BRněnský KOrespondenční Seminář

XXVIII. ročník

2021/2022

Řešení 5. série

Nerovnosti

Úloha 5.1. Mějme funkci $f(a,b) = |a^2 - b^2|$. Dokažte, že pro všechna reálná čísla a, b, c platí $f(a,b) \leq f(a,c) + f(b,c)$.

Řešení. Nechť a, b, c jsou libovolná. Provedeme sérii ekvivalentních úprav:

$$
\begin{aligned}
|a^2 - b^2| &\leq |a^2 - c^2| + |b^2 - c^2| \\
|a^2 - b^2|^2 &\leq (|a^2 - c^2| + |b^2 - c^2|)^2 \\
a^4 - 2a^2b^2 + b^4 &\leq |a^2 - c^2|^2 + |b^2 - c^2|^2 + 2|a^2 - c^2||b^2 - c^2| \\
&= a^4 + c^4 - 2a^2c^2 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 + 2|a^2 - c^2||b^2 - c^2| \\
-a^2b^2 - c^4 + a^2c^2 + b^2c^2 &\leq |a^2 - c^2||b^2 - c^2| \\
a^2(c^2 - b^2) - c^2(c^2 - b^2) &\leq |a^2 - c^2||b^2 - c^2| \\
(a^2 - c^2)(c^2 - b^2) &\leq |a^2 - c^2||c^2 - b^2|
\end{aligned}
$$

Levá strana je nyní buď stejná jako pravá, nebo je záporná (a pravá kladná); nerovnost tedy platí.

Další možná řešení jsou například rozdělení na případy nebo použití trojúhelníkové nerovnosti.

Úloha 5.2. Pro $a, b, x, y \in \mathbb{R}^+, x > y$, dokažte následující nerovnost:

$$\frac{(a^2 + b^2)x + (-a^2 + b^2)y}{x^2 - y^2} \geq \frac{(a+b)^2}{2x}.$$

Řešení. Nerovnost dokážeme vhodnými ekvivalentními úpravami nerovnosti. Zde jsou uvedeny 2 takové úpravy.

$$
\begin{aligned}
\frac{(a^2 + b^2)x + (-a^2 + b^2)y}{x^2 - y^2} &\geq \frac{(a+b)^2}{2x} \\
\frac{a^2x + b^2x - a^2y + b^2y}{(x+y)(x-y)} &\geq \frac{(a+b)^2}{2x} \\
\frac{a^2(x-y) + b^2(x+y)}{(x+y)(x-y)} &\geq \frac{(a+b)^2}{2x} \\
\frac{a^2(x-y)}{(x+y)(x-y)} + \frac{b^2(x+y)}{(x+y)(x-y)} &\geq \frac{(a+b)^2}{2x + y - y} \\
\frac{a^2}{x+y} + \frac{b^2}{x-y} &\geq \frac{(a+b)^2}{(x+y) + (x-y)}
\end{aligned}
$$

Tato nerovnost platí díky Cauchy-Schwarzovu zlomkobijci (Tituově nerovnosti).

BRKOS Team

Další možná cesta k cíli je následující:

$$\begin{aligned}\frac{(a^2+b^2)x+(-a^2+b^2)y}{x^2-y^2} &\geq \frac{(a+b)^2}{2x}\\ (a^2+b^2)2x^2+(-a^2+b^2)2xy &\geq (a+b)^2(x^2-y^2)\\ (a^2+b^2)2x^2-(a^2-b^2)2xy &\geq (a+b)^2x^2-(a+b)^2y^2\\ (a^2+b^2)2x^2-(a^2-b^2)2xy &\geq (a^2+2ab+b^2)x^2-(a^2+2ab+b^2)y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)2x^2-(a^2-b^2)2xy-(a^2+2ab+b^2)x^2+(a^2+2ab+b^2)y^2 &\geq 0\\ (a^2-2ab+b^2)x^2-(a^2-b^2)2xy+(a^2+2ab+b^2)y^2 &\geq 0\\ (a-b)^2x^2-(a-b)(a+b)2xy+(a+b)^2y^2 &\geq 0\\ [x(a-b)-y(a+b)]^2 &\geq 0\end{aligned}$$

Nerovnost zřejmě platí z nezápornosti hodnoty druhé mocniny.

Úloha 5.3. Představme si normovaný polynom $P(x)$ stupně 3, který má včetně násobností 3 reálné kořeny a, b, c. Pro P navíc platí, že koeficient u x je roven $a^2+b^2+c^2$. Dokažte, že P má jediný trojnásobný kořen.

Řešení. $P(x)$ je normovaný, stupně 3 a má tři reálné kořeny, jeho rozklad na kořenové činitele vypadá takto:

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

Roznásobením závorek získáme tvar

$$P(x) = x^3-(a+b+c)x^2+(ac+bc+ab)x-abc$$

Ze zadání víme, že se koeficient u x má rovnat $a^2+b^2+c^2$, porovnejme proto tento výraz s koeficientem $(ac+bc+ab)$ odvozeným výše, a dál upravujme na součet čtverců (tj. „tří výrazů v druhé mocnině“):

$$\begin{aligned}ac+bc+ab &= a^2+b^2+c^2\\ 0 &= a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\\ 0 &= 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc\\ 0 &= a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+2ac+a^2\\ 0 &= (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\end{aligned}$$

Pozn. na třetím řádku jsme vynásobili obě strany číslem 2 a na čtvrtém se jen trochu pozměnilo pořadí členů, zkuste si spočítat jednotlivá a^2, b^2 apod. a uvidíte, že to sedí ;)

Každý z výrazů $(a-b)^2, (c-a)^2, (b-c)^2$ jsou druhé mocniny, které musí být nezáporné. Na pravé straně poslední rovnice máme tři nezáporná čísla, jejichž součet musí být rovný nule – nutně tedy každé z nich musí být nulové. Proto $a = b = c$, a $P(x)$ má jeden trojnásobný kořen.

BRKOS Team

Úloha 5.4. Uvažujme tětivový čtyřúhelník se stranami a, b, c, d a úhlopříčkami e, f. Ukažte následující nerovnost: $e^2 + f^2 \geq 4\sqrt{abcd}$. Určete, kdy nastane rovnost.

Řešení. Ukážeme platnost nerovnosti v zadání pomocí dvou AG nerovností. První je velmi jednoduchá: $e^2 + f^2 \geq 2ef$. Pro další odhad použijeme tzv. *Ptolemaiovu větu*: ta říká, že v tětivovém čtyřúhelníku se stranami a úhlopříčkami označenými jako v zadání platí $ac + bd = ef$, tj. součin délek úhlopříček je roven součtu součinů délek protějších stran. Na výraz v Ptolemaiově větě můžeme aplikovat AG nerovnost pro dva členy ac, bd a dostaneme:

$$e^2 + f^2 \geq 2ef = 2(ac + bd) \geq 4\sqrt{abcd}.$$

Právě toto jsme chtěli dokázat, tj. první část úlohy je zdárně hotová. Nyní stačí určit, kde nastane rovnost. Jelikož v AG nerovnosti $x + y \leq 2\sqrt{xy}$ nastává rovnost, právě když $x = y$, pro námi odvozenou nerovnost nastane rovnost, právě když $e = f$ a $ac = bd$. To ale není všechno! Nezapomeňme, že úlohu neřešíme pro libovolnou skupinu čísel, ale pro délky v čtyřúhelníku. Musíme tedy prozkoumat, pro jaká a, b, c, d, e, f splňující $e = f, ac + bd = ef, ac = bd$ daný čtyřúhelník existuje.

Co pro tětivový čtyřúhelník znamená, že délky jeho úhlopříček jsou stejné? Označme si úhly u jednotlivých vrcholů jako $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Z tětivovosti plyne, že součet protějších úhlů je $180°$, tj. $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$. Ovšem jelikož obě úhlopříčky mají shodné délky, obvodové úhly nad nimi jsou stejně velké, tj. BÚNO $\alpha = \beta, \gamma = \delta = 180° - \alpha$. Celkem tedy můžeme říct, že náš čtyřúhelník má u vrcholů úhly $\alpha, \alpha, 180° - \alpha, 180° - \alpha$, tedy se jedná o rovnoramenný lichoběžník. Naopak, každý rovnoramenný lichoběžník lze vepsat do kružnice a jeho úhlopříčky jsou stejně dlouhé.

Zbývá prozkoumat podmínku $ac = bd$. BÚNO předpokládejme, že b, d jsou ramena: chceme tedy zjistit, pro jaká kladná reálná čísla a, c můžeme zkonstruovat rovnoramenný lichoběžník se základnami délek a, c a rameny délky $\sqrt{ac}$. Předpokládejme na chvíli $a > c$. Označme kolmé průměty bodu C, D na přímku AB jako C', D'. Snadno si rozmyslíme, že lichoběžník s danými parametry existuje, právě když „existuje" trojúhelník $AC'C$, Na to využijeme následující drobné lemma:

Lemma. Nechť a, c, r jsou kladná reálná čísla. Pak existuje rovnoramenný lichoběžník se základnami délek a, c a rameny délky r, právě když $r > \frac{1}{2}|a - c|$.

Důkaz. Pro čtverec je tvrzení zřejmé. BÚNO dále předpokládejme $a > c$. Označme kolmé průměty bodu C, D na přímku AB jako C', D'. Tedy $|AC'| = |BD'| = \frac{a-c}{2}$. Pokud zadný lichoběžník existuje, potom z toho, že trojúhelník ACC' je pravúhlý s přeponou AC, dostaneme $r > \frac{1}{2}(a - c)$. Naopak, pokud tato nerovnost platí, jsme schopni jednoduše sestrojit trojúhelníky ACC', BDD'. Jelikož čtverec $C'D'DC$ sestrojíme vždy, dohromady dostaneme rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ s požadovanými parametry.

Stačí nám tedy zjistit, kdy nastane nerovnost $\sqrt{ac} > \frac{1}{2}|a - c|$. Po umocnění na druhou a úpravě dostáváme $0 > a^2 - 6ac + c^2$, po vydělení c^2 potom $0 > (\frac{a}{c})^2 - 6\frac{a}{c} + 1$. Jelikož koeficient u $(\frac{a}{c})^2$ je kladný získáme $\frac{a}{c} \in \langle t_1, t_2 \rangle$, kde t_1, t_2 jsou kořeny rovnice $t^2 - 6t + 1 = 0$ Celkem tedy $\frac{a}{c} \in \langle 3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2} \rangle$.

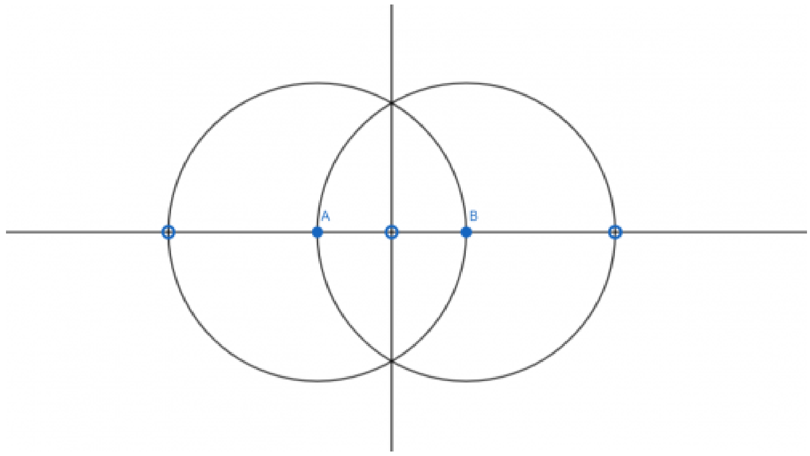
BRKOS Team

Úloha 5.A. Nechť $A \neq B$ jsou body v rovině. Určete množinu všech bodů C v rovině takových, že ABC je rovnoramenný trojúhelník.

Řešení. Aby byl trojúhelník ABC ze zadané úsečky AB rovnoramenný, musí splňovat několik podmínek. Bod C nesmí náležet přímce na které leží úsečka AB, jelikož by jinak body A, B, C ležely v jedné přímce. Dále máme dvě možnosti, buď AB tvoří základnu a platí tak $|AC| = |BC|$, nebo AB tvoří jedno z ramen a platí buď $|AB| = |AC|$ nebo $|AB| = |BC|$.

V prvním případě AB tvoří základnu a rovnosti $|AC| = |BC|$ vyhovují všechny body C na ose úsečky AB kromě průsečíku osy s úsečkou AB, jelikož tento průsečík náleží úsečce AB a body by ležely v jedné přímce. V druhém případě hledáme množinu bodů která vyhovuje rovnosti $|AB| = |AC|$, respektive $|AB| = |BC|$. Množinu bodů, které mají od bodu A, resp. B, stejnou vzdálenost lze popsat kružnicí se středem v daném bodě. Možné body C leží na kružnici se středem v bodě A a poloměrem $|AB|$, respektive na kružnici se středem v bodě B a poloměrem $|AB|$. Stejně jako v předchozím případě je třeba vyloučit body náležící přímce, na které leží úsečka AB.

Řešením je tedy množina bodů, kterou lze popsat jako sjednocení osy úsečky AB, kružnice se středem v bodě A a poloměrem $|AB|$ a kružnice se středem v bodě B a poloměrem $|AB|$, mimo body které leží na jedné přímce s body A a B.



Úloha 5.B. Určete, kterému celému číslu je roven výraz

$$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}.$$

Své tvrzení dokažte.

Řešení. Označme si $A = \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$. Jedná se o součet dvou výrazů pod třetí odmocninou, bude tedy vhodné se třetích odmocnin úpravami nějak „zbavit“, a to uděláme tak, že celý výraz umocníme na třetí:

$$A^3 = \left(\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\right)^3$$

$$A^3 = 9-4\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(9-4\sqrt{5})^2(9+4\sqrt{5})} + 3\sqrt[3]{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})^2} + 9 + 4\sqrt{5}$$

Výše jsme využili pravidlo $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Upravujme dál – pod oběma odmocninami je skrytý výraz $(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5}) = 81 - 80 = 1$

$$
\begin{aligned}
A^3 &= 18 + 3\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} + 3\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} \\
A^3 &= 18 + 3(\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}) \\
A^3 &= 18 + 3A \\
A^3 &- 3A - 18 = 0
\end{aligned}
$$

I pro řešitele, kteří neznají pokročilejší způsoby hádání celočíselných kořenů polynomů, nemusí být těžké odhadnout (a dosazením ověřit), že 3 je jedním z kořenů. Po vydělení kořenovým činitelem zjistíme, že $A^3 - 3A - 18 = (A-3)(A^2+3A+6)$. Ze známého výrazu pro nalezení kořenů kvadratické rovnice zjistíme, že A^2+3A+6 už žádný celočíselný kořen nemá. Jediným vyhovujícím A je tedy číslo 3.

Úloha 5.C. Najděte všechny trojúhelníky ABC takové, že existuje kružnice protínající stranu AC v bodech C a X a stranu AB v bodech B a Y, přičemž platí: $|CX| : |AX| = |BY| : |YA|$. Body X a Y jsou vnitřní body úseček AB a AC.

Řešení. Uvedu zde řešení inspirované Ríšou Blažkem. Body X a Y jsou vnitřními body stran AC, AB trojúhelníku ABC. Čtyřúhelníku $XYCB$ lze ze zadání opsat kružnici. Díky tomu z mocnosti bodu ke kružnici platí rovnice $|AX| \cdot |AC| = |AY| \cdot |AB|$. Tato rovnice musí být pro hledané trojúhelníky splněna, stejně jako rovnice ze zadání, kterou si upravíme následovně: jistě platí $|CX| = |AC| - |AX|$, $|BY| = |BA| - |AY|$. Po dosazení do zadané rovnice dostáváme $\frac{|AC|-|AX|}{|AX|} = \frac{|BA|-|AY|}{|AY|}$. Po přičtení jedničky k oběma stranám rovnice a roznásobení získáváme rovnost $|AY| \cdot |AC| = |AX| \cdot |AB|$. Tuto rovnici mohu vhodně podělit s rovnicí získanou z mocnosti bodu ke kružnici (dělení nulou je kvůli kladným vzdálenostem vyloučeno) a získat tak rovnici $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AC|}$, tedy $|AB| = |AC|$. Došli jsme tedy čistě algebraicky k závěru, že má-li mít nějaký trojúhelník požadované vlastnosti ze zadání, pak musí být nutně rovnoramenný s rameny AB, AC. Zadání po nás ale chce najít všechny trojúhelníky s danou vlastností. Zbývá nám tedy zjistit, zda je tato podmínka rovnoramennosti dostačující.

Mějme tedy rovnoramenný trojúhelník ABC s rameny AB, AC a zvolme za body X, Y středy stran AC, AB. Poté jsou jistě trojúhelníky AXY, ACB podobné podle věty SUS, neboť poměry dvou dvojic odpovídajících si stran jsou stejné a úhel sevřený mezi těmito stranami je také stejný. Tedy úhly $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle AXY$ a $\sphericalangle AYX$ musí být shodné a platí $|\sphericalangle CXY| = |\sphericalangle BYX| = 180° - |\sphericalangle AXY|$. Součet protějších úhlů v čtyřúhelníku $BCXY$ tedy nutně musí být roven 180°, takže je tento čtyřúhelník tětivový a určitě mu lze opsat kružnici, což je kružnice ze zadání. Trojúhelník splňuje zadanou vlastnost právě tehdy, když je rovnoramenný, a hledaná množina trojúhelníků je množina všech rovnoramenných trojúhelníků se základnou BC.

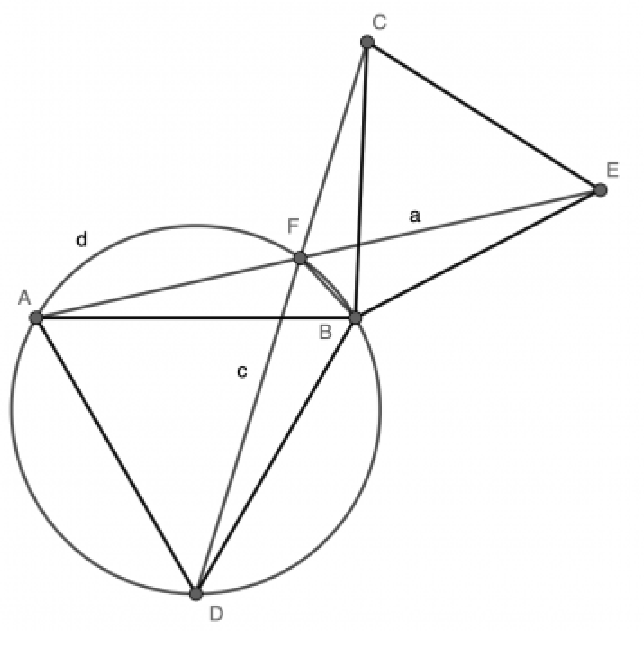
BRKOS Team

Úloha 5.D. Vybereme si v rovině tři body A, B a C, které nejsou v degenerované pozici; tzn. trojúhelník ABC nemá žádný z vnitřních úhlů větší než 120°. Dále sestrojíme rovnostranný trojúhelník nad úsečkou AB (mimo trojúhelník ABC) a spojíme třetí bod tohoto rovnostranného trojúhelníka s bodem C. Získáme tak přímku c. Podobně vytvoříme přímku a tak, že sestrojíme rovnostranný trojúhelník nad BC a spojíme jeho třetí vrchol s bodem A. V místě, kde se protíná přímka c a a, můžeme umístit libovolný kus ovoce.

Přemýšlíme nad umístěním dalšího kusu ovoce, ale zatím máme stanovenu pouze polohu bodů A a B. Kde všude můžeme ovoce umístit, pokud neznáme polohu bodu C?

Řešení. Uvažme obecný negenerovaný trojúhelník ABC jako na obrázku. Také si vyznačme příslušné rovnostranné trojúhelníky nad hranami, spojnice vrcholů a a c a jejich průsečík F. Povšimněme si, že trojúhelníky ABE a DBC jsou shodné. $|AB| = |DB|$ a $BE = BC$, jelikož se jedná o dvojice stran rovnostranných trojúhelníků. Navíc oba úhly u vrcholu B jsou stejně velké. Jejich společná velikost je totiž $|\sphericalangle ABC| + 60°$. Důsledkem je, že velikosti úhlů $\sphericalangle FDB$ a $\sphericalangle FAB$ jsou stejné (jedná se o odpovídající si úhly ve shodných trojúhelnících). Podle věty o obvodových úhlech to ovšem znamená, že všechny čtyři body A, B, D i F leží na společné kružnici d. Tím jsme omezili množinu možných poloh bodu F na oblouk AB kružnice opsané trojúhelníku ABD, který neobsahuje bod D. Samozřejmě musíme uvažovat obě možné polohy vrcholu D (v horní a dolní polorovině).

Nyní ještě musíme ukázat, že pro každý takový bod F existuje vhodné umístění bodu C. Opětovným použitím věty o obvodových úhlech můžeme spočítat, že velikosti úhlů $\sphericalangle DAB$ a $\sphericalangle DFB$ jsou stejné, tedy 60°, a podobně velikosti úhlů $\sphericalangle AFD$ a $\sphericalangle ABD$ jsou stejné, tedy 60°. Velikost úhlu u vrcholu F trojúhelníku ABF je proto 120°. Umístíme-li vrchol C do bodu F, dostaneme nedegenerovaný trojúhelník. Zároveň průsečík úseček a a c zřejmě bude bod F. Tento postup je platný pro každý vnitřní bod oblouku. Pro jeho krajní body A a B umístíme bod C na polopřímku DA respektive DB. V prvním případě leží bod A z definice na obou přímkách a, c. V druhém případě leží bod B z definice na přímce c, a protože je úhel $\sphericalangle ABE$ plný, leží bod B i na přímce a. Je proto možné zvolit bod C tak, aby F splynul s A nebo s B.



BRKOS Team