A, B jsou různé od X, Y a body A, B a X neleží na jedné přímce. Označme kolmici na AX (resp. BX) v bodě A (resp. B) jako p (resp. q). Dokažte, že průsečík p a q leží na kružnici opsané trojúhelníku ABX.

ŘEŠENÍ. Průsečík přímek p a q označme R. Tvrzení, které máme dokázat je ekvivalentní s tvrzením, že všechny čtyři body A, B, X, R leží na jedné kružnici. Postup řešení si můžeme rozdělit na dva případy:

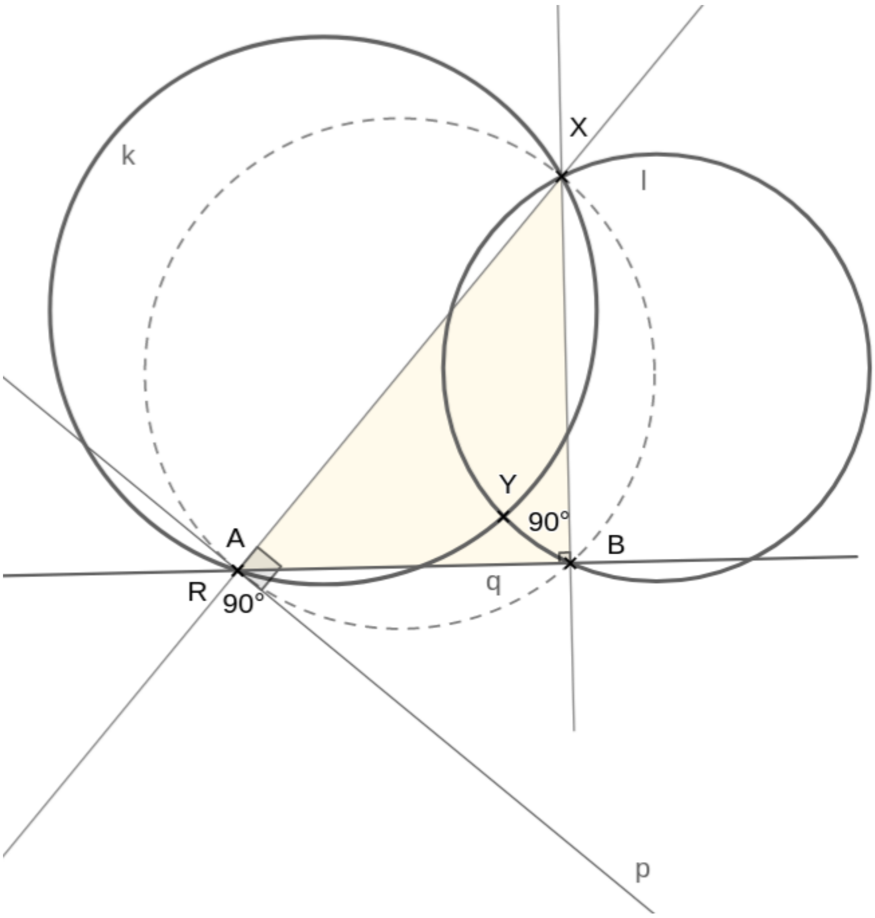
i) $A = R \vee B = R$



V tomto případě tvoří body A, B, X, R pouze trojúhelník a pro ten dokážeme vždy nalézt kružnici opsanou.

BRKOS Team

ii) $A \neq R \wedge B \neq R$ (viz obr. 2)



Zde nám stačí dokázat, že AXBR je tětivový čtyřúhelník, jelikož tomu lze vždy opsat kružnici. Čtyřúhelník je tětivový právě tehdy když součet velikostí protějších vnitřních úhlů je 180 stupňů. Ze zadání ale víme, že úhly XAR a XBR jsou pravé, tedy jejich součet je 180 stupňů. Čtyřúhelník AXBR je tedy tětivový a lze mu tak opsat kružnici, což jsme chtěli dokázat.

Úloha 1.2. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ označme:

$$P(n) = \underbrace{1 + 3 + \cdots + (2n-1)}_{n \text{ členů}} + \underbrace{(2n-2) + (2n-3) + (2n-4) + \cdots + n}_{n-1 \text{ členů}}$$

Tedy například $P(1) = 1$, $P(2) = 1 + 3 + 2$, $P(3) = 1 + 3 + 5 + 4 + 3$. Dokažte, že pro každé přirozené n platí, že $P(n)$ dává zbytek 1 po dělení 5, a zapište explicitním vzorcem (předpisem) pro $P(n)$ pouze za pomocí znamének +,-,· a mocnin (bez "trojteček").

Řešení. Výraz P si rozdělíme na dvě části, jak už zadání napovídá. První část bude mít n členů a označíme ji P_1. Druhá část má potom $n-1$ členů a budeme ji značit P_2.

Můžeme si všimnout, že P_1 i P_2 tvoří součet aritmetické posloupnosti (tj. pro každý prvek posloupnosti platí, že lze vyjádřit jako $a_{n+1} = a_n + d$, kde d je konstanta). Pro součet n prvků aritmetické posloupnosti platí vzoreček

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2},$$

kde a_1 je první člen posloupnosti a a_n poslední.

Pro P_1 a P_2 tedy dostáváme:

$$P_1 = \frac{n(1 + (2n-1))}{2} = n^2,\ P_2 = \frac{(n-1)((2n-2)+n)}{2} = \frac{3n^2 - 5n + 2}{2}.$$

Pro P rovnou dostáváme explicitní vzorec:

$$P = n^2 + \frac{3n^2 - 5n + 2}{2} = 5\frac{(n-1)n}{2} + 1.$$

Zbývá nám tedy dokázat, že P dává vždy zbytek 1 po dělení pěti: $n-1$ a n jsou dvě po sobě jdoucí čísla. Jedno z nich je tedy sudé, takže $\frac{(n-1)n}{2}$ je celé číslo, z čehož vyplývá, že $5\frac{(n-1)n}{2}$ dává zbytek 0 po dělení pěti a P dává vždy zbytek 1.

Úloha 1.3. Obraz (nekonečná rovina) je obarven několika barvami, přičemž platí, že uvážíme-li v tomto obraze libovolnou kružnici, tak tato kružnice neobsahuje všechny použité barvy. Kolik nejméně barev může obraz mít?

Řešení. Správná odpověď je čtyři. Musíme ukázat dvě věci: 1) že existuje obarvení obrazu čtyřmi barvami takové, že žádná kružnice neobsahuje všechny barvy; 2) že pro každé obarvení obrazu méně než čtyřmi barvami existuje kružnice obsahující všechny barvy.

1) Zvolme množinu M obsahující tři body na jedné přímce, každému dejme jinou barvu a všem ostatním bodům v rovině dejme čtvrtou barvu. Zřejmě žádná kružnice neobsahuje všechny body z M, tedy žádná kružnice neobsahuje všechny barvy.

2) Uvažme libovolný obraz obarvený n barvami, kde $n < 4$. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé (dokonce každá kružnice obsahuje všechny barvy). Pro $n = 2$ uvažme libovolné dva různobarevné body A a B a libovolnou kružnici obsahující A i B (taková kružnice obsahuje obě barvy).

Nyní tedy předpokládejme $n = 3$ a uvažme libovolné tři různobarevné body A, B a C. Pokud neleží na jedné přímce, tak kružnice opsaná trojúhelníku ABC obsahuje všechny barvy. Pokud leží na jedné přímce, uvažme libovolný bod D ležící mimo tuto přímku. Bez újmy na obecnosti má stejnou barvu jako A, a tedy kružnice opsaná trojúhelníku BCD obsahuje všechny barvy. (Pozn. bez újmy na obecnosti znamená, že bychom případně uvážili trojúhelník ABD nebo ACD.)

Úloha 1.4. Uvažujme normovaný polynom stupně 2022, který má včetně násobností 2022 kladných reálných kořenů $r_1, \ldots, r_{2022}$ a jehož absolutní člen je 12345678. Určete, jaké nejmenší hodnoty může nabývat součet

$$r_1 + \frac{1}{r_1} + r_2 + \frac{1}{r_2} + \ldots + r_{2022} + \frac{1}{r_{2022}}.$$

Řešení. Uvedeme zde řešení za pomoci AG nerovnosti. Z Vietových vztahů a z toho, že stupeň polynomu ze zadání je sudý víme, že součin všech kořenů je roven absolutnímu členu polynomu. Dle značení ze zadání máme

$$r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_{2022} = 12345678.$$

Na těchto 2022 kořenů můžeme aplikovat AG nerovnost díky podmínce, že všechny musí být kladné. Získáváme tím

$$\frac{r_1 + r_2 + \cdots + r_{2022}}{2022} \geq \sqrt[2022]{r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_{2022}}$$

neboli

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_{2022} \geq 2022 \cdot \sqrt[2022]{r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_{2022}}.$$

Aplikací AG nerovnosti na převrácené hodnoty kořenů získáváme druhou nerovnost

$$\frac{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_{2022}}}{2022} \geq \sqrt[2022]{\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{r_{2022}}}$$

neboli

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_{2022}} \geq 2022 \cdot \sqrt[2022]{\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{r_{2022}}}.$$

Sečtením obou nerovností tak získáváme

$$r_1 + \frac{1}{r_1} + r_2 + \frac{1}{r_2} + \cdots + r_{2022} + \frac{1}{r_{2022}} \geq 2022 \cdot \sqrt[2022]{r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_{2022}} + 2022 \cdot \sqrt[2022]{\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{r_{2022}}}.$$

Ale my ze zadání víme, že

$$r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_{2022} = 12345678.$$

Tedy jistě platí nerovnost

$$r_1 + \frac{1}{r_1} + r_2 + \frac{1}{r_2} + \cdots + r_{2022} + \frac{1}{r_{2022}} \geq 2022 \cdot \sqrt[2022]{12345678} + 2022 \cdot \sqrt[2022]{\frac{1}{12345678}}.$$

Nyní vezměme

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_{2022} = \sqrt[2022]{12345678}.$$

Je jednoduché ověřit, že pro tyto hodnoty kořenů, které splňují podmínku, že jejich součin je 12345678, naše nalezená nerovnost přejde v rovnost. Tedy odpověď na naši úlohu je, že minimální hodnota výrazu $r_1 + \frac{1}{r_1} + r_2 + \frac{1}{r_2} + \cdots + r_{2022} + \frac{1}{r_{2022}}$ je

$$2022 \cdot \sqrt[2022]{12345678} + 2022 \cdot \sqrt[2022]{\frac{1}{12345678}}$$

Úloha 1.a. Máme libovolný trojúhelník ABC s těžištěm v bodě T. Dokažte, že obsahy trojúhelníků S_aTB a ATS_b jsou u jakéhokoliv takového libovolného trojúhelníku ABC stejné (S_a je střed strany BC a S_b je střed strany AC).

Řešení. Označme S_a, S_b a S_c postupně středy stran a, b, c a T těžiště trojúhelníku ABC. Trojúhelníky ABS_a a ABS_b mají shodnou stranu AB. Tyto dva trojúhelníky mají také stejnou výšku na tuto stranu, protože střední příčka S_aS_b je rovnoběžná se stranou AB. Jelikož obsah trojúhelníku je polovina součinu strany a k ní příslušné výšky, mají trojúhelníky ABS_a a ABS_b stejný obsah. Pokud od obsahu trojúhelníku ABS_a odečteme obsah trojúhelníku ABT, dostaneme obsah trojúhelníku ATS_a. Pokud odečteme od obsahu trojúhelníku ABS_b obsah trojúhelníku ABT, dostaneme obsah trojúhelníku ATS_b. Trojúhelníky ATS_a a ATS_b mají proto shodný obsah.

Úloha 1.b. Ukažte, že polynom $x^n - nx + n - 1$, kde $n > 0$ je sudé celé číslo, nemá žádné záporné kořeny. Poté najděte všechny kladné reálné kořeny tohoto polynomu.

Řešení. 1. pokusíme se najít záporné kořeny: $x < 0$
$\implies x^n > 0$ ... n je sudé, každá sudá mocnina záporného čísla je kladná
$\implies n - 1 > 0$ ... n je nejméně 2
$\implies -nx > 0$ ... $-n$ i x jsou záporná čísla, jejich součin je kladný
$\implies x^n - nx + n - 1 > 0$ ... polynom nemá žádné záporné kořeny

2. nalezneme všechny kořeny polynomu:

$$\begin{aligned} x^n - nx + n - 1 &= 0 \\ x^n - 1 - nx + n &= 0 \\ (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1) - n(x-1) &= 0 \\ (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 - n) &= 0 \end{aligned}$$

$$x - 1 = 0 \implies x = 1$$

$$\begin{aligned} x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 - n &= 0 \\ x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x &= n - 1 \end{aligned}$$

Na levé straně máme $n - 1$ členů.

a) $x < 1$: Potom každý z těchto $n - 1$ členů je menší než 1. Jejich součet tedy nemůže být $n - 1$.

b) $x = 1$: Z činitele $(x - 1)$ už víme, že $x = 1$ je kořenem polynomu. (Je dokonce vícenásobný – je totiž i kořenem druhého činitele, protože každý z $n - 1$ členů je roven 1.)

c) $x > 1$: Potom každý z těchto $n-1$ členů je větší než 1. Jejich součet tedy nemůže být $n-1$.

Jediný kořen polynomu je tedy $x = 1$.

Úloha 1.c. Ve státě je n měst ($n > 0$), přičemž mezi městy vedou jednosměrné silnice. Posloupnost na sebe navazujících silnic (i prázdnou) pak nazveme cesta. Víme, že pokud z města A do města B vede silnice, tak neexistuje žádná cesta z B do A. Navíc víme, že pro libovolná dvě města A, B existuje město C takové, že do C vede cesta z A i B.

Ukažte, že existuje právě jedno město (označme jej Řím) takové, že všechny cesty vedou do Říma. Přesněji řečeno, každá cesta buď nelze prodloužit a končí v Římě, nebo lze prodloužit tak, aby končila v Římě.

Řešení. Napřed si dokažme dvě pomocná tvrzení:

1. Mezi městy nemůže existovat okruh:

Kdyby existoval okruh, vzali bychom si dvě sousedící města A, B. Měli bychom silnici z A do B, ale kdybychom šli po okruhu dostali bychom i cestu z B do A.

2. Pokud ve státě existuje Řím, tak z něj nevede žádná silnice:

Dokažme sporem: Předpokládejme, že existuje silnice z Říma do nějakého C. Potom, ale nemůže existovat cesta z C do Říma, tudíž tato silnice ani nekončí v Římě ani není součástí cesty do Říma. Což je spor s předpokladem, že všechny cesty vedou do Říma.

Nyní už můžeme indukcí vzhledem k velikosti státu dokázat, že v každém státě nějaký Řím je:

1. $n = 1$ máme-li jedno město, určitě splňuje zadání a je Římem.

2. Mějme $n-1$ měst daných vlastností, mezi kterými je právě jeden Řím. Dokažme, že pak i po přidání dalšího města, bude v množině právě jeden Řím. Nové město M můžeme přidat do množiny dvěma způsoby:

a) Z Říma vede silnice do M. Tudíž všechny cesty, které vedly do Říma vedou do M. Zároveň z M žádná cesta vést nemůže, protože by pak musel vzniknout okruh, tudíž žádné z $n-1$ měst, ke kterým jsme M přidávali, nemůže být Římem, protože do něho nevede cesta z M. Nová množina má tudíž právě jeden Řím a tím je M.

b) Z M existuje silnice do nějakého z $n-1$ měst. Potom z M vede cesta do Říma, tudíž pro všechna A bude platit, že pro M a A existuje C (Řím), do kterého z obou měst vede cesta. Zároveň tím ani nevznikne nový Řím. Protože pokud z města vede silnice, není to Řím, jak nám říká tvrzení. Zároveň ze všech měst kromě Říma nám silnice vede. Tudíž nám zůstává starý Řím.

Indukcí jsme dokázali, že pro každou množinu n měst splňující zadání existuje právě jeden Řím.

Úloha 1.D. Vítek stál na políčku nekonečné šachovnice a vydal se na procházku po ní. V každém kroku se posunul o jedno pole jedním ze 4 základních směrů: nahoru, doleva, dolů nebo doprava. Kolik různých procházek mohl Vítek po šachovnici udělat, pokud víme, že udělal 26 kroků a skončil na stejném políčku, jako začal?

Řešení. Má-li se Vítek vrátit na políčko z kterého vyšel, musí za každý krok udělat opačný (za krok vpravo krok vlevo a za každý krok nahoru krok dolů (a opačně)).

Ze všech 26 kroků vybereme $2k$ kroku horizontálně, tedy $\binom{26}{2k}$. Z těchto horizontálních $2k$ kroků, vybereme k kroků vpravo: $\binom{2k}{k}$. Dále nám zbývá $26-2k$ kroků na kroky ve vertikálním směru. Těch musí být opět stejný počet nahoru i dolů, tudíž z nich vybereme polovinu, tedy $\binom{26-2k}{13-k}$ kroků nahoru.

Všechny tyto výběry volíme na sobě nezávisle, proto je mezi sebou budeme násobit. Výraz můžeme zjednodušit přepsáním kombinačních čísel do tvaru faktoriálů a následným pokrácením zlomků a vyjde nám výraz $\frac{26!}{[k!(13-k)!]^2}$.

Máme tedy výběr pro obecné k. Teď musíme ještě určit jakých hodnot může k nabývat. Jelikož máme 26 kroků, tak je zřejmé, že počet kroků k v jednom směru je $0 \leq k \leq 13$. Výsledný počet možností procházek tedy získáme součtem možností pro všechny možné k, tedy $\sum\limits_{k=0}^{13} \frac{26!}{[k!(13-k)!]^2}$.

Vyčíslením sumy získáme číslo 108 172 480 360 000, což je počet všech možných procházek po šachovnici za daných podmínek.

Poznamenejme ještě, že úloha šla řešit i elegantněji (ale náročnější úvahou). Dalo se ukázat, že výsledný počet je $\binom{26}{13}^2$.

BRKOS Team